PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

C. CHEVERRY

Oscillations de faible amplitude pour les systèmes 2 x 2 de lois de conservation

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1992-1993, fascicule 1 « Fascicule d'équations aux dérivées partielles », , exp. n° 2, p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1992-1993___1_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1992-1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

OSCILLATIONS DE FAIBLE AMPLITUDE POUR LES SYSTEMES 2×2 DE LOIS DE CONSERVATION

C . Cheverry

C.N.R.S URA 305

Institut de Recherche Mathematique de Rennes

Campus de Beaulieu. Av du Gl Leclerc

35 042 RENNES cedex

0 . Introduction .

On considère le problème de Cauchy conservatif, monodimensionnel en espace, strictement hyperbolique et à données initiales prises sous la forme d'oscillations de faible amplitude :

$$(0) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \partial_t u_\varepsilon(t,x) \,+\, \partial_x \,\left[f_1\big(u_\varepsilon, v_\varepsilon\big) \right] \,=\, 0\,. \\ u_\varepsilon(0,x) = \bar{u} + \varepsilon\, h_1\Big(x, \dfrac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big)\,. \\ \\ \partial_t v_\varepsilon(t,x) \,+\, \partial_x \,\left[f_2\big(u_\varepsilon, v_\varepsilon\big) \right] \,=\, 0\,. \\ v_\varepsilon(0,x) = \bar{v} + \varepsilon\, h_2\Big(x, \dfrac{\chi_2(x)}{\varepsilon}\Big)\,. \end{array} \right.$$

où h_1 et h_2 sont choisies continues, à support compact en la première variable et périodiques de période un en la seconde variable. χ_1 et χ_2 sont de classe C^1 avec $\chi_1'(x)$ et $\chi_2'(x)$ non nuls pour presque tout x dans $\mathbb{R}$.

Une translation des données permet de choisir $(\bar{u}, \bar{v}) = (0,0)$.

On suppose par ailleurs, sans perte de généralité, que le système (0) est mis sous forme diagonale au point base $(0,0)$, c'est à dire :

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(0,0) = \frac{\partial f_2}{\partial u}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(0,0) = a \qquad\qquad \frac{\partial f_2}{\partial v}(0,0) = b$$

(avec $a < b$ d'après la stricte hyperbolicité)

On fait ensuite l'hypothèse que les deux valeurs propres $\lambda_1(u,v)$ et $\lambda_2(u,v)$ de la matrice jacobienne de $(u,v) \longrightarrow \big(f_1(u,v), f_2(u,v)\big)$ sont soit vraiment non linéaires soit linéairement dégénérées au voisinage de $(0,0)$.

Le schéma de Glimm [6] fournit alors l'existence globale en temps d'une solution faible entropique $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in BV(\mathbb{R}^2_+)$ pour (0).

L'analyse du comportement asymptotique des solutions de (0) lorsque ε tend vers zero a été abordée pour la première fois en 1985 dans un travail de R.J.DiPerna et A.Majda [4]. Le modèle classique proposé pour un système 2×2 est celui de l'optique géométrique faiblement non linéaire non résonante pour laquelle on constate un découplage des équations sous la forme de deux simples lois de Burgers. L'estimation qui évalue la différence entre le modèle $(\varepsilon\,\sigma^1_\varepsilon\,,\,\varepsilon\,\sigma^2_\varepsilon)$ et la solution exacte $(\,u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon\,)$ est donnée dans [4] sous la forme suivante :

$$\forall K \text{ compact}, \quad \exists\, C_K > 0, \qquad \|\,(u_\varepsilon, v_\varepsilon) - (\varepsilon\,\sigma^1_\varepsilon, \varepsilon\,\sigma^2_\varepsilon)\,\|_{L^1(K)} \leqslant C_K\,\varepsilon\,t.$$

Cette estimation ne présente donc d'intérêt que pour un temps t asymptotiquement petit.

Le problème de la justification du modèle pour des solutions régulières de (0) a fait l'objet de nombreux travaux (consulter par exemple J.Hunter, J.Keller [7], A.Majda, R.Rosalès [8] ou J.L.Joly, G.Métivier, J.Rauch [9]) dans lesquels l'étude de la propagation des oscillations dans un cadre C^∞ est menée à son terme. Mais ce n'est que récemment que Schochet [8] a généralisé ces résultats au cas des solutions faibles présentant des chocs. Le contexte de son travail est le suivant : système strictement hyperbolique monodimensionnel de n lois de conservation avec des conditions de Cauchy qui oscillent avec la même période, de manière linéaire et homogène $\big($pour tout i avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $u^i_\varepsilon(0,x) = \varepsilon\, h_i(x/\varepsilon)$ où $h_i(.) \in BV(\mathbb{R})$ et $h_i(t+1) = h_i(t)\big)$.

Dans [11], l'argumentation ne saurait à priori se passer de ces hypothèses d'homogénéité et d'ajustement des périodes. Par ailleurs, la validité du modèle est restreinte à un domaine de la forme $[0,t] \times \mathbb{R}$ avec t de l'ordre d'une (petite ?) constante. Cet article se restreint au cas d'un système 2×2 mais aborde des données initiales d'un type plus général, de la forme $\varepsilon\, h_i(x, \chi_i(x)/\varepsilon)$, c'est à dire non homogènes et à phase non linéaire. La compacité du support des fonctions h_i ($i = 1$ ou 2) en la première variable permet d'énoncer des résultats valables pour tout temps t. Le prix à payer est l'apparition de deux variables d'espace (une lente et une rapide) ce qui introduit des problèmes de substitution qu'il importe de traiter avec soin. Sinon la démarche (commune au cas linéairement dégénéré et vraiment non linéaire) consiste à exploiter les entropies (chapitre 2.2 et 3.2) naturellement associées à (0) de manière à écrire des équations (chapitre 2.1 et 3.1) et des inéquations de propagation pour les mesures de Young oscillantes ([5], [10] et [14]) définies à partir de sous-suites extraites de $U_\varepsilon = (u_\varepsilon/\varepsilon)$ et $V_\varepsilon = (v_\varepsilon/\varepsilon)$. La justification (chapitre 2.3 et 3.3) ainsi que l'unicité du modèle de l'optique géométrique faiblement non linéaire résulte dès lors des inégalités ainsi obtenues. Le plan de cet article est donc le suivant :

SOMMAIRE

1 Notations .

---

2 Le cas linéairement dégénéré .

2.1 Equations de propagation dans les variables rapides

2.2 Inéquations de propagation

2.3 Justification du modèle

---

3 Le cas vraiment non linéaire .

3.1 Equations de propagation dans les variables rapides

3.2 Entropie , flux d'entropie

3.3 Justification des équations de propagation

1 . Notations

On convient des notations suivantes :

$$f_1(u,v) = a\,u + q_1(u,v) + R_1(u,v)$$

avec $q_1(u,v) = \frac{c_1}{2}\,u^2 + c_2\,u\,v + \frac{c_3}{2}\,v^2$ et $|\,R_1(u,v)\,| = \bigcirc\big(u^2 + v^2\big)^{\frac{3}{2}}$

$$f_2(u,v) = b\,v + q_2(u,v) + R_2(u,v)$$

avec $q_2(u,v) = \frac{d_3}{2}\,u^2 + d_2\,u\,v + \frac{d_1}{2}\,v^2$ et $|\,R_2(u,v)\,| = \bigcirc\big(u^2 + v^2\big)^{\frac{3}{2}}$

$\mathbb{T}$ désigne le tore à une dimension d'espace.

Soit $U_\varepsilon = (u_\varepsilon/\varepsilon)$ et $V_\varepsilon = (v_\varepsilon/\varepsilon)$ avec $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ solution de (0).

D'après les estimations du schéma de Glimm, $\{\,U_\varepsilon\,\}_\varepsilon$ $\big(\text{resp } \{\,\varepsilon\,U_\varepsilon\,\}_\varepsilon\,\big)$ et $\{\,V_\varepsilon\,\}_\varepsilon$ $\big(\text{resp } \{\,\varepsilon\,V_\varepsilon\,\}_\varepsilon\,\big)$ sont des suites uniformément bornées dans $L^\infty\big(\mathbb{R}^2_+\big)$ $\big(\text{resp dans } BV\big(\mathbb{R}^2_+\big)\,\big)$ lorsque ε tend vers zero.

Par conséquent, d'après JMR [10], quitte à extraire une sous-suite (qui est supposée fixée dans le reste de l'exposé), il existe deux familles mesurables de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ $\{\,\nu^1_{t,x,y}(\lambda),\ (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}\}$ et $\{\,\nu^2_{t,x,y}(\lambda),\ (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}\}$ à support compact en λ et satisfaisant : Pour tout $f \in C^0\big(\mathbb{R}\big)$ et pour tout $\varphi \in C^0\big(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}\big)$ à support compact en les deux premières variables,

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int f\big(U_\varepsilon(t,x)\big)\,\varphi\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big)\ dx = \iint <\nu^1_{t,x,y}, f(\lambda)>\ \varphi(t,x,y)\ dx\,dy\ .$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int f\big(V_\varepsilon(t,x)\big)\,\varphi\Big(t,x,\frac{\chi_2(x-bt)}{\varepsilon}\Big)\ dx = \iint <\nu^2_{t,x,y}, f(\lambda)>\ \varphi(t,x,y)\ dx\,dy\ .$$

On introduit aussi :

$\bar{U}(t,x)$ (resp $\bar{V}(t,x)$) la limite faible pour la topologie $*(L^\infty, L^1)$ de la sous-suite extraite de U_ε (resp V_ε). On a par conséquent :

$\bar{U}(t,x) = \int_0^1 < \nu^1_{t,x,y}, \lambda > dy$ et $\bar{V}(t,x) = \int_0^1 < \nu^2_{t,x,y}, \lambda > dy$.

$\sqcap(t,x)$ (resp $\wedge(t,x)$) la limite faible pour la topologie $*(L^\infty, L^1)$ de la sous-suite extraite de U_ε^2 (resp V_ε^2). On a par conséquent :

$\sqcap(t,x) = \int_0^1 < \nu^1_{t,x,y}, \lambda^2 > dy$ et $\wedge(t,x) = \int_0^1 < \nu^2_{t,x,y}, \lambda^2 > dy$.

Soit $U_r(t,x,y) = < \nu^1_{t,x,y}\,, \lambda >$ et $V_r(t,x,y) = < \nu^2_{t,x,y}\,, \lambda >$ les profils associés respectivement aux suites $\{U_\varepsilon\}_\varepsilon$ et $\{V_\varepsilon\}_\varepsilon$.

On note enfin M_b l'espace des mesures de Radon bornées sur $\mathbb{R}^2_+$.

2 . Le cas linéairement dégénéré

Dans ce chapitre, on fait l'hypothèse de dégénerescence linéaire qui conduit en particulier aux conditions :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(0,0) = c_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}(0,0) = d_1 = 0 .$$

2.1 Equations de propagation dans les variables rapides.

Par définition de $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ solution faible de (0), U_ε satisfait la condition suivante :

Pour toute $\varphi(t,x,y)$ régulière, à support compact en les deux premières variables et périodique de période un en la troisième variable, on a :

$$(i_\varepsilon) \qquad \iint U_\varepsilon(t,x)\, (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-a\,t)}{\varepsilon}\Big)\; dt\,dx \;+$$

$$(ii_\varepsilon) \qquad \iint c_2\; U_\varepsilon\; V_\varepsilon\; \chi_1'(x-at)\;\partial_y\varphi\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-a\,t)}{\varepsilon}\Big)\; dt\,dx \;+$$

$$(iii_\varepsilon) \qquad \iint \frac{c_3}{2}\; V_\varepsilon^2\; \chi_1'(x-at)\;\partial_y\varphi\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-a\,t)}{\varepsilon}\Big)\; dt\,dx \;+$$

$$(iv_\varepsilon) \qquad \frac{1}{\varepsilon} \iint R_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\ \partial_x \left[\varphi\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big)\right]\ dt\,dx\ +$$

$$\varepsilon \iint \left[c_2\, U_\varepsilon\, V_\varepsilon + \frac{c_3}{2}\, V_\varepsilon^2\right]\ \partial_x\varphi\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-a\,t)}{\varepsilon}\Big)\ dt\,dx\ +$$

$$(v_\varepsilon) \qquad \int h_1\Big(x, \frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big)\ \varphi\Big(0, x, \frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big)\ dx\ =\ 0\,.$$

On regarde le comportement à la limite lorsque ε tend vers zero de chacun de ces termes. D'après JMR [10],

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\ (i_\varepsilon)\ =\ \iint_{\mathbb{R}_+^2} \int_0^1\ U_r(t,x,y)\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)\,(t,x,y)\ dt\,dx\,dy \qquad \text{et}$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\ (v_\varepsilon)\ =\ \int_{\mathbb{R}} \int_0^1\ h_1(x,y)\ \varphi\,(0,x,y)\ dx\,dy\ .$$

Par ailleurs, les estimations du schéma de Glimm appliquées au second terme de l'identité $(\partial_t + a\partial_x)\,U_\varepsilon\ =\ -\,\varepsilon\,\partial_x\, q_1(U_\varepsilon, V_\varepsilon)\ -\ (1/\varepsilon)\,\partial_x\, R_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ garantissent les conditions suivantes :

$$\begin{cases} (\partial_t + a\,\partial_x)\ \left[U_\varepsilon\ \ \partial_y\varphi\Big(t, x, \dfrac{\chi_1(x\,-\,a\,t)}{\varepsilon}\Big)\right] & \text{borné dans } M_b \cap W^{-1,\infty} \\ (\partial_t + b\,\partial_x)\ V_\varepsilon & \text{borné dans } M_b \cap W^{-1,\infty} \\ \ a \neq b & \end{cases}$$

On a donc, par compacité par compensation (lemme de Tartar [12]), la convergence du produit $V_\varepsilon(t,x)\ .\ U_\varepsilon(t,x)\,(\partial_y\varphi)\big(t,x,\chi_1(x-at)/\varepsilon\big)$ vers le produit des limites faibles, soit :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\ (ii_\varepsilon)\ =\ \iiint c_2\ U_r(t,x,y)\ \bar V(t,x)\ \chi_1'(x-at)\ \ \partial_y\varphi(t,x,y)\ \ dt\,dx\,dy$$

De même, les conditions

$$\begin{cases} (\partial_t + a\,\partial_x)\ \left[(\partial_y\varphi)\Big(t, x, \dfrac{\chi_1(x\,-\,a\,t)}{\varepsilon}\Big)\right] & \text{borné dans } M_b \cap W^{-1,\infty} \\ (\partial_t + b\,\partial_x)\ V_\varepsilon^2\ =\ 2\,\bar V_\varepsilon \cdot (\partial_t + b\,\partial_x)\,V_\varepsilon & \text{borné dans } M_b \cap W^{-1,\infty} \\ \ a \neq b & \end{cases}$$

impliquent :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \; (iii_\varepsilon) \;=\; \iiint \frac{c_3}{2} \;\wedge(t,x)\; \chi_1'(x-at)\; \partial_y\varphi(t,x,y)\; dt\,dx\,dy$$

Mais cette limite est nulle puisqu'à (t,x) fixé, on intègre sur le tore la dérivée d'une fonction périodique.

Enfin, ε étant en facteur de l'expression, il vient immédiatement :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \; (iv_\varepsilon) \;=\; 0\,.$$

Le calcul précédant montre que la limite faible $U_r(t,x,y)$ doit satisfaire la formulation faible de l'équation suivante :

$$(2.1.0)\quad \begin{cases} (\partial_t + a\,\partial_x)\,U_r(t,x,y) \;+\; c_2\;\bar{V}(t,x)\;\; \chi_1'(x-at)\;\; \partial_y U_r(t,x,y) \;=\; 0\,. \\ \qquad U_r(0,x,y) \;=\; h_1(x,y)\,. \end{cases}$$

En procédant de manière similaire, on obtient pour $V_r(t,x,y)$:

$$(2.1.1)\quad \begin{cases} (\partial_t + b\,\partial_x)\,V_r(t,x,y) \;+\; d_2\;\bar{U}(t,x)\;\; \chi_2'(x-bt)\;\; \partial_y V_r(t,x,y) \;=\; 0\,. \\ \qquad V_r(0,x,y) \;=\; h_2(x,y)\,. \end{cases}$$

Les valeurs de $\bar{U}(t,x)$ $\big($resp $\bar{V}(t,x)\big)$ font l'objet d'un calcul explicite.

En effet, (0) peut encore s'écrire :

$$(2.1.2)\qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(t,x) + a\,\partial_x u_\varepsilon \;+\; \partial_x\,\{q_1(u_\varepsilon,v_\varepsilon) \;+\; R_1(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\} \;=\; 0 \\ \quad u_\varepsilon(0,x) \;=\; \varepsilon\, h_1\Big(x, \dfrac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big) \\ \\ \partial_t v_\varepsilon(t,x) + b\,\partial_x v_\varepsilon \;+\; \partial_x\,\{q_2(u_\varepsilon,v_\varepsilon) \;+\; R_2(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\} \;=\; 0 \\ \quad v_\varepsilon(0,x) \;=\; \varepsilon\, h_2\Big(x, \dfrac{\chi_2(x)}{\varepsilon}\Big) \end{cases}$$

On teste (2.1.2) contre $\varphi(t,x)$. On divise par ε puis on fait tendre ε vers zero. On obtient les équations de propagation suivantes pour les limites faibles $\bar{U}(t,x)$ et $\bar{V}(t,x)$:

$$(2.1.3)\quad \begin{cases} \partial_t\bar{U}(t,x) + a\;\partial_x\bar{U}(t,x) \;=\; 0 \qquad\qquad \bar{U}(0,x) \;=\; \displaystyle\int_0^1 h_1(x,y)\,dy\,. \\ \\ \partial_t\bar{V}(t,x) + b\;\partial_x\bar{V}(t,x) \;=\; 0 \qquad\qquad \bar{V}(0,x) \;=\; \displaystyle\int_0^1 h_2(x,y)\,dy\,. \end{cases}$$

Soit les expressions suivantes :

$$\bar{U}(t,x) \;=\; \int_0^1 h_1(x-at,y)\,dy$$

$$\text{et} \qquad \bar{V}(t,x) \;=\; \int_0^1 h_2(x-bt,y)\,dy$$

Les équations linéaires homogènes du premier ordre données en (2.1.0) et (2.1.1) admettent une solution que l'on peut expliciter :

$$U_r(t,x,y) \;=\; h_1\Big(\,x-a\,t\,,\; y\;-\;c_2\;\chi_1'(x-at)\;\int_0^1\!\!\int_0^t h_2\big(x-at+(a-b)s,y\big)\;ds\,dy\Big)\,.$$

$$V_r(t,x,y) \;=\; h_2\Big(\,x-b\,t\,,\; y\;-\;d_2\;\chi_2'(x-bt)\;\int_0^1\!\!\int_0^t h_1\big(x-bt+(b-a)s,y\big)\;ds\,dy\Big)\,.$$

$U_r(t,x,y)$ (resp $V_r(t,x,y)$) diffère donc du profil linéaire $h_1(x-at,y)$ (respectivement $h_2(x-bt,y)$) par un décalage de phase. On remarque par ailleurs que $U_r(t,x,y)$ (resp $V_r(t,x,y)$) sont de classe C^∞ et périodiques de période un en y. C'est précisément cette régularité (propre au cas de la dégénerescence linéaire) des équations de profil qui permet dans les deux paragraphes qui suivent de justifier assez simplement la pertinence des modèles donnés en (2.1.0) et (2.1.1).

2.2 Inéquations de propagation.

On introduit dans ce paragraphe une famille de couples (entropie , flux-d'entropie) $=$ $(\eta_{\alpha,\beta}\,,\,q_{\alpha,\beta})$. $\eta_{\alpha,\beta}$ s'obtient par résolution analytique du problème de Goursat-Beudon suivant (voir [1] ou [2]) :

$$(2.2.0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\partial_u f_1 - \partial_v f_2)\,\dfrac{\partial^2 \eta_{\alpha,\beta}}{\partial u \partial v} \;+\; \partial_u f_2\,\dfrac{\partial^2 \eta_{\alpha,\beta}}{\partial v^2} \;+\; \partial_v f_1\,\dfrac{\partial^2 \eta_{\alpha,\beta}}{\partial u^2} \;=\; 0 \\[2ex] \eta(0,v) \;=\; \beta\, v^2 \qquad\qquad\qquad \eta(u,0) \;=\; \alpha\, u^2 \end{array} \right.$$

$q_{\alpha,\beta}$ se déduit alors de l'équation entropique à laquelle est ajoutée la condition aux limites supplémentaire : $q_{\alpha,\beta}(0,0) = 0$.

L'équation (2.2.0) prise au point base $(0,0)$ fournit :

$$(a-b)\,\frac{\partial^2 \eta_{\alpha,\beta}}{\partial u \partial v}(0,0) \;=\; 0\,.$$

Cette condition et la forme des données initiales choisies en (2.2.0) donnent le développement limité de $(\eta_{\alpha,\beta}\,,\,q_{\alpha,\beta})$ au voisinage de $(0,0)$:

$$(2.2.1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \eta_{\alpha,\beta} &= \alpha\, u^2 + \beta\, v^2 + \bigcirc(u^2+v^2)^{3/2}. \\ q_{\alpha,\beta} &= \alpha\, a\, u^2 + \beta\, b\, v^2 + \bigcirc(u^2+v^2)^{3/2}. \end{aligned} \right.$$

De manière à sélectionner les entropies strictement convexes au voisinage de l'origine, on impose les conditions supplémentaires suivantes : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Le couple $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ donné par le schéma de Glimm est solution entropique de (0.0). Soit, pour toute fonction $\varphi(t,x)$ régulière et positive,

$$(2.2.2) \qquad \iint \{\eta_{\alpha,\beta}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\, \partial_t\varphi(t,x) + q_{\alpha,\beta}(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\, \partial_x\varphi(t,x)\}\ dt\,dx$$

$$+ \int \eta_{\alpha,\beta}\Big(\varepsilon\, h_1\Big(x, \frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon\, h_2\Big(x, \frac{\chi_2(x)}{\varepsilon}\Big)\Big)\ \varphi(0,x)\ dx \ \geqslant\ 0.$$

On divise (2.2.2) par ε^2 et on fait tendre ε vers zero pour obtenir l'inégalité suivante :

$$\forall\ \varphi(t,x) \in C_0^1(\mathbb{R}_+^2) \qquad \text{avec} \qquad \varphi(t,x) \geqslant 0\ ,$$

$$\iint [\alpha\, \sqcap(t,x) + \beta\, \wedge(t,x)]\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx\ +$$

$$\iint \alpha\ h_1^2(x,y)\ \varphi(0,x)\ dx\,dy\ +\ \iint \beta\ h_2^2(x,y)\ \varphi(0,x)\ dx\,dy\ \geqslant\ 0.$$

On fait maintenant successivement tendre β vers zero à $\alpha > 0$ fixé puis α vers zero à $\beta > 0$ fixé. Il vient les expressions (2.2.3) et (2.2.4) :

$$(2.2.3) \qquad \iint \sqcap(t,x)\ (\partial_t\varphi + a\ \partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx$$

$$+ \iint h_1^2(x,y)\ \varphi(0,x)\ dx\,dy\ \geqslant\ 0.$$

$$(2.2.4) \qquad \iint \Lambda(t,x)\,(\partial_t\varphi + b\,\partial_x\varphi)(t,x)\;dt\,dx + \iint h_2^2(x,y)\,\varphi(0,x)\;dx\,dy \;\geqslant\; 0\,.$$

2.3 Justification du modèle.

L'objet de ce paragraphe est d'aboutir au résultat suivant :

THEOREME 2.

Soit $(\,u_\varepsilon\,,\,v_\varepsilon\,)$ *une suite de solutions entropiques du système linéairement dégénéré* (0). *Soient* $U_r(t,x,y)$ *et* $V_r(t,x,y)$ *donnés respectivement en* $(2.1.0)$ *et* $(2.1.1)$. *Alors pour tout temps* t *avec* $t \geqslant 0$,

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\;\left\| U_\varepsilon(t,.) - U_r\Big(t,.,\frac{\chi_1(.-at)}{\varepsilon}\Big)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \qquad \textit{et}$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\;\left\| V_\varepsilon(t,.) - V_r\Big(t,.,\frac{\chi_2(.-bt)}{\varepsilon}\Big)\right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0\,.$$

Preuve.

On pose $z_\varepsilon(t,x) = U_\varepsilon(t,x) - U_r\big(t,x,\chi_1(x-at)/\varepsilon\big)$.

Pour tout temps t, on définit la mesure de Young (classique) $\nu_{t,.}$ associée à la suite $z_\varepsilon(t,.)$ via :

$$\forall f \in C^0(\mathbb{R})\,,\quad \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int f\big(U_\varepsilon(t,x)\big)\,\varphi(x)\;dx = \int <\nu_{t,x}, f(\lambda)>\;\varphi(x)\;dx\,.$$

Le théorème de convergence dominée fournit ensuite :

$$\forall f \in C^0(\mathbb{R})\,,\quad \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\iint f\big(U_\varepsilon(t,x)\big)\,\varphi(t,x)\;dt\,dx = \iint <\nu_{t,x}, f(\lambda)>\;\varphi(t,x)\;dt\,dx\,.$$

On introduit maintenant une définition : On dit que $f(t,x)$ appartient à $Lip_a(\mathbb{R}^+)$ si f est définie pour tout t à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$ avec $\sup_t \|\,f(t,.)\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ et si pour tout φ l'application qui à t fait correspondre $\psi_\varphi\big(f(t,.)\big) = \int f(t,x)\,\varphi(x-at)\;dx$ est lipschitzienne.

On peut maintenant énoncer la propriété de régularité suivante :

Lemme 2.1.

$$\forall f \in C^1(\mathbb{R}) \ , \quad < \nu_{t,x}, f(\lambda) > \in Lip_a(\mathbb{R}^+) \, .$$

Preuve.
Soit $s < t$, on a :

$$| \psi_\varphi(< \nu_{t,.} \, , f(\lambda) >) \; - \; \psi_\varphi(< \nu_{s,.} \, , f(\lambda) >) \, |$$

$$= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} \left[f\big(U_\varepsilon(t,x)\big) \, \varphi(x-at) \; - \; f\big(U_\varepsilon(s,x)\big) \, \varphi(x-as) \right] \; dx \right|$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{u=s}^{t} \partial_u \left[f\big(U_\varepsilon(u,x)\big) \, \varphi(x-au) \right] \; du \, dx \right|$$

mais,

$$\partial_u \left[f\big(U_\varepsilon(u,x)\big) \, \varphi(x-au) \right] \; =$$

$$\hat{f}\big(U_\varepsilon(u,x)\big) \, \partial_u U_\varepsilon(u,x) \, \varphi(x-au) \; - \; a \, f\big(U_\varepsilon(u,x)\big) \, \varphi'(x-au) \; =$$
$$- \; a \, \partial_x \left[f\big(U_\varepsilon(u,x)\big) \, \varphi(x-au) \right] \; + \; \mu_\varepsilon(u,x) \, .$$

avec pour tout u , $\mu_\varepsilon(u,.) \in M_b(\mathbb{R})$ défini comme suit :

$$\mu_\varepsilon(u,.) \; = \; - \, \hat{f}\big(U_\varepsilon(u,.)\big) \, \left[\varepsilon \, \partial_x q_1(U_\varepsilon, V_\varepsilon) \; + \; \frac{1}{\varepsilon} \, \partial_x R_1(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \right] \, \varphi(. - au)$$

Le premier terme est la dérivée d'une fonction à support compact et donne à ce titre une contribution nulle. On a donc :

$$| \psi_\varphi(< \nu_{t,.} \, , f(\lambda) >) \; - \; \psi_\varphi(< \nu_{s,.} \, , f(\lambda) >) \, | \; = \; \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{u=s}^{t} \mu_\varepsilon(u,x) \right|$$

$$\leqslant \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{u=s}^{t} | \, \mu_\varepsilon(u,.) \, | (\mathbb{R}) \; du \; \leqslant \; \Big(\sup_{s \leqslant u \leqslant t} | \, \mu_\varepsilon(u,.) \, | (\mathbb{R}) \Big) \; |t-s| \, .$$

Mais d'après les estimations déduites du schéma de Glimm, on dispose de $\sup_{s \leqslant u \leqslant t} | \, \mu_\varepsilon(u,.) \, | (\mathbb{R}) \; < \; \infty$. Le lemme 2.1 se trouve donc établi.

Le théorème 2 affirme que $z_\varepsilon(t,.)$ converge vers zero dans $L^1(\mathbb{R})$ fort, ce qui est équivalent pour tout t à la réduction à une masse de dirac de la mesure de young $\nu_{t,.}$ associée à $z_\varepsilon(t,.)$. C'est ce dernier point qui est établi.

Soit

$$\Delta = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int\int z_\varepsilon^2(t,x)\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx\,.$$

Par construction, on a donc :

$$\Delta = \int\int < \nu_{t,x}, \lambda^2 >\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx\,.$$

On développe maintenant $z_\varepsilon^2(t,x)$:

$$z_\varepsilon^2(t,x) = U_\varepsilon^2 - 2\,U_\varepsilon\,U_r\big(t,x,\chi_1(x-at)/\varepsilon\big) + U_r^2\big(t,x,\chi_1(x-at)/\varepsilon\big)\,.$$

On teste cette expression contre $\varphi(t,x)$. La fonction $U_r(t,x,y)$ ayant tout d'abord été définie page 5 comme étant le profil associé à la suite $\{U_\varepsilon\}_\varepsilon$, on obtient par passage à la limite lorsque ε tend vers zero :

$$\Delta = \int\int \left\{ \sqcap(t,x) - \int_0^1 U_r^2(t,x,y)\,dy \right\}\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx\,.$$

En multipliant (2.1.0) par $U_r(t,x,y)$, on a :

$$(2.3.0)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(\partial_t + a\,\partial_x)\,U_r^2 + \frac{c_2}{2}\,\bar{V}(t,x)\ \chi_1'(x-at)\ \partial_y U_r^2 = 0\,. \\ &U_r^2(0,x,y) = h_1^2(x,y)\,. \end{aligned} \right.$$

En particulier $\int_0^1 U_r^2(t,x,y)\,dy$ est solution de :

$$(2.3.1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &(\partial_t + a\,\partial_x) \int_0^1 U_r^2(t,x,y)\ dy = 0\,. \\ &\int_0^1 U_r^2(0,x,y)\ dy = \int_0^1 h_1^2(x,y)\ dy\,. \end{aligned} \right.$$

Soit encore, pour toute φ régulière :

$$-\int\int_{\mathbb{R}_+^2} \int_0^1 U_r^2(t,x,y)\,(\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)\,(t,x)\ dt\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 h_1^2(x,y)\ \varphi(0,x)\ dx\,dy\,.$$

Δ s'écrit donc sous la forme :

$$\Delta = \int\int_{\mathbb{R}_+^2} \sqcap(t,x)\ (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\ dt\,dx + \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 h_1^2(x,y)\ \varphi(0,x)\ dx\,dy\,.$$

On remarque que pour φ régulière et positive, Δ figure l'expression qui a été obtenue en (2.2.3) après passage à la limite dans des inégalités entropiques écrites pour le couple $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$.

On en déduit que $\Delta \geqslant 0$. Soit encore, pour toute φ régulière et positive,

$$\Delta = \iint < \nu_{t,x} , \lambda^2 > \; (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\; dt\, dx \;\geqslant\; 0 .$$

Le lemme 2.1 et l'inégalité précédante garantissent les hypothèses du lemme 2.2 ci-dessous pour le choix de $f(t,x) \;=< \nu_{t,x}, \lambda^2 >$. On a donc $< \nu_{t,x}, \lambda^2 >= 0$ (ou $\nu_{t,x} = \delta_0$ avec δ_0 la masse de Dirac à l'origine) pour presque tout x à t fixé, ce qui est équivalent à la convergence forte escomptée.

Reste maintenant à établir :

Lemme 2.2.

Soit $f(t,x)$ dans $Lip_a(\mathbb{R}^+)$, positive et satisfaisant :

Pour toute fonction test $\varphi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ positive,

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(t,x)\; (\partial_t\varphi + a\,\partial_x\varphi)(t,x)\;\; dt\,dx \;\geqslant\; 0 . \tag{2.3.2}$$

Alors, pour tout t, $f(t,x) = 0$ pour presque tout x dans $\mathbb{R}$.

Preuve.

Soit χ une fonction de classe C^∞, positive, à support compact et d'intégrale un. On pose $\chi_\mu(x) = (1/\mu)\; \chi(x/\mu)$.

Soit t_0 fixé et x_0 un point de Lebesgue de $f(t_0,.)$. L'ensemble de ces points admet dans $\mathbb{R}$ un complémentaire de mesure nulle et on a en x_0 :

$$f(t_0, x_0) \;=\; \lim_{\mu \longrightarrow 0} \; \big(f(t_0,.) * \chi_\mu(.)\big)(x_0).$$

On pose $H_\delta^{t_0}(t) = \int_t^\infty \chi_\delta(s - t_0)\; ds$ et on écrit (2.3.2) avec le choix particulier de $\varphi(t,x) = H_\delta^{t_0}(t)\; \chi_\mu\big(x - x_0 - a\,(t - t_0)\big)$, on obtient :

$$(2.3.3)_{\mu,\delta} \qquad \int \left\{ \int f(t,x)\;\, \chi_\mu\big(x - x_0 - a\,(t-t_0)\big)\; dx \right\}\; \chi_\delta(t - t_0)\; dt \;\leqslant\; 0 .$$

L'hypothèse de régularité $Lip_a(\mathbb{R}^+)$ sur f permet de passer à la limite lorsque δ tend vers zero ce qui conduit à :

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \; (2.3.3)_{\mu,\delta} \;=\; (2.3.3)_{\mu,0} \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(t_0,x)\; \chi_\mu(x - x_0)\;\; dx \;\leqslant\; 0 .$$

On fait finalement tendre μ vers zero pour obtenir : $0 \leqslant f(t_0, x_0) \leqslant 0$.

3 . Le cas vraiment non linéaire

Dans ce chapitre, on fait l'hypothèse de non linéarité :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(0,0) = c_1 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}(0,0) = d_1 \neq 0 .$$

3.1 Equations de propagation dans les variables rapides.

La démarche du chapitre 2.1 (faire tendre ε vers zero dans les équations de propagation écrites au sens faible) s'applique et conduit à :

$$(3.1.0) \qquad (\partial_t + a\,\partial_x)\,U_r(t,x,y) \;+\; (c_1/2)\;\chi_1'(x-at)\;\partial_y\;< \nu^1_{t,x,y}\,,\lambda^2 >$$
$$+\; c_2\;\bar V(t,x)\;\chi_1'(x-at)\;\partial_y U_r(t,x,y) \;=\; 0 .$$

Le modèle naturel qui décrit le profil oscillant associé à $U_\varepsilon(t,x)$ s'obtient par remplacement du terme à priori inconu $< \nu^1_{t,x,y}\,,\lambda^2 >$ par $U^2(t,x,y)$. De manière à gagner l'unicité, on ajoute à (3.1.0) la famille des inéquations entropiques associée. Soit donc désormais $U(t,x,y)$ et $V(t,x,y)$ les solutions entropiques des lois de Burgers suivantes :

$$(3.1.1) \qquad \begin{cases} (\partial_t + a\,\partial_x)\,U(t,x,y) + \dfrac{c_1}{2}\;\chi_1'(x-at)\;\partial_y U^2(t,x,y) \\ \qquad\qquad + \; c_2\;\bar V(t,x)\;\chi_1'(x-at)\;\partial_y U(t,x,y) \;=\; 0 . \\ U(0,x,y) \;=\; h_1(x,y) . \end{cases}$$

$$(3.1.2) \qquad \begin{cases} (\partial_t + b\,\partial_x)\,V(t,x,y) + \dfrac{d_1}{2}\;\chi_2'(x-bt)\;\partial_y V^2(t,x,y) \\ \qquad\qquad + \; d_2\;\bar U(t,x)\;\chi_2'(x-bt)\;\partial_y V(t,x,y) \;=\; 0 . \\ V(0,x,y) \;=\; h_2(x,y) . \end{cases}$$

Pour établir la pertinence du modèle donné en (3.1.1) et (3.1.2), le point important nouveau est le défaut de régularité (par exemple continuité) de $U(t,x,y)$ $\big($resp $V(t,x,y)\big)$ solution de (3.1.1) $\big($resp (3.1.2)$\big)$. Par conséquent, les identités qui ont été écrites en (2.3.0) et (2.3.1) dans le cas de la dégénerescence linéaire ne sont plus valables. Pour aller plus en avant, il faut introduire une famille plus large (à caractère local plus affirmé) de couples (entropie , flux d'entropie) que celle considérée en 2.2. Ce travail fait l'objet du paragraphe qui suit.

3.2 Entropie , flux d'entropie.

Soit $\big(\bar{\eta}_\varepsilon(u,v) = \eta_\varepsilon(u/\varepsilon, v/\varepsilon)\,,\ \bar{q}_\varepsilon(u,v) = q_\varepsilon(u/\varepsilon, v/\varepsilon)\big)$ une famille de couples (entropie , flux d'entropie). $\eta_\varepsilon(u,v)$ et $q_\varepsilon(u,v)$ sont donc liés par :

$$(3.2.0) \qquad \nabla\eta_\varepsilon(u,v)\,.\,f'(\varepsilon\, u, \varepsilon\, v) = \nabla q_\varepsilon(u,v)\,.$$

La résolution de (3.2.0) repose sur la relation de compatibilité nécessaire et suffisante suivante imposée à η_ε :

$$(3.2.1) \qquad \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\Big)(\varepsilon\, u, \varepsilon\, v)\, \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(\varepsilon\, u, \varepsilon\, v)\, \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial v^2}(u,v) - \frac{\partial f_1}{\partial v}(\varepsilon\, u, \varepsilon\, v)\, \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial u^2}(u,v) = 0\,.$$

Ce qui se note encore : $\quad P_\varepsilon(u,v,D_u,D_v)\,\eta_\varepsilon(u,v) = 0\,.$

Soit $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ paire, positive, à support dans $\{\,x\,,\ |x| \leqslant 1\,\}$ et d'intégrale un. Pour $\delta > 0$, on note $\chi_\delta(x)$ pour $(1/\delta)\,\chi(x/\delta)$. On construit $\eta_{\,k,\delta}(x) = \big(|.-k| * \chi_\delta(.)\big)(x)$. Pour tout couple (k,δ) choisi dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, $\eta_{\,k,\delta}(.)$ est une fonction convexe. Pour μ dans l'intervalle $]0,1]$, on pose $\eta_{\,k,\delta,\mu}(\lambda) = \eta_{\,k,\delta}(\lambda) + \mu\,\lambda^2$ de manière à ce que la fonction $\eta_{\,k,\delta,\mu}(.)$ soit strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

On note $B(0,r)$ la boule centrée au point $(u,v) = (0,0)$ et de rayon r.

Lemme 3.1.
Pour tout quadruplet (k,δ,r,μ) de $\mathbb{R}\times{\mathbb{R}_+^*}^3$, il existe $\varepsilon_{k,\delta,r,\mu} > 0$ tel que pour tout ε pris dans l'intervalle $]0,\varepsilon_{k,\delta,r,\mu}]$, (3.2.1) admette une solution $\eta_\varepsilon(u,v)$ strictement convexe dans $B(0,r)$. $\eta_\varepsilon(u,v)$ est associée à un flux $q_\varepsilon(u,v)$ et on dispose des développements limités suivants :

$$(3.2.2) \qquad \eta_\varepsilon(u,v) = \eta_{\,k,\delta,\mu}(u) + \varepsilon\,\eta^1(u,v) + \bigcirc(\varepsilon^2) \ \text{ dans } L^\infty\big(B(0,r)\big)\,.$$

$$(3.2.3) \qquad q_\varepsilon(u,v) = a\,\eta_{\,k,\delta,\mu}(u) + \varepsilon\,q^1(u,v) + \bigcirc(\varepsilon^2) \ \text{ dans } L^\infty\big(B(0,r)\big)\,.$$

Enfin, on a :

$$(3.2.4) \qquad (-a\,\eta_\varepsilon + q_\varepsilon)(u,v) = \varepsilon\,\big[c_1\, G_{k,\delta,\mu}(u) + c_2\, v\,\eta_{\,k,\delta,\mu}(u) + (b-a)\,e\,v^2\big] + \bigcirc(\varepsilon^2) \ \text{ dans } L^\infty\big(B(0,r)\big)\,.$$

e désigne un paramètre à ajuster et $G_{k,\delta,\mu}(u)$ est déterminé par :

$$G_{k,\delta,\mu}(u) = u\,\eta_{\,k,\delta,\mu}(u) - \int_k^u \eta_{\,k,\delta,\mu}(t)\,dt\,.$$

Preuve.

On se fixe e avec :

(3.2.5) $\qquad e > (1 + 2r)\,|\,c_3/2(a-b)\,|\,.$

On choisit ensuite $\eta^1(u,v)$ satisfaisant :

$$(3.2.6) \qquad \frac{\partial \eta^1}{\partial v}(u,v) = \frac{c_2}{a-b}\left[u\,\frac{\partial \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u}(u) - \eta_{k,\delta,\mu}(u)\right] + \frac{c_3\,v}{a-b}\,\frac{\partial \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u}(u) + 2\,e\,v\,.$$

On recherche une solution $\eta_\varepsilon(u,v)$ de (3.2.1) sous la forme :

$$\eta_\varepsilon(u,v) = \eta_{k,\delta,\mu}(u) + \varepsilon\,\eta^1(u,v) + \varepsilon^2\,\eta^2_\varepsilon(u,v)\,.$$

Compte tenu de (3.2.6), (3.2.1) se traduit par la condition de compatibilité suivante pour $\eta^2_\varepsilon(u,v)$:

$$(3.2.7) \qquad P_\varepsilon(u,v,D_u,D_v)\,\eta^2_\varepsilon(u,v) = g_\varepsilon(u,v)\,.$$

$g_\varepsilon(u,v)$ s'exprime de manière explicite en fonction de ε et des données $\eta_{k,\delta,\mu}(u)$ et $\eta^1(u,v)$. On retient que $g_\varepsilon(u,v)$ et ses dérivées à tout ordre sont uniformément bornés par rapport à ε sur $B(0,r)$.

Comme $\partial_v f_1(0,0) = \partial_u f_2(0,0) = 0$, P_ε se présente, pour ε petit, comme une perturbation (régulière) de l'opérateur différentiel à coefficients constants $(a-b)\,\partial^2_{uv}$. En particulier, il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout ε pris dans $[0,\varepsilon_1]$, P_ε soit strictement hyperbolique dans $B(0,r)$ par rapport aux droites $u+v = c$.

(3.2.7) associé à des conditions initiales nulles sur $u+v=0$ admet dès lors une solution $\eta^2_\varepsilon(u,v)$ dans $B(0,r)$. Qui plus est, les inégalités d'énergie pour les opérateurs différentiels de type strictement hyperbolique associées au contrôle dont on dispose sur le terme inhomogène $g_\varepsilon(u,v)$ et ses dérivées permet de borner dans $L^\infty\big(B(0,r)\big)$ uniformément par rapport à ε les dérivées d'ordre inférieur ou égal à deux de $\eta^2_\varepsilon(u,v)$.

Le développement limité (3.2.2) se trouve donc justifié.

De plus, la matrice hessienne de $\eta_\varepsilon(u,v)$ est :

$$H(u,v) = \begin{pmatrix} \partial^2_{uu}\eta_{k,\delta,\mu} + \varepsilon\,\partial^2_{uu}\eta^1 + \varepsilon^2\,\partial^2_{uu}\eta^2_\varepsilon & \varepsilon\,\partial^2_{uv}\eta^1 + \varepsilon^2\,\partial^2_{uv}\eta^2_\varepsilon \\ \varepsilon\,\partial^2_{uv}\eta^1 + \varepsilon^2\,\partial^2_{uv}\eta^2_\varepsilon & \varepsilon\,\partial^2_{vv}\eta^1 + \varepsilon^2\,\partial^2_{vv}\eta^2_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

$H(u,v)$ est définie positive sur $B(0,r)$ si les conditions (3.2.8) et (3.2.9) ci-après sont satisfaites :

$$(3.2.8) \qquad \frac{\partial^2 \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial u^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta^2_\varepsilon}{\partial u^2} > 0 \qquad \forall\,(u,v) \in B(0,r).$$

$$(3.2.9) \qquad \det H > 0 \qquad \forall\,(u,v) \in B(0,r).$$

Les dérivées d'ordre deux de η^2_ε étant bornées dans $L^\infty\big(B(0,r)\big)$, (3.2.8) et (3.2.9) s'écrivent pour ε petit ($\varepsilon \leqslant \varepsilon_{k,\delta,r,\mu}$) :

$$(3.2.10) \qquad \frac{\partial^2 \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u^2}(u) > 0 \qquad \forall\, u \in [-r,r].$$

$$(3.2.11) \qquad \frac{\partial^2 \eta^1}{\partial v^2}(u,v) > 0 \qquad \forall\,(u,v) \in B(0,r).$$

(3.2.10) est garanti par la stricte convexité de $\eta_{k,\delta,\mu}(.)$.

(3.2.11) s'écrit, compte tenu de la relation (3.2.6) :

$$(3.2.12) \qquad \frac{c_3}{a-b}\left[\frac{\partial \eta_{k,\delta}}{\partial u}(u) + 2\mu u\right] + 2e > 0.$$

Mais $\partial_u \eta_{k,\delta}(u)$ est la convolée d'une fonction d'heaviside et de $\chi_\delta(.)$. Par conséquent, $|\partial_u \eta_{k,\delta}(.)| \leqslant 1$ et (3.2.12) se déduit de (3.2.5).

On recherche enfin $q_\varepsilon(u,v)$ sous la forme :

$$q_\varepsilon(u,v) = a\,\eta_{k,\delta,\mu}(u) + \varepsilon\, q^1(u,v) + \varepsilon^2\, q^2_\varepsilon(u,v).$$

$q_\varepsilon(u,v)$ doit satisfaire l'équation d'entropie, à savoir :

$$(3.2.13) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f_1}{\partial u}(\varepsilon u, \varepsilon v)\dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f_2}{\partial u}(\varepsilon u, \varepsilon v)\dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial v}(u,v). \\ \dfrac{\partial q_\varepsilon}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial f_1}{\partial v}(\varepsilon u, \varepsilon v)\dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}(\varepsilon u, \varepsilon v)\dfrac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial v}(u,v). \end{cases}$$

Compte tenu de la condition (3.2.1) (ou (3.2.7)) qui est maintenant satisfaite pour le choix du $\eta^2_\varepsilon(u,v)$ construit précédemment, le système (3.2.13) admet une solution $q_\varepsilon(u,v)$ dans $B(0,r)$. De plus, le développement limité en puissance de ε de $q_\varepsilon(u,v)$ présente un terme d'ordre deux $q^2_\varepsilon(u,v)$ borné dans $L^\infty\big(B(0,r)\big)$ lorsque ε varie et un terme d'ordre un $q^1(u,v)$ qui satisfait les conditions (3.2.14) et (3.2.15) (déduites de (3.2.13)) ci-dessous :

$$(3.2.14) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(-a\,\eta^1 + q^1)(u,v) = (c_1 u + c_2 v)\,\frac{\partial \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u}.$$

$$(3.2.15) \qquad \frac{\partial}{\partial v}(-b\,\eta^1 + q^1)(u,v) = (c_2 u + c_3 v)\,\frac{\partial \eta_{k,\delta,\mu}}{\partial u}.$$

D'après (3.2.14),
$(-a\eta^1 + q^1)(u,v) = c_1 G_{k,\delta,\mu}(u) + c_2 v \eta_{k,\delta,\mu}(u) + L(v)$.

D'après (3.2.6) et (3.2.15), $L(v)$ doit satisfaire : $L'(v) = 2(b-a)e v$. Le développement limité (3.2.4) s'en déduit.

3.3 Justification des équations de propagation.

L'objet de ce paragraphe est d'aboutir au résultat suivant :

THEOREME 3.

Soit $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ une suite de solutions entropiques du système vraiment non linéaire (0). Soient $U(t,x,y)$ et $V(t,x,y)$ les solutions entropiques des lois de Burgers (3.1.1) et (3.1.2). A t fixé, $U(t,.,.)$ et $V(t,.,.)$ sont dans $BV(\mathbb{R}\times\mathbb{T})$. Elles sont donc définies par leur valeur moyenne (voir [13]) en dehors d'un ensemble de H^1 mesure de Hausdorff nul et donc en particulier presque partout en restriction à l'hypersurface S_ε^t d'équation $S_\varepsilon^t = \{(x,\theta),\ \theta = \chi_1(x-at)/\varepsilon\}$. La substitution de $\chi_1(x-at)/\varepsilon$ (resp $\chi_2(x-bt)/\varepsilon$) à y dans $U(t,x,y)$ (resp $V(t,x,y)$) a donc un sens et on a pour tout temps t avec $t \geqslant 0$:

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \left\| U_\varepsilon(t,.) - U\Big(t,.,\frac{\chi_1(.-at)}{\varepsilon}\Big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0 \qquad \text{et}$$

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \left\| V_\varepsilon(t,.) - V\Big(t,.,\frac{\chi_2(.-bt)}{\varepsilon}\Big) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Preuve.

On écrit que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ est solution entropique de (0) pour le couple (entropie, flux d'entropie) calculé au paragraphe précédant.

Soit $r > \sup_{\varepsilon\in[0,1]} \Big(\| U_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} + \| V_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R}_+^2)} \Big)$.

Soit χ_1' une abréviation pour $\chi_1'(x-at)$.

On obtient : Pour tout ε pris dans l'intervalle $]0,\varepsilon_{k,\delta,r,\mu}]$, pour toute fonction $\varphi(t,x,y)$ positive, à support compact en les deux premières variables et périodique de période un par rapport à la troisième variable,

$$\iint \bar\eta_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\ \partial_t \left\{ \varphi\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big) \right\} dt\,dx\ +$$

$$\iint \bar q_\varepsilon(u_\varepsilon,v_\varepsilon)\ \partial_x \left\{ \varphi\Big(t,x,\frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big) \right\} dt\,dx\ +$$

$$\int \bar\eta_\varepsilon\Big(\varepsilon h_1\Big(x,\frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big), \varepsilon h_2\Big(x,\frac{\chi_2(x)}{\varepsilon}\Big)\Big)\ \varphi\Big(0,x,\frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big)\, dx \ \geqslant\ 0.$$

Soit encore,

$$\iint \eta_\varepsilon(U_\varepsilon, V_\varepsilon)\ \partial_t\varphi\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big)\ dt\,dx\ +$$

$$\iint q_\varepsilon(U_\varepsilon, V_\varepsilon)\ \partial_x\varphi\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big)\ dt\,dx\ +$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\iint [-\,a\,\eta_\varepsilon(U_\varepsilon, V_\varepsilon) + q_\varepsilon(U_\varepsilon, V_\varepsilon)]\ \chi_1'\ \partial_y\varphi\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big)\ dt\,dx\ +$$

$$\int \eta_\varepsilon\Big(h_1\Big(x, \frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big), h_2\Big(x, \frac{\chi_2(x)}{\varepsilon}\Big)\Big)\ \varphi\Big(0, x, \frac{\chi_1(x)}{\varepsilon}\Big)\ dx\ \geqslant\ 0\,.$$

On fait tendre ε vers zero à (k, δ, r, μ) fixé. Compte tenu de (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) et d'arguments de compacité par compensation analogues à ceux développés au chapitre 2, on obtient à la limite :

$$\iiint <\nu^1_{t,x,y}\,, \eta_{\,k,\delta,\mu}(\lambda)>\ (\partial_t + a\,\partial_x)\,\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy\ +$$

$$\iiint <\nu^1_{t,x,y}\,, c_1\,G_{k,\delta,\mu}(\lambda) + (b-a)\,e\,\wedge(t, x)>\ \chi_1'\ \partial_y\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy$$

$$+\ \iiint <\nu^1_{t,x,y}\,, c_2\,\bar{V}(t, x)\ \eta_{\,k,\delta,\mu}(\lambda)>\ \chi_1'\ \partial_y\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy$$

$$+\ \iint \eta_{\,k,\delta,\mu}(h_1(x, y))\ \varphi(0, x, y)\ dx\,dy\ \geqslant\ 0\,.$$

Le terme $\iiint (b-a)\,e\,\wedge(t, x)\ \chi_1'\ \partial_y\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy$ donne une contribution nulle car à (t, x) fixé, il s'agit de l'intégrale sur le tore de la dérivée d'une fonction périodique.

Par ailleurs, pour tout (t, x, y), $\nu^1_{t,x,y}$ est une mesure supportée dans $B(0, r)$, domaine sur lequel $\eta_{\,k,\delta,\mu}(.)$ converge uniformément lorsque μ tend vers zero vers $\eta_{k,\delta}(.)$. Par passage à la limite $(\mu \longrightarrow 0)$, on a donc :

(3.3.0) $$\iiint <\nu^1_{t,x,y}\,, \eta_{\,k,\delta}(\lambda)>\ (\partial_t + a\,\partial_x)\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy\ +$$

$$\iiint <\nu^1_{t,x,y}\,, c_1\,G_{k,\delta}(\lambda) + c_2\,\bar{V}(t, x)\,\eta_{\,k,\delta}(\lambda)>\ \chi_1'\ \partial_y\varphi(t, x, y)\ dt\,dx\,dy$$

$$+\ \iint \eta_{k,\delta}(h_1(x, y))\ \varphi(0, x, y)\ dx\,dy\ \geqslant\ 0\,.$$

avec $G_{k,\delta}(u) = u\,\eta_{\,k,\delta}(u) - \int_k^u \eta_{k,\delta}(t)\,dt$.

Soit $A(t,x) = \int_y < \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)| > dy$. On exploite l'inégalité (3.3.0) en démontrant :

Lemme 3.2.

$A(t,x)$ satisfait l'inéquation de propagation suivante :

$$(3.3.1) \qquad (\partial_t + a\,\partial_x)\, A(t,x) \leqslant 0\,.$$

Preuve.

La preuve rigoureuse necessite de nombreuses régularisations. Pour simplifier, on donne tout d'abord l'idée "formelle" de la démonstration :

En faisant tendre δ vers zero dans (3.3.0), on a la formulation faible des inéquations suivantes : Pour tout k dans $\mathbb{R}$,

$$(3.3.2) \qquad \begin{aligned} &< (\partial_t + a\,\partial_x)\, \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - k| > + \\ &\qquad (c_1/2)\, \chi_1' < \partial_y\, \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - k|\,(\lambda + k) > + \\ &\qquad c_2\, \chi_1'\, \bar{V}(t,x) < \partial_y\, \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - k| > \leqslant 0\,. \end{aligned}$$

On rappelle que $U(t,x,y)$ est solution entropique de (3.1.1) associée au flux $|U - \lambda|$. Soit, pour tout λ dans $\mathbb{R}$,

$$(3.3.3) \qquad \begin{aligned} &(\partial_t + a\,\partial_x)\,|U - \lambda| \\ &+ (c_1/2)\, \chi_1'\, \partial_y\big(|U - \lambda|\,(U + \lambda)\big) + c_2\, \chi_1'\, \bar{V}(t,x)\, \partial_y |U - \lambda| \leqslant 0\,. \end{aligned}$$

On a par ailleurs :

$$\begin{aligned} (\partial_t + a\,\partial_x) \int_y < \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)| > dy = \\ \int_y < (\partial_t + a\,\partial_x)\, \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)| > dy + \\ \int_y < \nu^1_{t,x,y} \, , (\partial_t + a\,\partial_x)\, |\lambda - U(t,x,y)| > dy\,. \end{aligned}$$

On fait le choix de $k = U(t,x,y)$ dans (3.3.2). On profite ensuite de la positivité de la mesure $\nu^1_{t,x,y}$ pour l'intégrer contre l'inégalité (3.3.3). Enfin, on substitue les deux quantités obtenues dans le membre de droite de l'expression précédante. On obtient :

$$\begin{aligned} &(\partial_t + a\,\partial_x) \int_y < \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)| > dy \leqslant \\ &\quad - (c_1/2) \int_y \chi_1'\, \partial_y \left[< \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)|\,\big(\lambda + U(t,x,y)\big) >\right] dy \\ &\quad - c_2\, \bar{V}(t,x) \int_y \chi_1'\, \partial_y \left[< \nu^1_{t,x,y} \, , |\lambda - U(t,x,y)| >\right] dy\,. \end{aligned}$$

Le terme de droite se présente comme l'intégrale sur le tore de la dérivée d'une fonction périodique et fournit à ce titre une contribution nulle. Le lemme 3.2 se trouve donc "formellement" établi.

On donne maintenant les éléments pour une preuve plus rigoureuse. Soit :

$$T_{k,\delta}(\lambda) = \lambda\,\eta_{k,\delta}(\lambda) - \int_k^\lambda \eta_{k,\delta}(t)\,dt - \Big(\chi_\delta(.) * \big(\frac{1}{2}\,|.-k|(.+k)\big)\Big)(\lambda).$$

On remarque que $T_{k,\delta}(.)$ converge uniformément sur tout compact vers zero lorsque δ tend vers zero.

Soit $\nu^\delta_{t,x,y}(\lambda) = (\nu^1_{t,x,y} * \chi_\delta)(\lambda) = < \nu^1_{t,x,y}(.)\,, \chi_\delta(\lambda - .) >$.

A (t,x,y) fixé, $\nu^\delta_{t,x,y}(.)$ vit dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Soit $d\tau'$ et $d\tau$ des abréviations respectivement pour les mesures de Lebesgue $dt'\,dx'\,dy'\,d\lambda$ et $dt\,dx\,dy\,d\lambda$.

(3.3.0) s'écrit encore :

$$(3.3.4) \qquad \iiiint \nu^\delta_{t',x',y'}(\lambda)\ |\lambda-k|\ (\partial_{t'} + a\,\partial_{x'})\ \varphi(t',x',y')\ d\tau'\ +$$

$$\iiiint \nu^\delta_{t',x',y'}(\lambda)\Big(\frac{c_1}{2}\,|\lambda-k|\,(\lambda+k) + c_2\,\bar V(t',x')\,|\lambda-k|\Big)\ \chi_1'\ \partial_{y'}\varphi\ \ d\tau'\ +$$

$$\iiint < \nu^1_{t',x',y'}, c_1\,T_{k,\delta}(\lambda) >\ \chi_1'\ \partial_{y'}\varphi(t',x',y')\ d\tau'\ +$$

$$\iint \eta_{k,\delta}\big(h_1(x',y')\big)\ \varphi(0,x',y')\ dx'\,dy'\ \geqslant\ 0\,.$$

Soit $\chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(t',x',y') = (1/\mu^2\mu')\ \chi(t-t'/\mu)\ \chi(x-x'/\mu)\ \chi(y-y'/\mu')$.

et $\quad \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda) = \iiint \nu^\delta_{t',x',y'}(\lambda)\ \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(t',x',y')\ dt'\,dx'\,dy'$.

La positivité de $\nu^\delta_{t',x',y'}$ implique $\nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda) \geqslant 0$.

De plus $\nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)$ est une fonction C^∞ de ses arguments.

Soit enfin :

$$H_1^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) = \iiiint \frac{c_1}{2}\ |\lambda-k|\,(\lambda+k)\,\big(\chi_1'(x'-at') - \chi_1'(x-at)\big)$$

$$\cdot\ \nu^\delta_{t',x',y'}(\lambda)\ \big(\partial_{y'}\chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}\big)(t',x',y')\ d\tau'$$

$$+ \iiiint c_2\,|\lambda-k|\,\big(\bar V(t',x')\,\chi_1'(x'-at') - \bar V(t,x)\,\chi_1'(x-at)\big)$$

$$\cdot\ \nu^\delta_{t',x',y'}(\lambda)\ \big(\partial_{y'}\chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}\big)(t',x',y')\ d\tau'\,.$$

$$H_2^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) = \iiint < \nu^1_{t',x',y'}, c_1\, T_{k,\delta}(\lambda) > \chi_1'(x'-at')$$

$$. \left(\partial_{y'} \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}\right)(t',x',y')\ dt'\, dx'\, dy'$$

(3.3.4) écrit avec le choix de $\varphi(t',x',y') = \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(t',x',y')$ donne :

Pour tout (t,x,y) dans $\mathbb{R}^2_+ \times \mathbb{T}$ et k dans $\mathbb{R}$,

$$(3.3.5) \qquad -\int (\partial_t + a\partial_x)\, \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ |\lambda - k|\ d\lambda$$

$$-\int \partial_y \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ \left(\frac{c_1}{2}|\lambda-k|(\lambda+k) + c_2\, \bar{V}(t,x)\, |\lambda-k|\right)\ \chi_1'\ d\lambda$$

$$+ \iint \eta_{k,\delta}(h_1(x',y'))\, \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(0,x',y')\ dx'\, dy'$$

$$+ H_1^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) + H_2^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) \geqslant 0\,.$$

Soit $\varphi(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2_+)$, positive. On note $(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'}$ l'expression :

$$(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'} = \iiiint \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ |\lambda - U(t,x,y)|\, (\partial_t + a\partial_x)\varphi\ d\tau$$

Une intégration par parties de $(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'}$ conduit à :

$$(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'} = -\iiiint (\partial_t + a\partial_x)\, \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ |\lambda - U(t,x,y)|\ \varphi\ d\tau$$

$$-\iint < (\partial_t + a\partial_x)\, |\lambda - U(t,x,y)|\,,\ \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\, \varphi(t,x) >_{D'\times D}\ dy\, d\lambda\,.$$

On teste (3.3.5) avec le choix de $k = U(t,x,y)$ contre $\varphi(t,x)$ puis on intègre en (t,x,y), on obtient :

$$(3.3.7) \quad -\iiiint (\partial_t + a\partial_x)\, \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ |\lambda - U(t,x,y)|\ \varphi(t,x)\ d\tau \geqslant$$

$$\iiiint \left(\frac{c_1}{2}\, |\lambda - U(t,x,y)|\big(\lambda + U(t,x,y)\big) + c_2\, \bar{V}(t,x)\, |\lambda - U(t,x,y)|\right)$$

$$. \partial_y \nu^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y,\lambda)\ \chi_1'\ \varphi(t,x)\ d\tau$$

$$-\iiint \left(H_1^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) + H_2^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y)\right) \varphi(t,x)\ dt\, dx\, dy$$

$$- \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \eta_{U(t,x,y),\delta}\big(h_1(x',y')\big)\ \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(0,x',y')\ dx'\,dy'\,dt\,dx\,dy$$

On exprime que $U(t,x,y)$ est solution entropique de la loi de conservation (3.1.1) en testant (3.3.3) contre la fonction test $\nu^{\delta,\mu,\mu'}(.,.,.,\lambda)\varphi(.,.)$ puis on intégre en λ, il vient :

$$(3.3.8) \qquad -\int\!\!\int < (\partial_t + a\partial_x)\,|\lambda - U(.,.,y)|, \nu^{\delta,\mu,\mu'}(.)\,\varphi(.) >_{D'\times D}\ dy\,d\lambda \geqslant$$

$$\int\!\!\int < \frac{c_1}{2}\,\partial_y\big(|\lambda - U|\,(\lambda + U)\big)\,,\ \nu^{\delta,\mu,\mu'}(.,.,.,\lambda)\,\varphi(.,.) >_{D'\times D}\ \chi_1'\ dy\,d\lambda$$

$$+ \int\!\!\int < c_2\,\bar{V}(t,x)\,\partial_y|\lambda - U|\,,\ \nu^{\delta,\mu,\mu'}(.,.,.,\lambda)\,\varphi(.,.) >_{D'\times D}\ \chi_1'\ dy\,d\lambda$$

Finalement, après sommation de (3.3.7) et (3.3.8), on a :

$$\begin{aligned}(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'} \ \geqslant\ & - \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \partial_y\Big(\frac{c_1}{2}\,|\lambda - U|\,(\lambda + U)\ \nu^{\delta,\mu,\mu'}(.)\Big)\ \varphi(t,x)\ d\tau \\ & - \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \partial_y\Big(c_2\,\bar{V}(t,x)\,|\lambda - U|\ \nu^{\delta,\mu,\mu'}(.)\Big)\ \varphi(t,x)\ d\tau \\ & - \int\!\!\int\!\!\int \big(H_1^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y) + H_2^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y)\big)\,\varphi(t,x)\ dt\,dx\,dy \\ & - \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \eta_{U(t,x,y),\delta}\big(h_1(x',y')\big)\ \chi^{t,x,y}_{\mu,\mu'}(0,x',y')\ dx'\,dy'\,dt\,dx\,dy\end{aligned}$$

Les deux premiers termes du membre de droite de l'inégalité précédante donnent une contribution nulle.

On fait tendre δ vers zero, $\int\!\int\!\int H_2^{\delta,\mu,\mu'}(t,x,y)\ dt\,dx\,dy$ s'élimine.

On fait tendre μ vers zero, $\int\!\int\!\int H_1^{0,\mu,\mu'}(t,x,y)\ dt\,dx\,dy$ disparaît.

On fait finalement tendre μ' vers zero, le terme correspondant à la condition aux limites s'en va.

La manipulation ($\delta \longrightarrow 0$ puis $\mu \longrightarrow 0$ puis $\mu' \longrightarrow 0$) fait converger le membre de gauche $(3.3.6)_{\delta,\mu,\mu'}$ vers $(3.3.6)_{0,0,0}$, c'est à dire vers une inéquation intégrale qui est la formulation faible de (3.3.1).

Le lemme 3.2 se trouve donc établi.

Soit $U_l \in C_0^0(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ (fonction continue et à support compact en la première variable). $\varphi(.) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\| \varphi \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1$.

La régularité $BV(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ de $U(t,.,.)$ à t fixé permet de donner un sens (se reporter à [3] et [13]) à la trace bilatère (moyenne symétrique) de $U(t,x,y)$ sur S_ε^t (courbe de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ définie au théorème 3). On peut donc considérer à t fixé les quantités :

$$(3.3.9)_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left| U_l\Big(x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big) \;-\; U\Big(t,x,\frac{\chi_1(x\,-\,at)}{\varepsilon}\Big) \right| \;\varphi(x)\; dx\,.$$

$$(3.3.10)_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left| U_\varepsilon(t,x) \;-\; U\Big(t,x,\frac{\chi_1(x\,-\,at)}{\varepsilon}\Big) \right| \;\varphi(x)\; dx\,.$$

On poursuit maintenant la démonstration du théorème 3 en établissant :

Lemme 3.3.

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\; (3.3.9)_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} |U_l(x,y) \;-\; U(t,x,y)| \;\varphi(x)\;\; dx\, dy\,.$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}\; (3.3.10)_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} <\nu^1_{t,x,y}, |\lambda \;-\; U(t,x,y)| > \;\varphi(x)\;\; dx\, dy\,.$$

Preuve.

On commence par calculer $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} (3.3.9)_\varepsilon$, la difficulté nouvelle étant l'absence de régularité (par exemple continuité) en (x,y) de $U(t,.,.)$.

Supposons dans un premier temps pour simplifier que $\chi_1(x)$ soit identiquement égal à x et que c_2 vaille zero. Alors l'application $W(.,x,.)$ définie pour tout x par la relation $W(t,x,y) = U(t,x+at,y)$ satisfait le système suivant (que l'on note $(3.3.11)_x$ pour marquer le "gel" en la variable x) :

$$\begin{cases} \partial_t W(t,x,y) + \dfrac{c_1}{2}\; \partial_y W^2(t,x,y) \;=\; 0 \\ \quad W(0,x,y) \;=\; h_1(x,y) \end{cases}$$

et après changement de variable,

$$(3.3.9)_\varepsilon \;=\; \int \left| U_l\Big(x+at, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \;-\; W\big(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\big) \right| \;\varphi(x+at)\;\; dx$$

$$(3.3.9)_\varepsilon \;=\; \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{x\,=\,\varepsilon\, n}^{\varepsilon\,(n+1)} \left| U_l\Big(x+at, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \;-\; W\Big(t,x,\frac{x}{\varepsilon}\Big) \right| \varphi(x+at)\;\; dx$$

$$=\; \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{y\,=\,n}^{n+1} |U_l(\varepsilon\, y + at, y) \;-\; W(t, \varepsilon\, y, y)| \;\varphi(\varepsilon\, y + at)\;\; dy$$

En notant $K \,:\, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$K(x) \;=\; \int_{y\,=\,n}^{n+1} |U_l(x+at,y) \;-\; W(t,x,y)| \;\varphi(\varepsilon\, y + at)\;\; dy\;,$$

$(3.3.9)_\varepsilon$ s'écrit maintenant :

$$(3.3.9)_\varepsilon \;=\; \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} K(\varepsilon\, n) \;+\; \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} K'(\varepsilon, n) \qquad \text{avec}$$

$$K'(\varepsilon,n) = \int_{y\,=\,n}^{n+1} |U_l(\varepsilon\, y \,+\, at, y) \,-\, W(t,\varepsilon\, y, y)|\; \varphi(\varepsilon\, y + at)\; dy \,-\, K(\varepsilon\, n)$$

On regarde les propriétés de régularité de la fonction K en évaluant :

$$|\,K(x_1) \,-\, K(x_2)\,| \;\leqslant\; (3.3.12) \,+\, (3.3.13) \qquad \text{avec}$$

$$(3.3.12) \;\leqslant\; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{y=0}^{1} |U_l(x_1 + at, y) \,-\, U_l(x_2 + at, y)|\; dy \quad \text{et}$$

$$(3.3.13) \;\leqslant\; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{y=0}^{1} |W(t,x_1,y) \,-\, W(t,x_2,y)|\; dy\,.$$

L'uniforme continuité de $U_l(.,.)$ (continue sur son support compact) assure la convergence de (3.3.12) vers zero lorsque x_1 tend vers x_2.

Par ailleurs, $W(.,x_1,.)$ et $W(.,x_2,.)$ sont respectivement solutions de $(3.3.11)_{x_1}$ et $(3.3.11)_{x_2}$.

La stabilité L^1 des lois de Burgers fournit l'existence d'une constante C telle que :

$$\int_{y=0}^{1} |W(t,x_1,y) \,-\, W(t,x_2,y)|\; dy \;\leqslant\; C \int_{y=0}^{1} |h_1(x_1,y) \,-\, h_1(x_2,y)|\; dy$$

L'uniforme continuité de h_1 (continue sur son support compact) assure dès lors la convergence de (3.3.13) vers zero lorsque x_1 tend vers x_2. K est donc une fonction continue de la variable x. De plus $W(t,x,y)$ et $U_l(x,y)$ étant à support compact en x, K est à support compact. K est donc Riemann intégrable suivant la formule de sommation suivante :

$$(3.3.14) \qquad \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\; \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} K(\varepsilon\, n) \;=\; \int_{\mathbb{R}} K(x)\; dx$$

$$=\; \|\,\big(U_l(x,y) \,-\, U(t,x,y)\big)\,\varphi(x)\,\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T})}\,.$$

On établit maintenant : $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\, \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} K'(\varepsilon,n) = 0\,.$

On a $\;|\,K'(\varepsilon,n)\,| \;\leqslant\; (3.3.15)_{n,\varepsilon} \,+\, (3.3.16)_{n,\varepsilon} \qquad$ avec

$$(3.3.15)_{n,\varepsilon} \;=\; \int_{n=y}^{n+1} |U_l(\varepsilon\, y + at, y) \,-\, U_l(\varepsilon\, n + at, y)|\; dy \qquad \text{et}$$

$$(3.3.16)_{n,\varepsilon} = \int_{n=y}^{n+1} |W(t, \varepsilon y, y) - W(t, \varepsilon n, y)| \; dy.$$

La sommation portant sur un nombre d'indices de l'ordre de $1/\varepsilon$, il suffit de vérifier :

$$(3.3.17) \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_n (3.3.15)_{n,\varepsilon} = 0 \qquad \text{et}$$

$$(3.3.18) \qquad \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \sup_n (3.3.16)_{n,\varepsilon} = 0$$

Soit maintenant,

$$C_\varepsilon = \sup_{\{(x_1, x_2, y),\ |x_1 - x_2| \leqslant \varepsilon\}} |\, h_1(x_1, y) - h_1(x_2, y)\,|.$$

L'uniforme continuité de h_1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ donne $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} C_\varepsilon = 0$.

A n fixé, on note $W_1(t, \varepsilon n, y)$ et $W_2(t, \varepsilon n, y)$ les solutions de :

$$\begin{cases} \partial_t W_1(t, \varepsilon n, y) + \frac{c_1}{2} \, \partial_y W_1^2(t, \varepsilon n, y) = 0. \\ W_1(0, \varepsilon n, y) = h_1(\varepsilon n, y) - C_\varepsilon. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t W_2(t, \varepsilon n, y) + \frac{c_1}{2} \, \partial_y W_2^2(t, \varepsilon n, y) = 0. \\ W_2(0, \varepsilon n, y) = h_1(\varepsilon n, y) + C_\varepsilon. \end{cases}$$

Pour x pris dans l'intervalle $[\varepsilon n, \varepsilon(n+1)]$ et pour tout y dans $[0,1]$, on a par construction :

$$h_1(\varepsilon n, y) - C_\varepsilon \leqslant h_1(x, y) \leqslant h_1(\varepsilon n, y) + C_\varepsilon$$

Le principe du maximum appliqué à la loi de Burgers $(3.3.11)_x$ fournit (à t fixé chaque fonction dépend de y seul et est déterminée en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$ par sa moyenne symétrique) :

$$\forall\, (t, x, y) \in [0, T] \times [\varepsilon n, \varepsilon(n+1)] \times \mathbb{T},$$

$$W_1(t, \varepsilon n, y) \leqslant W(t, x, y) \leqslant W_2(t, \varepsilon n, y).$$

D'où :

$$(3.3.16)_{n,\varepsilon} = \int_{y=n}^{n+1} |W(t, \varepsilon y, y) - W(t, \varepsilon n, y)| \; dy \leqslant$$

$$\int_0^1 |W_2(t, \varepsilon n, y) - W_1(t, \varepsilon n, y)| \; dy.$$

De nouveau, le principe de stabilité L^1 est de mise et conduit à :

$$(3.3.16)_{(n,\varepsilon)} \leqslant C \int_0^1 2 C_\varepsilon \, dy \leqslant 2\, C\, C_\varepsilon .$$

La condition (3.3.18) est donc assurée et la première partie du lemme 3.3 est établie.

Lorsque $\chi_1(x)$ n'est pas identiquement égal à x ou lorsque c_2 est différent de zero, on procède par troncation près des points (t_0, x_0) avec $\chi_1'(x_0 - a\,t_0) \neq 0$ puis on redresse localement la phase. $(3.3.11)_x$ garde la forme d'une loi de Burgers mais des fonctions C^∞ de (t,x) apparaissent dans les coefficients de dérivation en y. L'estimation donnée pour $(3.3.16)_{(n,\varepsilon)}$ et qui garantit (3.3.18) demande de ce fait plus de soin. Les détails techniques constituent la matière du chapitre 3 de [3].

On calcule maintenant $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} (3.3.10)_\varepsilon$.

Soit $(U_l)_l$ une suite de fonctions de t, x et y, indexée par l'entier l et vérifiant :

(3.3.19) Pour tout t, $U_l(t,.,.)$ appartient à $C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{T})$ et est à support en x dans un compact fixé, indépendant de l.

(3.3.20) $\sup_l \| U_l(t,.,.) \|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \infty$ et

$$\lim_{l \longrightarrow \infty} \| (U - U_l)(t,.,.) \|_{L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{T})} = \lim_{l \longrightarrow \infty} \delta_l(t) = 0 .$$

D'après JMR [10],

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| U_\varepsilon(t,x) - U_l\Big(t, x, \frac{\chi_1(x-at)}{\varepsilon}\Big) \right| \varphi(x)\, dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U_l(t,x,y)| > \varphi(x)\, dx\, dy$$

Soit, d'après (3.3.20) et la première partie du lemme 3.3 ,

$$\limsup_{\varepsilon \longrightarrow 0} \left| (3.3.10)_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U_l(t,x,y)| > \varphi(x)\, dx\, dy \right| \leqslant \delta_l(t)$$

Mais,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U_l| > \varphi\, dx\, dy - \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U| > \varphi\, dx\, dy \right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{T} | < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U_l(t,x,y)| - |\lambda - U(t,x,y)| > \varphi(x)|\, dx\, dy$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{T} < \nu^1_{t,x,y}, |U_l(t,x,y) - U(t,x,y)| > |\varphi(x)|\, dx\, dy \leqslant \delta_l(t)$$

Comme $\lim_{l \longrightarrow \infty} \delta_l(t) = 0$, le second point du lemme **3.3** est établi.

On termine maintenant la preuve du théorème 3.

La positivité de $\nu_{t,x,y}$ assure : $A(t,x) \geqslant 0$.

Le choix spécifique effectué pour les conditions initiales des systèmes (0) et (3.1.1) donne $A(0,x) = 0$.

Le lemme 3.2 permet de disposer d'une inéquation de propagation pour la fonction $A(t,x)$, à savoir : $(\partial_t + a\partial_x)A(t,x) \leqslant 0$.

On regarde aussi la régularité de $A(t,x)$: Soit $s < t$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} A(t,x)\,\varphi(x-at)\,dx \; - \; \int_{\mathbb{R}} A(s,x)\,\varphi(x-as)\;dx \right|$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{T} | < \nu^1_{t,x,y}, |\lambda - U(t,x,y)| - |\lambda - U(s,x,y)| > \varphi(x-as)|\; dx\,dy$$

$$\leqslant \; \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \;\; \|U(t,x,y) - U(s,x,y)\|_{L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{T})} .$$

La solution entropique d'une loi de conservation scalaire étant lipschitzienne en temps à valeurs L^1, on peut préciser cette estimation en $C\,|t-s|$ ce qui donne $A(t,x) \in Lip_a(\mathbb{R}^+)$.

Le lemme 2.2 s'applique avec $f(t,x) = A(t,x)$ puisque cette fonction vérifie les hypothèses requises. Par conséquent, pour tout t, $\nu^1_{t,x,y} = \delta_{U(t,x,y)}$ pour presque tout (x,y) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{T}$. D'après le lemme **3.3**, on a donc :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \;(3.3.10)_\varepsilon \;=\; \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} < \delta_{U(t,x,y)}, |\lambda - U(t,x,y)| > \;\varphi(x)\;dx\,dy \;\;=\;\; 0$$

ce qui est équivalent à la convergence forte anoncée dans le théorème 3.

Remarque.

Les résultats énoncés dans ce travail ainsi que les méthodes qui y sont développées se généralisent au cas des systèmes de lois de conservation à condition toutefois d'imposer des conditions supplémentaires de structure sur la fonction f. Ces conditions expriment l'existence d'une entropie locale approchée (au sens des puissances en ε). Elles s'écrivent : Pour tout triplet (i,j,k) avec $i \neq j$, $i \neq k$ et $j \neq k$, $\partial^2_{u_j u_k} f_i = 0$. En d'autres termes, dans les équations de l'optique géométrique sont annulées les quantités responsables de l'explosion BV à savoir celles qui se présentent comme des produits de convolution.

Bibliographie

RÉFÉRENCES

[1] S. Alinhac. *Le probleme de Goursat hyperbolique en dimension deux*, Comm. In Partial Differential Equations. **3** (1976), 231–282.

[2] Chazarain & Piriou. *Introduction to the theory of linear partial differential equations*, Studies in Mathematics and its applications.

[3] C.Cheverry. *Justification de l'optique geometrique pour une loi de conservation scalaire*, fascicule d'équations aux dérivées partielles. Institut de Recherche Mathématique de Rennes. (1992), 55–84.

[4] R. J. DiPerna & A. Majda. *The validity of nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, Comm. Math. Physics. (1985), 1–80.

[5] R. J. DiPerna. *Measure-valued solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. (1985), 223–270.

[6] J. Glimm. *Solutions in the large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations*, Comm. On Pure And Applied Mathematics **18** (1965), 697–715.

[7] J.Hunter, J.Keller. *weakly non linear high frequency waves*, Comm. On Pure And Applied Mathematics **36** (1983), 547–645.

[8] J.Hunter, A.Majda, R.Rosalès. *Resonantly interacting weakly non linear hyperbolic waves*, Stud. Appl. Math **71** (1984), 149–179.

[9] J-L.Joly, G.Metivier, J.Rauch. *Resonant one dimensional non linear geometric optics*, J. of. Functional. Analysis (1993 à *paraître*).

[10] J-L.Joly, G.Metivier, J.Rauch. *Focusing and absorbtion of nonlinear oscillations*, preprint Rennes 1993.

[11] S.Schochet *Resonant Nonlinear geometric optics for weak solutions of conservation laws*, preprint Tel Aviv University 1992.

[12] L.Tartar *Compensated Compactness and Applications to PDEs*, Nonlinear Analysis and Mechanics, Herriot Watt Symposium (1979).

[13] A. I. Volpert. *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR. Sbornik **2** (1967), 225–267.

[14] E. Weinan. *Homogenization of Linear and Nonlinear Transport Equations*, Comm. On Pure And Applied Mathematics **XLV** (1992), 301–326.