ANIBAL CORTES
NELLY KAVAFIAN
GÉRARD VERGNAUD

Le champ conceptuel, outil d'analyse pour l'introduction de l'algèbre

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989, fascicule S6
« Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique », , p. 58-63
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989___S6_58_0>

Samedi 26 août 1989

Atelier : *"Le champ conceptuel, outil d'analyse pour l'introduction de l'algèbre"*

par Anibal CORTES, Nelly KAVAFIAN, Gérard VERGNAUD

PSYDEE, 46, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

L'apprentissage de l'algèbre est un moment de rupture épistémologique significatif pour les élèves de l'enseignement secondaire. Nous entendons par cela que l'élève doit passer brusquement d'un état de connaissances mathématiques à un autre en s'appropriant rapidement des notions et des procédures nouvelles qui, en prenant appui sur les connaissances antérieurement acquises, les remettent profondément en cause. Dans le passage de l'arithmétique élémentaire à l'algèbre, par exemple, les élèves vont devoir substituer au traitement itératif de problèmes énoncés en langage naturel, la manipulation d'expressions algébriques par des règles explicites (processus aboutissant à une suite d'équations équivalentes).

Le passage de l'arithmétique à l'algèbre ne peut se faire complètement sans que soient élaborés des concepts mathématiques puissants comme ceux d'inconnue et de variable, d'équation et de fonction, de nombre relatif, de nombre rationnel et de nombre réel, de représentation graphique... ainsi que des nouvelles procédures de traitement des expressions algébriques. Nous venons d'énumérer certains éléments parmi les plus importants du champ conceptuel de l'algèbre au collège.

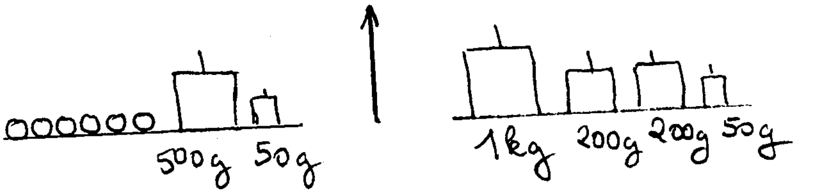
Nous introduisons l'algèbre en classe de cinquième, d'une part, comme un moyen efficace de résoudre des problèmes d'arithmétique non aisément solubles par des moyens purement arithmétiques ; l'algèbre s'adresse alors aux mêmes problèmes mais utilise des moyens conceptuels et des procédures différentes (caractère outil de l'algèbre). D'autre part les élèves vont manipuler les objets mathématiques mis en jeu (équation, inconnue, fonction, ...) en saisissant leurs propriétés. Une dialectique outil-objet est mise en oeuvre dans la construction des séquences didactiques.

L'expérience en classe de cinquième à laquelle nous faisons référence a été menée par les auteurs au collège Bergson. Le contenu mathématique abordé dépasse largement le nouveau programme de la classe de cinquième. Ce contenu, ainsi que la forme des séquences didactiques, ont été définis en tenant compte d'une part des filiations et ruptures conceptuelles déjà remarquées dans l'analyse du champ conceptuel de l'algèbre au collège et d'autre part de l'analyse des erreurs, des procédures et des représentations des élèves remarquées dans des expériences précédentes menées par nous. Nous nous appuyons aussi sur d'autres travaux expérimentaux et théoriques publiés.

Cette expérience didactique est vaste ; elle se développe le long de cinq semaines et elle dure quinze heures. Les 28 élèves de la classe sont répartis dans cinq groupes indépendants ; dans chaque groupe, il y a un observateur-enseignant. Chaque groupe est enregistré et l'analyse du processus didactique a été fait par les auteurs au laboratoire. Ce travail n'a pas encore été publié.

Notre atelier fait référence à la première séquence didactique, c'est-à-dire, aux deux premières heures de notre expérience et notamment au premier problème. L'énoncé du premier problème proposé aux élèves est le suivant :

"*Sur une balance en équilibre nous avons des billes identiques et des masses marquées telles que* :



a) *Ecrire l'équation qui vous semble traduire cette balance en équilibre. L'inconnue du problème que nous allons calculer est la masse d'une bille*". Il y a aussi les items *b*, *c*, *d* et *e* que nous analyserons plus tard. (cf. pages suivantes)

La mise en équation et la résolution algébrique de ce problème impliquent la mise en oeuvre de concepts et procédures que les élèves connaissent mal ou méconnaissent totalement (équation, inconnue, suite d'équations équivalentes... un morceau du champ conceptuel de l'algèbre au collège). Cet apparent dilemme, comme d'autres fréquemment rencontrés par les élèves dans l'enseignement secondaire, n'est abordable, à notre avis, qu'en établissant une activité de tutelle.

Dans notre cas précis, l'activité de tutelle proposée aux élèves est le découpage en items du processus de mise en équation et résolution algébrique du problème, chaque item étant relié à un ou plusieurs éléments de ce morceau du champ conceptuel. Par conséquent la connaissance des concepts et procédures requis pour la résolution algébrique de notre problème nous permet d'organiser l'activité de tutelle. Voici un exemple du caractère outil du champ conceptuel.

Le travail proposé aux participants de l'atelier (après une introduction bien plus riche que celle que nous venons de faire ici) a consisté à identifier cet ensemble de concepts et procédures. La première question posée est la suivante :

"*Trouvez les concepts et procédures mis en jeu dans la mise en équation et résolution algébrique de ce problème*".

Les participants ont trouvé cette question confuse, mais à notre avis, ce qui pose vraiment problème est la difficulté intrinsèque de la tâche. Il est intéressant de remarquer que la signification du mot "*concept*" posait problème à certains participants. Cette question a dû être posée plusieurs fois dans des formulations différentes et abondamment commentée.

Les participants s'organisent par petits groupes, discutent, et quinze minutes plus tard proposent les concepts suivants : équilibre, égalité, masse, opération, inconnue. L'activité de l'atelier se focalise alors sur la définition des concepts proposés ainsi que dans la recherche des éléments manquants. Une activité de tutelle non prévue par l'animateur s'engage naturellement.

On considère que le concept de masse ne pose pas problème aux élèves au niveau de la résolution du problème ; par conséquent, il ne sera pas analysé.

L'animateur de l'atelier fait remarquer l'absence du concept fondamental : celui d'équation. Voici quelques définitions proposées par les participants :

- Existe-t-il un x tel que l'égalité soit vraie ?
- Une équation, c'est quelque chose qui pose une question.
- C'est un instrument de modélisation de la balance.
- C'est une relation numérique avec une inconnue et un objectif.

Une discussion s'engage sur les limites de certaines de ces définitions et l'animateur propose la suivante (dans le cadre des problèmes à une inconnue) :

"*En général, on peut dire qu'une équation correspondant à un problème est une égalité qui explicite des relations mathématiques existantes entre l'inconnue et certaines données dans le but de calculer l'inconnue*".

Le concept d'inconnue est abordé ensuite. De multiples propositions fusent, des discussions s'engagent et à la fin l'animateur complète ce qui a été dit de la façon suivante :

"*Le concept d'inconnue est étroitement lié à celui d'équation* ; *ces deux concepts se construisent parallèlement. Une définition large d'inconnue serait ce qu'on ne connaît pas dans l'énoncé d'un problème, mais tacitement on appelle inconnue ce qu'on veut calculer en faisant l'impasse sur toutes les autres inconnues du problème. En algèbre, l'inconnue est symbolisée par une lettre qui représente un nombre* ; *l'inconnue est un nombre inconnu auquel on associe, souvent, une unité. La lettre ou nombre inconnu est traité comme un nombre dans le calcul algébrique*".

Le concept d'égalité qui a été proposé est repris par l'animateur qui fait remarquer qu'en algèbre la signification du signe "*égal*" est selon le cas celle d'une identité (par exemple dans l'égalité $(a+b).c = a.c+b.c$) ou celle d'une équivalence (par exemple dans l'équation du problème qui exprime une équivalence de masses). Ceci peut poser problème aux élèves de cinquième car pour certains d'entre eux le signe "*égal*" est l'annonce d'un résultat et on observe des écritures qui ne respectent ni la symétrie ni la transitivité de l'égalité, par exemple : $45 - 25 + 32 = 52 - 12 = 40$.

Pour faire le lien avec la construction de la première séquence didactique (notamment avec le découpage en items de la résolution du premier problème), l'animateur énumère et commente les éléments les plus importants (qui peuvent poser problème aux élèves) de la partie du champ conceptuel de l'algèbre sous-tendu par le tout début de l'algèbre et le problème en particulier :

- Concept d'équation.
- Concept d'inconnue.
- Signe "*égal*" comme une équivalence.
- Homogénéité de termes de l'équation en unités ainsi que dans leur signification.
- Opérations sur les nombres (notamment sur les nombres relatifs). Opérations sur des grandeurs.
- Ensemble de procédures algébriques.

Au fond, l'un des aspects les plus importants de la rupture entre arithmétique et algèbre est l'acceptation d'une conduite de détour : accepter de ne pas chercher immédiatement à calculer l'inconnue ou les inconnues intermédiaires (mise en équation), accepter d'oublier le sens des grandeurs et des relations représentées par les expressions algébriques (suite d'équations intermédiaires), accepter de s'en remettre à des opérations sur des écritures (travailler sur l'équation pour la transformer) qui n'ont éventuellement pas de sens arithmétique, conserver cependant la confiance que la solution trouvée est interprétable et juste (conservation de l'égalité, conservation de la solution).

L'atelier de l'Ecole d'Eté aborde ensuite le découpage en items du premier problème et ses effets : on regarde le lien entre chaque item et le morceau du champ conceptuel vu précédemment, ainsi que les erreurs et procédures produites par les élèves (ceci ne sera pas transcrit dans le cadre de cet article par manque de place).

Item a) (voir l'énoncé du problème). On laisse les élèves exprimer leur représentation d'équation et d'inconnue. Beaucoup d'entre eux écrivent, par exemple :

$$6\ billes + 500\ g + 50\ g = 1\ kg + 200\ g + 200\ g + 50\ g.$$

L'analyse des protocoles montre que, pour la plupart des élèves, l'équation est un "*résumé*" de l'énoncé et l'inconnue un "*objet*".

Item b) "*Exprimer tous les termes de l'équation en kg*". Cet item sert à introduire la contrainte d'homogénéité et donner sens à l'écriture correcte de l'équation (au niveau de l'expérience en classe de cinquième, chaque item est largement discuté par les élèves et les enseignants) ; on obtient les écritures suivantes :

$$6\,x + 0.5\,kg + 0.05\,kg = 1\,kg + 0.2\,kg + 0.2\,kg + 0.05\,kg$$

$$6\,x + 0.55\,kg = 1.45\,kg.$$

L'équation est interprétée comme une équivalence de masses et l'inconnue comme une masse inconnue. Les élèves opèrent sur des grandeurs seulement au moment de réduire l'équation.

Item c) "*écrire l'équation du problème en exprimant chaque terme en kg sans expliciter les unités (équation mathématique)*". Cet item prépare la résolution algébrique de l'équation ; on fait remarquer aux élèves que l'inconnue d'une équation mathématique est un nombre inconnu. On obtient l'écriture suivante :

$$6\,x + 0.55 = 1.45.$$

Item d) "(*Résolution algébrique*) *on soustrait* 0.55 *de chaque membre de l'équation. On obtient une nouvelle équation. Laquelle* ?". Cet item est relié à la conduite de détour. Le sens mathématique de cette opération n'échappe pas aux élèves, ils peuvent la justifier. Par contre la fonction de cette opération ("*à quoi sert de faire ça* ?") leur échappe pour le moment ; elle sera comprise à la fin de l'exercice ou plus tard dans la résolution (sans tutelle) d'autres problèmes. Le travail sur l'équation pose problème aux élèves, l'écriture voulue a dû être montrée dans la plupart des cas :

$$6\,x + 0.55 - 0.55 = 1.45 - 0.55$$

$$6\,x = 0.9.$$

Cette écriture permet aux élèves de contrôler les opérations réalisées et d'en garder la trace. Elle s'avère très efficace au début de l'algèbre.

Item e) "*On divise par* 6 *chaque membre de l'équation. On obtient une nouvelle équation. Laquelle* ?" Le sens mathématique de cette opération ne pose pas problème aux élèves, ils la contrôlent arithmétiquement. Par contre l'écriture voulue a dû être négociée :

$$6\,x : 6 = 0.9 : 6$$

$$x = 0.15.$$

On retourne à l'énoncé du problème et le nombre obtenu est revêtu de sa signification réaliste, les élèves écrivent par exemple : "*la masse d'une bille est de* 0.15 *kg*".

Dans notre atelier, nous avons abordé d'autres problèmes de la séquence didactique, les règles qui résument le travail algébrique (les règles qui ont été fournies aux élèves dans l'expérience) ainsi que certains aspects du calcul algébrique associé à la résolution d'équations (l'analyse qu'on peut faire de celui-ci en termes de champ conceptuel a été sommairement abordée). Nous n'en parlerons pas dans le cadre de cet article.