

ANNIE BESSOT

**La théorie didactique, un outil pour la construction
et l'analyse de situations**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1991, fascicule S6
« Vième école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 20-23

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991__S6_20_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEME 1

Travaux dirigés : *"La théorie didactique, un outil pour la construction et l'analyse de situations"*

par Annie BESSOT

Laboratoire LSD2-IMAG

Université Joseph Fourier, GRENOBLE I

Ce T.D. devait être l'occasion de faire fonctionner les notions de situation fondamentale, de variables didactiques, d'analyse a priori.

Il est important de souligner que la notion de situation fondamentale, notion déjà ancienne dans le champ de la didactique, est peu utilisée explicitement dans les recherches des didacticiens: il semble qu'elle soit en débat, mais de façon souvent souterraine. Pour une définition de cette notion, on pourra se référer à l'article de Guy Brousseau, 1986, "Fondement et méthodes de la didactique des mathématiques", RDM, Vol.7.2.

Il me semble que l'idée sous jacente à cette notion est la suivante: une genèse d'un savoir institue un rapport à ce savoir qui n'est pas réductible à la logique de l'organisation du savoir (aspect syntaxique); ce rapport dépend d'une logique des situations dans lesquelles fonctionne le savoir (aspect sémantique). Une situation fondamentale a pour objet de modéliser le(s) fonctionnement(s) du savoir.

Une situation fondamentale doit au moins permettre:

- une genèse effective du savoir
- une "relecture" de cette genèse suivant la logique de l'organisation du savoir

Dans ce T.D., nous avons pour objectif non pas de simuler l'étude qui conduit à la formulation d'une situation fondamentale d'un savoir, mais de mettre en évidence la pertinence d'une analyse de situations qui ne se réduit pas à celle du savoir.

Pour cela, le déroulement prévu pour ce T.D. était le suivant:

-Première partie

Chaque participant reçoit le texte d'un problème non issu d'une ingénierie didactique. Ce problème a déjà été proposé par G.Brousseau en 1988 lors de l'université d'été sur "Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire".

Texte 1

Le commerçant

Un commerçant a calculé le prix de vente d'une pièce de tissus de façon à réaliser un bénéfice de 20% (du prix d'achat). La pièce vendue, il constate que son bénéfice n'a été que de 19% (du prix d'achat). Il incrimine bientôt la distance qui sépare deux traits gravés sur son comptoir et qui lui servent à mesurer "un mètre".

Quelle distance s'attend-il à trouver entre ces deux traits?

Le travail des participants consiste à produire au moins une solution. Les différentes solutions doivent être rassemblées et éventuellement classées.

Ce début (classique) de mise en activité et d'analyse de procédures a pour objectif principal la prise de conscience par chacun des participants de l'existence d'une difficulté dans la résolution du problème.

-Deuxième partie

Un deuxième texte est distribué à chaque participant:

Texte 2

Un modèle de vérification (d'après la méthode dite de fausse position)

A: distance entre les deux traits gravés

B: mesure de la pièce de tissu en mètre

C: prix d'achat du tissu par mètre

D: prix de vente du tissu par mètre

X: prix de vente du tissu

Y: prix d'achat du tissu

Z: gain ou perte

exemple:

A = 3 mètre

B = 30 mètre

C = 1F le mètre

D = 1,20 le mètre

X = 12F

Y = 30F

Z = une perte de 18F

Ceci ne correspond pas à l'énoncé, corrigeons...

Utiliser ce modèle pour répondre aux questions suivantes:

-A quelle situation non didactique naturelle peut-on rattacher ce problème? Pour le fonctionnement de quelle connaissance?

-Donner un modèle de la solution au niveau du savoir mathématique.

-Quel est l'ensemble des données pertinentes du problème, c'est à dire qui interviennent dans la solution mathématique?

-Quel est l'ensemble des éléments significatifs du problème, c'est à dire qui interviennent pour la production et le contrôle d'une solution?

-Comparer ces deux ensembles.

Je donne brièvement un corrigé, c'est à dire les réponses attendues.

-A quelle situation non didactique "naturelle" (et donc à quelle institution) peut-on rattacher ce problème? Pour le fonctionnement de quelle connaissance?

L'institution évoquée par le texte de ce problème est celle du commerce. Le commerce est l'une des institutions premières de fonctionnement du mesurage: on pourrait même dire que s'il n'y a pas de commerce dans une société, il n'y a pas grande nécessité de mesurer. Le problème proposé ici appartient à la vaste classe des problèmes de mesure et de façon plus spécifique aux problèmes de changement d'unités dans la mesure d'une même longueur, longueur indépendante du système d'unités.

-Donner un modèle de la solution au niveau du savoir mathématique.

Considérons qu'une mesure est une application d'un ensemble G de "longueurs" dans l'ensemble des réels positifs. Une longueur u a été choisie comme unité. Je n'aborde pas ici le problème posé pour définir correctement l'ensemble G: on trouvera chez R.Douady, RDM 1.1., un exemple du traitement de ce problème.

mes: G $\rightarrow$ $\mathbb{R}^+$ mes(u) = 1

G est un ensemble sur lequel on a défini une égalité et une opération "multiplication externe" telle que l'ensemble des scalaires soit $\mathbb{R}^+$.

L'application mes est telle que:

si $l_1 = l_2$ alors mes(l_1) = mes(l_2)

mes(c.u) = c.mes(u), c étant un réel positif

Comment se caractérise le changement d'unités dans ce contexte?

$$\begin{array}{ccc} u_1 & 1 & u_2 \\ l = c_1 \cdot u_1 & c_1 & l = c_2 \cdot u_2 \end{array}$$

l est invariante, soit: $c_1 \cdot u_1 = c_2 \cdot u_2$

d'où le modèle mathématique du changement d'unité :

$$u_1/u_2 = c_2/c_1$$

-Quel est l'ensemble des données pertinentes du problème, c'est à dire celles qui interviennent dans la solution mathématique?

Ici:

u_1 est le mètre du vendeur, et u_2 est la distance entre les deux traits.

v est le prix de vente par unité (u_1 ou u_2)

A le prix d'achat de l

$$c_2 \cdot v = 1,19 \cdot A \quad \text{et} \quad c_1 \cdot v = 1,2 \cdot A$$

$$u_1/u_2 = c_2/c_1$$

D'où, la solution mathématique:

$$u_1/u_2 = 1,19 / 1,2$$

$$u_2 = (1,2/1,19) \cdot u_1$$

Cette formule finale montre que **l'ensemble des données pertinentes pour le calcul est celui des deux bénéfiques**. Ces données pertinentes ne dépendent ni de la longueur, ni des prix (vente et achat) de la pièce de tissu.

-Quel est l'ensemble des éléments significatifs du problème, c'est à dire qui interviennent pour la production et le contrôle d'une solution?

Pour trouver et contrôler une solution, on est obligé d'évoquer tout un univers, celui du commerce; dans ce problème, il est donc nécessaire de mobiliser un ensemble de connaissances liées au modèle culturel du commerce inutile pour le calcul lui-même: le mètre initial, le "mètre" du comptoir, les unités, la longueur, le prix d'achat par mètre, le prix d'achat de la pièce de tissu, le prix de vente par mètre, le commerçant...

-Comparer ces deux ensembles.

La comparaison de ces deux ensembles montre l'écart important entre l'ensemble des données pertinentes pour le calcul et l'ensemble des éléments significatifs.

Peut-on attribuer la difficulté du problème à cet écart ? Si oui, cet écart peut être considéré comme une variable didactique. Ou encore: si en agissant sur les "valeurs" de cette variable on peut produire des problèmes "simples" mais équivalent du point de vue mathématique, nous aurons bien identifier une variable didactique.

Le travail ainsi amorcé est un travail de production d'un champ de problèmes associés à une connaissance, celle du changement d'unités. Ce travail est une petite partie de celui plus ample sur les situations, qui conduirait à caractériser une situation fondamentale du changement d'unités, elle-même englobée dans celle de la mesure.

Le texte 3 ci-dessous a été donné comme exemple de problème plus simple.

Texte3

Proposition du début d'un travail de simplification

Un commerçant achète une pièce de tissu, à Paris: il la paye tant de francs, elle mesure tant de mètres

Il se rend ensuite à Reims où cette toile peut se vendre tant de francs par toise pour la somme de tant.

Quelle est la longueur en mètre d'une toise?

*Il veut faire un bénéfice de tant pour 100, à quel prix peut-il vendre sa toile à Reims?
Il se rend à Lens où on lui dit qu'on utilise le pied qui vaut exactement le mètre de Paris.
Il a calculé le prix de vente de sa pièce de façon à réaliser un bénéfice de 20% (du prix d'achat).
Il constate qu'il n'a fait qu'un bénéfice de 19% (du prix d'achat).
Il suppose que le pied à Lens n'est pas le même que le mètre à Paris.
Est-il plus grand ou plus petit?
Quelle mesure en mètre s'attend-il à trouver pour un pied de Lens?*

Conclusion

Ce T.D. ne s'est pas déroulé comme je l'avais prévu sur plusieurs points. Je ne citerais que l'un de ces points: les participants n'ont pas analysé explicitement le problème proposé comme un problème de mesure et encore moins comme un problème de changement d'unités. D'autres notions telles que opérateur, proportionnalité, pourcentage, ont été proposées. L'objectif fixé dans le contrat avec le responsable du thème n'a pas été atteint: le problème du montage d'un T.D. sur la notion de situation fondamentale reste pour moi un problème ouvert! Cependant je pense que ce qui a été proposé ici contient en germes un tel T.D..

Annexe: compte-rendu des deux rapporteurs

Le T.D. s'est déroulé en 3 étapes:

1. Mise en situation des participants sur un problème "banal" mais difficile, suivi d'une discussion des solutions données, chacun devant proposer un modèle de la solution au niveau du savoir mathématique.

2. Une première séquence d'échanges a permis de discuter du caractère "naturel" ou non des situations non-didactiques, et de la difficulté d'explicitation des connaissances qu'elles mettent en oeuvre, aussi bien du point de vue mathématique (comme, ici, les places respectives des théories de la mesure des grandeurs et des schémas d'opérateurs de proportionnalité), que de celui de leur relativité au sujet apprenant.

Les activités proposées et les discussions qui les suivent font apparaître l'écart, d'une part entre les connaissances mobilisées pour la résolution du problème (et le contrôle de sa solution) et les connaissances qui y fonctionnent effectivement, d'autre part entre l'ensemble des données pertinentes dans un problème et l'ensemble des données significatives pour l'élaboration de sa solution.

Il est proposé que ces écarts puissent constituer des variables didactiques expliquant en partie la difficulté du problème posé.

3. Après l'intervention des "réacteurs", un court débat s'instaure sur l'imprécision du contrat et des techniques de fonctionnement d'un tel T.D. dans l'école d'été de didactique des mathématiques.

Pour finir, on a insisté sur la difficulté d'exhiber une "situation fondamentale" et de préciser les critères qui la rendent telle, et on n'a pu qu'évoquer les rapports de ces situations avec les "causes" et les "raisons" de l'apprentissage.