

RAYMOND DUVAL

**Analyse des modes d'expression et de représentation du
fonctionnement du raisonnement déductif**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 5
« Didactique des mathématiques », , exp. n° 9, p. 1-22

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990__5_A9_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Analyse des modes d'expression et de représentation du fonctionnement du raisonnement déductif.

Raymond Duval

I) Les Caractéristiques de la démarche déductive.

Une démarche déductive articule deux types très différents de "passage logique". Le premier correspond à un pas de déduction. Le second correspond à l'enchaînement des pas de déduction. Ces deux types de passage ont des fonctionnements très différents et ils ne se marquent pas discursivement de la même manière.

1) Le fonctionnement d'un **pas de déduction** repose sur l'utilisation d'un théorème (ou d'une définition , ou d'un axiome..) comme règle d'inférence : des propositions étant données, à titre d'hypothèses ou de conclusions déjà obtenues, l'application du théorème permet d'affirmer une nouvelle proposition. Le fonctionnement d'un pas de déduction présente donc deux caractéristiques importantes:

1.1— Il dépend d'une **organisation ternaire des propositions**. Un théorème ne peut pas être utilisé sans que soient données les propositions qui en forment les conditions d'application. Et si ses conditions d'application sont vérifiées le théorème "produit" algorithmiquement la conclusion. Dans cette organisation ternaire, il n'y a entre les propositions aucune relation de confirmation, ou de justification, comme dans le cas d'une argumentation : les "hypothèses" ne sont ni confirmées ni réfutées par le pas de déduction, et, entre la conclusion obtenue et le théorème, et la règle d'inférence n'explique pas la conclusion produite comme on peut le faire, dans une discussion, une raison que l'on avance pour appuyer une affirmation.

Ce rappel peut paraître trivial. Mais cette organisation des propositions dans un pas de déduction se trouve souvent occultée pour différentes raisons. La première est peut-être la notion commune de raisonnement sous-jacente à l'argumentation et à la déduction : on surestime les similitudes des deux démarches spécifiques, en espérant que la pratique de la première ouvre au fonctionnement de la seconde, pourvu que l'on joue adéquatement les exigences de preuve. Mais on oublie qu'il n'y a pas de conditions explicites d'application d'un argument. La seconde raison est qu'on emploie fréquemment le même marqueur, "si...alors..", pour exprimer un pas de déduction , lequel fonctionne sur une organisation ternaire, et pour énoncer un théorème sous forme d'implication

matérielle, laquelle est une relation binaire. Cet usage tend à renforcer la confusion entre l'implication matérielle et son utilisation comme règle d'inférence dans le *modus ponens*

1.2— Il consiste à relier **les propositions en fonction de leur statut opératoire** et non pas en fonction de leur contenu. Dans l'organisation ternaire d'un pas de déduction, il n'y a que trois statuts opératoires possibles pour une proposition : proposition d'entrée, règle d'inférence ou conclusion. Les statuts opératoires de proposition d'entrée ou de règle d'inférence sont fixés préalablement à l'exécution du pas de déduction. Et discursivement les propositions d'entrée et la conclusion apparaissent comme des répétitions des propositions mises en relation binaire dans la règle d'inférence. Autrement dit, dans un pas de déduction, les propositions ne sont pas reliées en fonction des relations sémantiques de leurs contenus respectifs (opposition, synonymie, particularisation...), mais uniquement en vertu de leur statut préalablement fixé (hypothèses de départ ou conclusions déjà obtenues et règles d'inférence).

La présence de connecteurs entre les propositions qui forment un pas de déduction ne reflète donc pas les relations logiques définies dans la logique des propositions (implication matérielle, équivalence,...) : ces relations logiques définissent l'organisation binaire du théorème utilisé. *Dans un pas de déduction les connecteurs remplissent une autre fonction que celle d'opérateur : ils marquent exclusivement le statut opératoire des propositions qu'ils introduisent.* Et de ce fait, ils ne sont pas indispensables pour exprimer un pas de déduction. Les expressions appelées "attitudes propositionnelles" apparaissent même plus naturelles que les connecteurs pour marquer le statut des propositions dans un pas de déduction : " on sait que...(propositions d'entrée), je suis sûr que ...(conclusion), grâce au théorème...". Elles présentent l'inconvénient d'être moins économiques et plus subjectives que les connecteurs. Mais elles présentent l'avantage didactique d'exprimer aussi la "valeur épistémique" attachée à une proposition. Elle permettent donc de voir comment la raisonnement déductif peut modifier la valeur épistémique d'une proposition.

2) **L'enchaînement des pas de déduction** se fait exclusivement par le recyclage d'une conclusion d'un pas du niveau juste antérieur en proposition d'entrée pour le nouveau de déduction qui est effectué. L'enchaînement déductif présente ainsi deux caractéristiques qui le distinguent de toute autre démarche de raisonnement.

2.1— Le lien entre deux pas de déduction n'est formé ni par une relation logique, ni par une relation sémantique, mais par un **recouvrement d'une même proposition** : la conclusion d'au moins un pas de niveau juste antérieur est réénoncée comme proposition d'entrée pour le pas suivant. *C'est cette répétition de la même proposition avec changement de son statut opératoire qui constitue l'enchaînement déductif de deux pas*

dédution. C'est cette reprise d'une proposition antérieure (hypothèse ou conclusion) qui lie deux pas successifs de déduction et non pas un connecteur logique ou argumentatif.

2.2— Le raisonnement déductif peut exiger la conduite de plusieurs enchaînements séparément les uns des autres, pour réunir ensuite leurs résultats comme propositions d'entrée pour un pas ultérieur. La démarche déductive n'est **non linéaire**. Son organisation se trouve adéquatement représentée par un graphe orienté avec plusieurs extrémités initiales (les hypothèses) et une extrémité terminale (la conclusion à démontrer).

Pour illustrer cette analyse de la démarche déductive nous allons présenter non pas un texte de démonstration choisi dans un manuel, mais deux textes d'élèves de quatrième. Le premier a été écrit au mois de mars, c'est-à dire environ huit semaine après le commencement de l'expérience. Nous avons pu observer, par la modification positive de ses performances, par celle de ses stratégies, de sa rapidité de travail, de son intérêt et aussi par ses propres déclarations, que cet élève avait vraiment compris le fonctionnement d'une démarche déductive. D'une façon générale, la prise de conscience de ce qu'est une démonstration s'est accompagnée de productions présentant toutes ces caractéristiques et pas uniquement l'une ou l'autre.

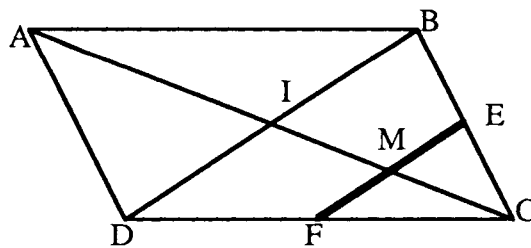
Le problème suivant avait été proposé en classe à titre de contrôle. Il n'y avait eu pas eu de phase heuristique antérieure et de mise en commun. Il y avait à chercher et à rédiger seul. Le texte se présente en seul paragraphe. Pour des commodités de présentation nous l'avons segmenté en sept pas, et pour chaque pas nous avons segmenté les phrases selon le statut des propositions.

Exercice 5:

ABCD est un parallélogramme.

I est le point d'intersection des diagonales, E est le milieu de [CB] et F celui de [CD].

Les droites (AC) et (EF) se coupent en M. Montrer que M est le milieu de [EF].



DELPH: "Pour prouver que M est le milieu de EF je me dis:

Si IECF est un parallélogramme alors sachant que dans un parallélogramme les droites se coupent, t en leur milieu et que AIC sont alignés et que M est le point de rencontre entre AC et EF, je sais alors que M est le milieu de EF.

Pour prouver que IECF est un parallélogramme je me dis :

- 1—Grâce au triangle DBC et sachant que I milieu de DB et E milieu de BC sachant le théorème des milieux (pta),
IE est parallèle à DC.*
- 2—Sachant que DFC sont alignés
alors IE//FC.*

Puis je fais le même raisonnement pour prouver que IF//EC.

- 3—Toujours grâce au triangle DBC et sachant que E milieu de BC et que F milieu de DC et connaissant le théorème des milieux (pta)
je sais alors que IF//BC*
- 4—et sachant que BEC sont alignés
alors IF est parallèle à EC.*

Je sais donc que IE//DC et IF//EC.

Puis je me dis

- 5—alors sachant le théorème du parallélogramme (ptb)
et que IE//DC
alors je peux affirmer que IECF est un parallélogramme.*

Ensuite

- 6— sachant que IECF est donc un parallélogramme et que IC diagonale de IECF, et connaissant le théorème (ptc)
je confirme que EF et IC se coupent en leur milieu.*

Puis

- 7—sachant donc que EF et IC se coupent en leur milieu et que AIC alignés, M point de rencontre entre AC et EF
je suis sûre que M est le milieu de EF."*

Dans ce texte, nous retrouvons de façon explicite les quatre caractéristiques du R.D. que nous avons distinguées.

L'organisation ternaire est évidente en 1,3, 5, 6. c'est -à-dire pour tous les pas qui font usage d'un théorème. En 2 et 4 il y a une organisation binaire sans mention d'une règle

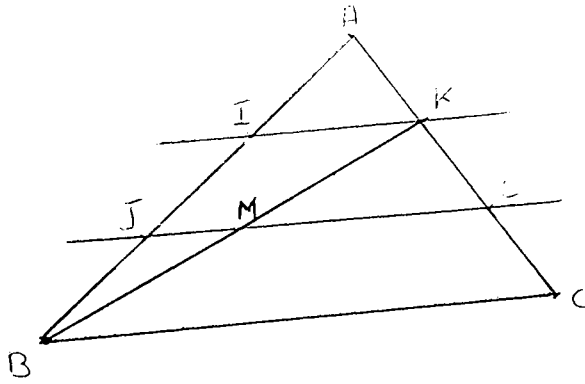
qui se confond avec une évidence de contenu : un segment qui est parallèle à un autre segment est parallèle à une partie de ce segment. En 7 il s'agit d'une inférence qui peut paraître redondante.

Le statut opératoire des propositions est bien marqué: sachant que...(propositions d'entrée) et sachant le théorème(cité en note), ou sachant (propositions d'entrée) et connaissant le théorème. La conclusion est marquée comme proposition principale en 1 et introduite par des attitudes propositions propositionnelles en 3,5,6,7: "je sais alors que.", "je suis sûre que.." Pour les pas 2 et 4 elle est introduite par "alors".

Il y a reprise de la conclusion du pas de niveau juste antérieur comme proposition d'entrée pour le pas suivant. En 6 et en 7 cette reprise même est soulignée par "donc". Cette reprise manque en 2 et en 4 pour lesquels aucune règle d'inférence n'est donnée. Au pas 5 l'une des deux conclusions pourtant rassemblées dans la phrase précédente " je sais donc que....."est oubliée.(Sur la graphe qui accompagne le texte chacune des deux conclusions est bien le départ d'une flèche vers la case du théorème (ptc)).

Le développement en parallèle de 1-2 d'une part, et de 3-4 d'autre part , pour se rejoindre en 5 est bien exprimé par les deux phrases: suivantes : " Puis je fais le même raisonnement pour..." et " Je sais donc que ...et...".

Le deuxième texte, dont nous allons reproduire la copie, a été fait sur un problème donné au troisième trimestre. l'énoncé est donné plus haut (Egret,p.14).



Question : Pourquoi $(IK) \parallel (JL)$?
 $\parallel (BC)$?

Hypothèses : * ABC triangle
* $AI = IJ = JB$
* $AK = KL = LC$

* Je prouve que $IK \parallel JL$.

Je me place dans le triangle AJL . Sachant que I est le milieu de AJ et que K est le milieu de AL , en passant par le théorème des milieux je sais que $IK \parallel JL$.

* Je prouve que M est le milieu de KB

Je trace KB et j'appelle M l'intersection de cette droite et de JL .

Je me place dans le triangle IKB . Sachant que IK est parallèle à JL et que J est le milieu de IB , en passant par le théorème réciproque des milieux je conclus que M est le milieu de KB .

* Je prouve que $JL \parallel BC$

Je me place dans le triangle KBC . Sachant que M est le milieu de KB et que L est le milieu de KC , en passant par le théorème des milieux, je sais que $ML \parallel BC$.

* Je prouve que $IK \parallel JL \parallel BC$.

Sachant que $IK \parallel JL$ et que $JL \parallel BC$, en passant par le théorème d'Euclide (une droite $\parallel$ à une autre, elle-même $\parallel$ à une 3ème est $\parallel$ à cette même 3ème) je peux conclure que $IK \parallel JL \parallel BC$.

II) Textes et Graphes propositionnels au regard des caractéristiques du R.D.

Les différentes caractéristiques du R.D. ne sont pas également visibles ou explicites dans les modes de présentation des démonstrations plus ou moins généralement utilisés: les textes et les graphes. Tout d'abord pour des raisons pédagogiques. La plupart des enseignants de mathématiques veulent d'emblée faire réduire au maximum la part du "discours" dans les textes de démonstration. Cela les conduit à censurer toutes les expressions qui apparaissent inutiles, comme les attitudes propositionnelles. Ensuite pour des raisons qui tiennent aux différences de registres mis en jeu : les caractéristiques décrites en 1.2 et en 2.2 ne s'accordent pas avec les règles spontanées d'organisation d'un texte (3.1, 3.2 et 3.3). Par ailleurs si les graphes permettent d'éviter les occultations liées à tout texte, ils peuvent, eux aussi, prêter à confusion. Ainsi le fonctionnement propre à chaque pas de démonstration peut se trouver masqué par l'organisation globale d'une démonstration particulière. En outre, il y a deux façons différentes d'introduire les graphes qui ne sont pas du tout équivalentes d'un point de vue didactique : seule l'une des deux permet de découvrir le fonctionnement de la démarche déductive.

A) L'organisation des propositions en un texte présente des caractéristiques non congruentes avec celles requises par leur organisation déductive. Nous en retiendrons trois.

3.1 Toute expression dans le langage naturel centre spontanément l'attention sur le contenu des propositions énoncées.

L'organisation d'un texte ne dépend pas d'abord des liens externes établis entre les phrases qui le composent, mais des correspondances entre les contenus des phrases. D'une phrase à l'autre il y a entre les mots, ou entre les expressions, des relations d'antonymie, d'hyperonymie, de synonymie, de renvois par anaphore ou par cataphore, etc...: c'est sur ces relations transversales aux phrases et aux propositions que se fonde la cohérence d'un texte. Et le plus souvent c'est à partir de ces relations transversales que la relation entre les phrases se trouve déterminée. Prenons par exemple cet échange, dans *les Mains Sales*, cité par Perelman (p. 614).

"JESSICA. — *Hugo! Tu parles contre ton coeur. Je t'ai regardé pendant que tu discutais avec Hoerderer: il t'a convaincu.*

HUGO. — *Il ne m'a pas convaincu. (1)*

Personne ne peut me convaincre qu'on doit ...(2)"

La relation entre les énoncés (1) et (2) se fonde sur la double opposition de quantité (il /personne) et de modalité (convaincre/ pouvoir convaincre) entre des termes constituant ces énoncés. C'est en raison de cette double opposition que (2) remplit ici la fonction d'argument par rapport à la réfutation (1). Et Hugo poursuit son raisonnement de la façon suivante:

"Mais s'il m'avait convaincu (3a) ce serait une raison de plus pour le descendre (3b) parce que ça prouverait qu' (3c') il en convaincra d'autres (3c")."

La proposition contrefactuelle (3a) reprend l'affirmation de Jessica pour montrer que même dans ce cas, cela ne changerait en rien la décision à prendre (3b). Dans cette phrase (3c') apparaît comme une explicitation de "une raison de plus ", un prédicat contenu en (3b) : non seulement en vertu du connecteur causal "parce que..", mais en vertu de la correspondance entre les termes "raison" et "prouver". Reste la proposition (3c") : bien qu'il n'y ait aucun marqueur de surface, elle doit être reliée à (3a) pour être vraiment la "raison de plus" annoncée. Cependant aucune relation transversale de contenu ne peut justifier l'inférence de "s'il me convainc" à "il en convaincra d'autres" ! Elle apparaît arbitraire, sauf si on se rappelle (2) : s'il me convainc alors que personne ne peut me convaincre, alors il en convaincra bien d'autres. C'est la proposition (2) qui justifie implicitement l'inférence de (3a) à (3c").

Il ne fait aucun doute que, dans l'organisation de ce texte, les différentes propositions remplissent chacune une fonction spécifique et n'ont pas toutes le même statut. Mais ce statut y est exclusivement déterminé par les relations sémantiques transversales, c'est-à-dire par les correspondances de contenu existant entre les propositions. La prise en compte du contenu est donc primordiale pour la compréhension de l'argumentation. En outre le statut des propositions est relatif à un champ contextuel variable. Ce champ n'y est pas défini par une opération délimitant le contexte d'un pas, comme dans la démarche déductive. Cela tient au fait que l'argumentation reste liée à la démarche discursive. Or celle-ci procède par accumulation de propositions nouvelles, chacune étant susceptible d'avoir des relations sémantiques transversales avec toutes les autres. De la même manière, les arguments s'ajoutent les uns aux autres, se renforcent mutuellement et leur contenu doit avoir un rapport direct avec la thèse soutenue ou réfutée. Au contraire, la démarche déductive procède localement, par substitution d'une proposition nouvelle (une conclusion intermédiaire) à des propositions antérieures qui ne sont pas la conclusion à démontrer. Et ainsi, de pas en pas, le raisonnement déductif progresse vers sa conclusion-cible. Par conséquent, les différents pas d'un raisonnement déductif ne se renforcent pas mutuellement et ne peuvent pas s'opposer comme des arguments dans une démarche argumentative. Cette différence apparaît de façon évidente dès que l'on envisage leurs représentations respectives. Un raisonnement déductif se représente par un

graphe propositionnel orienté vers une extrémité unique. Un texte se représente par un réseau de relations transversales sur une distribution tabulaire des constituants des différentes phrases du texte (Duval 1986, p. 79-85).

3.2 La suite des phrases doit respecter une cohérence d'ancrage thématique sur les objets introduits au début du texte : "un élément de contenu étant introduit, le texte le reproduit régulièrement...et construit ainsi un fond de repère thématique suivi...ou dérivé.." (Charolles p. 20). Cette reproduction s'effectue par répétition. Dans le passage de Sartre cité plus haut le phénomène de répétition est évident : "me convaincre" se retrouve en (1), (2) et (3). Il y a naturellement d'autres mécanismes que la simple reprise des mêmes termes pour assurer cette répétition (pronominalisation, référenciation déictique conceptuelle, substitution lexicale...). L'important est de voir que ces mécanismes de répétition assurent une "continuité thématique" entre toutes les phrases du texte.

Or si on considère que dans une démonstration ce sont les hypothèses données au départ qui introduisent les objets d'ancrage thématique, force est de constater que la validité d'une démonstration n'entraîne pas la cohérence d'ancrage thématique du texte qui la présente. La cohérence thématique ne peut être observée que localement, au voisinage d'un pas de démonstration.

3.3 L'organisation discursive des propositions en une phrase et celle des phrases en un texte est strictement linéaire. Comment exprimer sous cette contrainte des données indépendantes qui doivent être considérées conjointement ou des inférences qui doivent être effectuées en parallèle? Une réponse triviale vient immédiatement : il y a d'une part la coordination et d'autre part la possibilité de rappels ou de renvois en arrière. C'est oublier un autre phénomène important, la globalisation descriptive : on regroupe dans une même expression des données ou des relations distinctes mais semblables¹.

Comparons les énoncés suivant relevés dans un manuel de 5ème (collection Pythagore 1987, p.162-163):

"Un quadrilatère vérifiant l'une des conditions suivantes est un parallélogramme:

-les côtés opposés sont parallèles. (4)

-Deux côtés opposés sont parallèles et ont même longueur." (5).

L'énoncé (4) est un cas de globalisation descriptive. Comme l'énoncé (5), lequel coordonne deux propositions, il requiert deux vérifications indépendantes l'une de l'autre. Si on peut estimer que cette globalisation ne pose aucune difficulté quand elle s'accompagne d'une figure, ou même d'une "image mentale", en revanche elle risque de masquer la nécessité algorithmique de deux opérations distinctes de vérification. Et nous

¹ Nous devons cette remarque à F. Pluvillage qui a attiré notre attention sur ce phénomène.

verrons que ce risque est loin d'être négligeable quand on regarde les premières productions de démonstration par les élèves.

B) l'organisation des propositions en un graphe orienté

On prendra soin de bien distinguer deux utilisations didactiques différentes des graphes pour introduire au raisonnement déductif en géométrie.

La première en introduit la construction à partir de ses extrémités initiales et de son extrémité terminale (en admettant bien sûr que ce soit l'élève lui-même qui construise le graphe et non point l'ordinateur ou l'enseignant). Les extrémités initiales, qui correspondent aux hypothèses, et l'extrémité finale, qui correspond à la conclusion-cible, sont placées respectivement en haut et en bas d'une feuille, ou d'un écran. Il s'agit alors de les relier en trouvant les noeuds intermédiaires. Ce type d'introduction privilégie l'appréhension globale de l'organisation déductive dans ses enchaînements, et plus particulièrement, la progression non-linéaire vers une conclusion-cible. Il montre la possibilité de deux parcours, l'un en descendant vers la conclusion-cible, l'autre remontant vers les hypothèses. Cette possibilité d'un double parcours peut faciliter la découverte d'une démonstration. Mais elle centre l'attention sur la recherche des théorèmes à utiliser et non pas sur la façon dont les théorèmes sont utilisés. Elle pourrait éventuellement avoir une fonction heuristique.

La deuxième utilisation didactique introduit la construction du graphe à partir de règles concernant le statut des propositions dans un pas de déduction (Egret). Les extrémités du graphe ne sont plus fixées dans un cadre. Les consignes de la tâche ne sont plus orientées vers la recherche des noeuds intermédiaires pour obtenir un chemin entre les extrémités fixées. Elles sont, au contraire, orientées sur les différences de statut à l'intérieur d'un pas de déduction. Rien n'est indiqué sur l'organisation globale du graphe. Ce type d'introduction privilégie l'appréhension locale du fonctionnement d'un pas de déduction. Il montre l'organisation ternaire des pas de déduction, et, plus particulièrement, il permet de différencier l'organisation des propositions dans le raisonnement déductif et leur articulation dans le raisonnement argumentatif. Cela facilite la découverte non pas d'une démonstration particulière, mais de la manière dont fonctionne une démonstration. Elle centre l'attention sur le statut opératoire des propositions indépendamment leur contenu. Elle correspond à une tâche d'organisation déductive des propositions. Elle a une fonction de contrôle.

Aucun de ces deux modes de présentation, texte ou graphe propositionnel, ne paraît donc à lui seul suffisant pour rendre transparent aux élèves les caractéristiques du fonctionnement déductif par rapport à celles d'une démarche argumentative ou par rapport

à une explication. C'est seulement le passage d'une production dans un mode à la production correspondante dans l'autre mode que les élèves peuvent prendre conscience de la spécificité du R.D. Ce que nous avons appelé, par ailleurs "l'articulation de registres" est essentielle. Encore faut-il ici privilégier la seconde utilisation didactique des graphes par rapport à la première. Encore faut-il, en outre, ne faire jouer à cette construction que le rôle d'un support intuitif pour saisir une organisation déductive de propositions. La production linguistique d'un texte reste le but, dans la mesure où elle seule permet de définir et d'exprimer la différence des statuts opératoires et celle des valeurs épistémiques liées aux propositions (Duval 1990).

III) Critères pour l'analyse des Productions de Démonstrations par des élèves .

Il n'y a pas une manière mais plusieurs de présenter une démonstration dans le langage naturel. Ainsi l'organisation ternaire d'un pas de déduction peut être exprimée en une seule phrase ou en plusieurs. Le statut opératoire des propositions n'impose aucun ordre : on peut aussi bien commencer par la conclusion que par les propositions d'entrée. Enfin, même s'il existe des termes conventionnellement adoptés, le statut opératoire des propositions peut être marqué de façons très différentes. Cela entraîne des variations rédactionnelles importantes entre les productions des élèves, et cela dans le cadre d'une même expérience. Cela veut dire donc que non seulement il serait aberrant de proposer aux élèves un modèle de présentation ou de rédaction, mais aussi qu'on ne peut fixer à l'avance une liste de marques de surface pour analyser les productions de démonstrations, même du point de vue de leur correction mathématique.

Cependant toutes doivent refléter, de façon très explicite, les caractéristiques propres à une organisation déductive de propositions. Les textes produits par les élèves peuvent ainsi être analysés par une grille de questions pour lesquelles il est possible de répondre par OUI ou par NON. Cette grille peut être facilement justifiée à partir de l'analyse de la démarche déductive que nous avons présentée en I. Mais en fait son élaboration résulte de la comparaison entre les différentes productions des élèves, du début à la fin de l'expérience, et des contrastes qu'elles présentent. Cette grille condense une description complète des multiples aspects de la démarche déductive que les élèves ont d'eux-mêmes intégrés sans qu'ils leur aient été expliqués. Elle ne peut donc qu'être un outil de diagnostic et non pas l'esquisse d'un contenu d'enseignement. Cela est évident si l'on a pas oublié l'expérience décrite plus haut. Mais cet outil diagnostique n'a rien non plus d'arbitraire ou d'artificiel, il correspond à une transformation qualitative des productions qui peut être facilement obtenue et observée.

Nous distinguerons deux séries de questions, l'une pour les textes et l'autre pour les représentations.

A) Pour l'analyse des textes.

Questions concernant la structure ternaire du pas de déduction (voir 1.1)

5.1 Le Théorème est-il présenté en relation avec d'autres propositions ?

5.1.1 Au moins une des propositions d'entrée correspondant au théorème présenté est-elle mentionnée pour l'application du théorème?

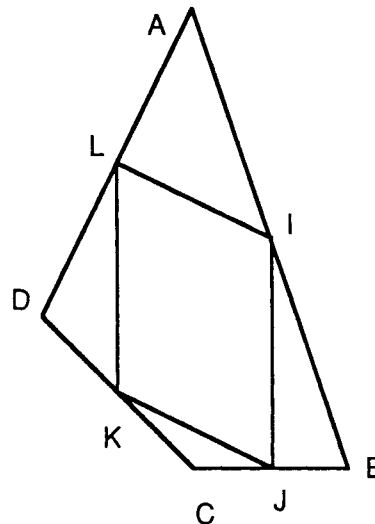
5.1.2 La conclusion correspondant à l'application du théorème est-elle présentée?

5.2 Si un théorème doit être appliqué deux fois, y a-t-il distinction de deux pas de déduction ou globalisation descriptive?

Voici trois textes d'élèves sur le problème suivant :

ABCD est un quadrilatère
I,J,K,L sont les milieux de
AB,BC,CD, et DA.

Démontrer que IJKL est un
parallélogramme.



LAX: " (1) *D'après le théorème des milieux, une droite qui coupe deux côtés d'un triangle en leurs milieux, elle est parallèle au troisième côté et le segment entre les 2 points est la moitié du troisième côté.*

(2)*Or, en traçant la droite AC, de même pour BD, on obtient dans les 2 cas 2 triangles dont les 2 côtés sont coupés en leurs milieux.*

(3)*Et si un quadrilatère (en l'occurrence IJKL) a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme."*

Dans ce texte, (1) et (3) énoncent deux règles d'inférence (un théorème et une définition). Mais ces deux règles ne sont reliées à aucune proposition. Car (2) énonce seulement comment faire apparaître la situation d'application du théorème des milieux, en globalisant les deux situations similaires d'application. La réponse aux quatre questions ci-dessous (5.1,...) est donc NON-NON-NON-NON.

ERB: " (1) On peut dire que $IJKL$ est un parallélogramme, car en m'inspirant du théorème des milieux je trace la diagonale AC .

(2) On peut dire, grâce à ce théorème, que dans le triangle ABC : $IJ \parallel AC$, et dans le triangle ADC : $LK \parallel AC$,
donc $IJ \parallel LK$.

(3) Et toujours partant du théorème des milieux je trace la diagonale BD ; on peut dire, toujours grâce à ce théorème, que dans le triangle BCD : $KJ \parallel BD$, et que dans le triangle BAD : $LI \parallel BD$ donc $KJ \parallel LI$.

(4) Puisque $LI \parallel KJ$ et $IJ \parallel LK$, donc $IJKL$ est un parallélogramme."

Dans ce texte, la référence au théorème des milieux en (2) et en (3) est explicitement reliée à la conclusion autorisée par ce théorème. Mais les propositions d'entrée de ce théorème ne sont pas du tout indiquées. Les expressions "en m'inspirant du théorème.." et "partant du théorème.." sont à cet égard significatives. En revanche le texte distingue explicitement deux applications différentes du théorème des milieux, (2) et (3). Les réponses aux quatre questions ci-dessus sont donc: OUI-NON-OUI-OUI.

MART: " (1) Comme le théorème des milieux nous dit que : une droite (ici IJ ou JK ou KL ou LI) passant par les milieux de deux côtés d'un triangle et parallèle au 3ème côté, la longueur des segments joignant les milieux de deux côtés est la moitié de la longueur du 3ème côté.

(2) Ici I milieu de AB , J milieu de BC , K milieu de CD et L milieu de DA , IJ parallèle à LK , LI parallèle à KJ .

(3) Comme un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, j'en conclus que I, J, K, L est un parallélogramme."

Dans ce texte, le théorème des milieux est donné en (1), ses propositions d'entrée et la conclusion qu'il autorise sont données en (2). On peut donc dire que le théorème est relié à d'autres propositions, conformément à l'organisation ternaire d'un pas de déduction. En revanche, le pas de déduction effectué pour la situation d'un triangle et celui effectué dans pour l'autre situation de triangle ne sont pas distingués comme deux opérations à effectuer séparément l'une de l'autre. La réponse aux quatre questions ci-dessus sera donc: OUI-OUI-OUI-NON.

Comme on peut le constater, ces quatre questions permettent de bien différencier les deux textes de ERB et de MART. Une seule réponse NON est en général un indice suffisant d'une non-perception de ce qu'est un pas de déduction. Les réponses aux questions suivantes vont venir permettre de préciser ce diagnostic. En revanche s'il y avait dans le texte un pas de déduction pour lequel la séquence serait OUI-OUI-OUI-OUI, tandis que pour les autres pas on ne trouverait des séquences comportant des NON, on pourrait parler, au contraire, de perception du fonctionnement d'un pas de déduction; les

déficiences constatées pour les autres pas seraient alors à chercher au niveau de la maîtrise de l'organisation globale.

Question concernant la structure binaire du théorème à appliquer

5.3 Toutes les propositions d'entrée du théorème sont -elles données ou le texte de l'élève n'en mentionne-t-il qu'une seule?

Questions concernant le statut opératoire des propositions.

5.4 La différence de statut entre les propositions qui forment un pas de déduction est-elle marquée explicitement par l'emploi de conjonction ou de verbes d'attitude propositionnelle ?

5.5 Les marqueurs employés pour un pas de déduction sont réutilisés de la même manière à chaque pas de déduction ?

Dans MART ci-dessus, il y a apparition de marques pour le pas (3) d'organisation binaire: "comme...(définition), j'en conclue...". ERB, recourt aussi à des marqueurs pour différencier les statuts: " on peut dire que (conclusions), grâce au (règle d'inférence), donc (autre conclusion). Mais les textes de DELPH et SCH, donnés plus haut, présentent un marquage systématique des statuts opératoires. Nous avons déjà relevé celui de DELPH. SCH répète pour chaque pas de déduction " Sachant que...en passant parje sais que, ou je conclue que...)". Nous avons trouvé dans d'autres textes : "puisque...(propositions d'entrée), selon le théorème..., proposition principale (conclusion). les marques de surface peuvent être très variées.

Question concernant l'enchaînement des pas de déduction.

5.6 Y-a-t-il des conclusions intermédiaires qui ne sont pas réutilisées comme propositions d'entrée?

Pour le dernier pas de déduction, il y a recyclage des conclusions obtenues en propositions d'entrée dans le texte ERB mais non dans celui MART. On peut aisément vérifier que le recyclage est systématique dans les textes DELPH et SCH.

5.7 Si des marqueurs sont employés pour souligner le passage d'un pas à un autre, sont -ils différents de ceux employés pour marquer le statut opératoire des propositions à l'intérieur d'un pas de déduction?

Pour marquer le passage d'un pas à un autre DELPH utilise les adverbes "pui", "ensuite".

B) Pour l'analyse des représentations.

Questions préalables concernant la segmentation de la représentation en propositions.

6.1 Les propositions contenues dans les cases (les noeuds) sont-elles pertinentes pour la démonstration?

6.2 Les propositions sont-elles toutes distribuées à raison d'une seule par case?

Questions concernant la structure ternaire d'un pas de déduction

6.3 Les cases contenant une règle sont-elles le point de départ d'une flèche vers une case contenant la conclusion produite par l'application de la règle ?

6.4 Les cases contenant une règle sont-elles le point d'arrivée d'une flèche, ou de plusieurs, venant d'une case, ou de plusieurs, contenant une proposition d'entrée?

Questions concernant le caractère non linéaire de l'organisation déductive .

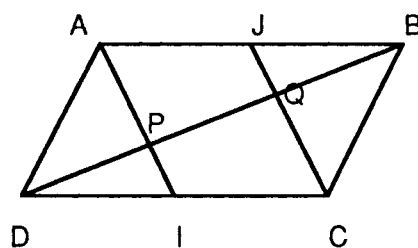
6.5 Le graphe construit présente-t-il des branches?

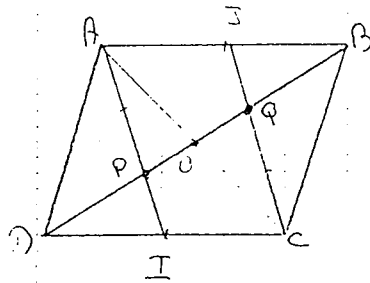
6.6 Les hypothèses constituent-elles des points de départ indépendant intégrés pour la construction du graphe?

Voici trois représentations des mêmes élèves, respectivement LAX, MART et ERB, sur le problème ci-dessous qui a été donné dans les premières semaines de l'expérience. Nous les avons choisies parce qu'elles illustrent bien le type de représentation que la plupart des élèves ont d'abord élaboré. Elles montrent donc, peut-être mieux que les textes initiaux, les incompréhensions et les confusions dans lesquelles les élèves se perdent généralement, et dont ils doivent prendre conscience, pour découvrir le fonctionnement du raisonnement déductif. Naturellement leurs productions ont évolué et la plupart d'entre eux sont parvenus ensuite à élaborer des représentations pour lesquelles l'application de la grille de questions ci-dessus conduit à une séquence de OUI.

Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
Les points I et J sont les milieux des côtés CD et AB

Démontrer que les segments DP, PQ et QB ont même longueur.





- Hypothèses :
- ABCD parallélogramme
 - I milieu de DC
 - J " de AB
 - PPQB alignés
 - API " "
 - JQC " "

Démontrer que $DP = PQ = QB$ pour former de réseau

Résumé
hypothèse

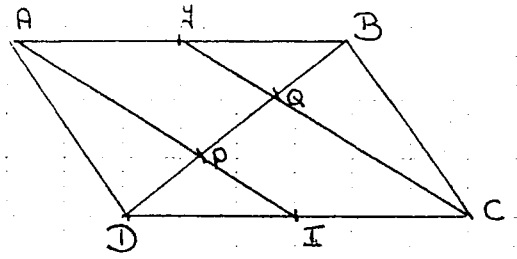
DQC Triangle

- AI coupe 2 côtés en leur milieux de DQC
- Théorème des milieux
- P milieu de DQ
- $DP = PQ$

$DP = PQ$
 $QB = PQ$
 donc $DP = PQ = QB$

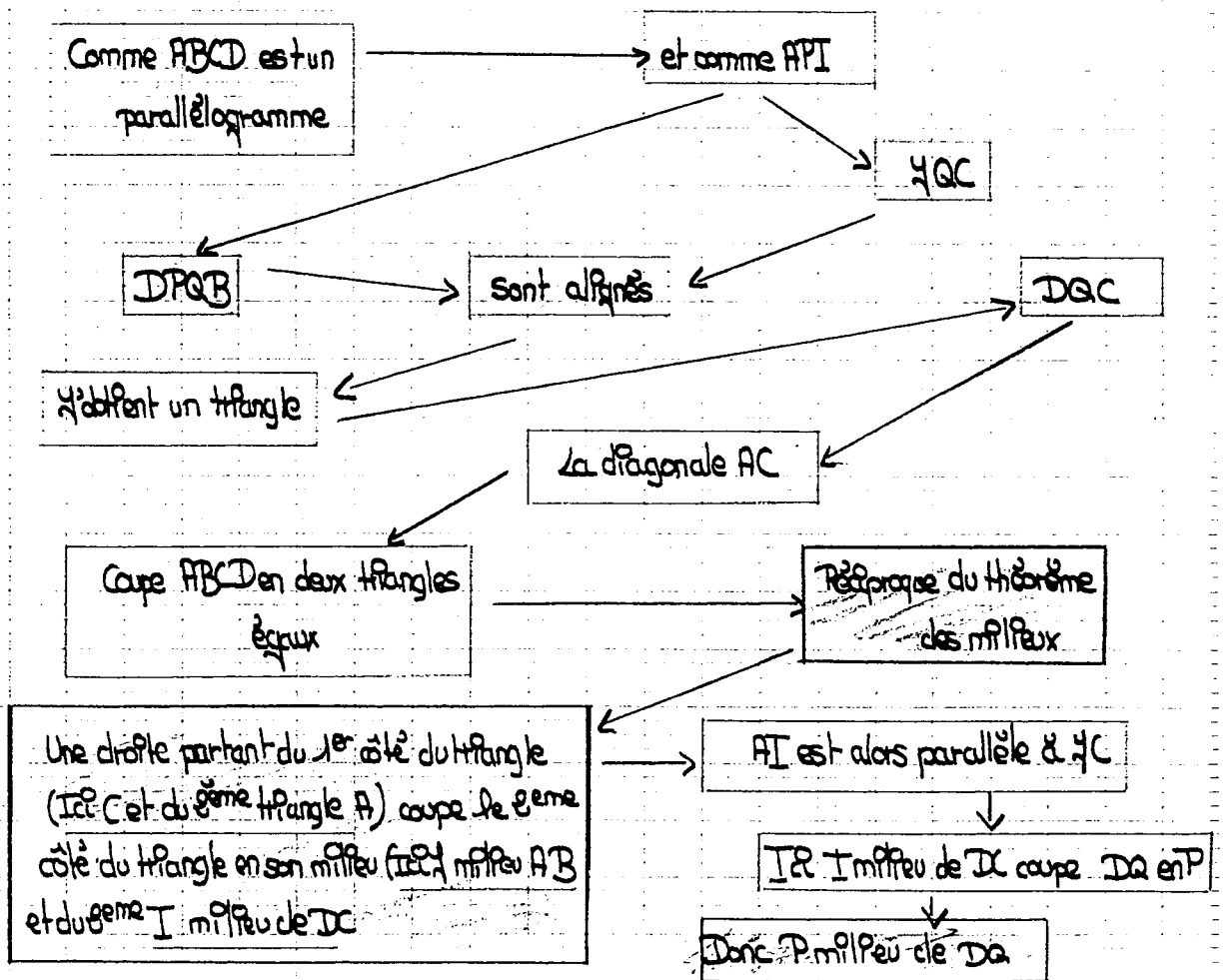
BAD Triangle

- JC coupe 2 côtés en leur milieux de BAD
- Théorème des milieux
- Q milieu de PB
- $QB = PQ$



Conclusion: Démontrez que P est milieu de DQ.

- : Conclusion
- : Proposition
- : Théorème



I milieu de $[AB]$
 J milieu de $[BC]$
 K milieu de $[CD]$
 L milieu de $[DA]$

le théorème des milieux

on trace la diagonale $[AC]$

dans le triangle $A\hat{B}C$
 $[IJ] \parallel [AC]$

dans le triangle $A\hat{D}C$:
 $[LK] \parallel [AC]$

$[IJ] \parallel [LK]$

le théorème des milieux

on trace la diagonale $[BD]$

dans le triangle $B\hat{C}D$:
 $[KJ] \parallel [BD]$

dans le triangle $B\hat{A}D$:
 $[LI] \parallel [BD]$

$IJKL$
 parallélogramme

$[LI] \parallel [KJ]$
 $[LK] \parallel [IJ]$

L'application de la grille de questions à la première représentation, celle de LAX, nous donne la séquence suivante : OUI-NON-OUI-OUI(?)-OUI-NON.

La réponse est NON à la question 6.2 parce que la case finale comporte trois égalités, la dernière étant reliée aux deux autres par "donc". Le point délicat est relatif à la question 6.4. La proposition "*AI coupe 2 côtés en leur milieu de DCQ*" est un bel exemple de globalisation descriptive: elle regroupe une proposition donnée comme hypothèse ("AI est le milieu de DC") et la conclusion intermédiaire à établir par ce pas de déduction ("P est milieu de DQ"). Il y a donc un cercle vicieux qui ne semble pas avoir été perçu puisque LAX conclut : " $DP=PQ$ ". Aurait-il suffi de lui faire remarquer que "*AI coupe 2 côtés en...*" affirme déjà " $DP=PQ$ " pour le convaincre ? Il ne le semble pas.

En fait c'est l'utilisation du théorème comme règle algorithmique de substitution qui est ici la source de l'erreur. L'application du théorème des milieux exige la vérification de chacune de ses deux conditions, c'est-à-dire une démarche qui exclut toute globalisation descriptive. Or cette segmentation algorithmique des propositions est méconnue: il suffit pour appuyer cette interprétation de voir qu'aucune des hypothèses énumérées sous forme de liste en en-tête n'est littéralement réutilisée. La voie est alors ouverte pour une confusion entre le théorème des milieux et le le théorème réciproque. Remarquons enfin que LAX construit ici son raisonnement comme une argumentation : les différentes propositions qui précèdent les deux conclusions intermédiaires ont une continuité thématique de contenu marquée par la répétition du mot "milieu" (voir plus haut 3.1 et 3.3).

L'application de la grille de questions à la seconde représentation, celle de MART, nous donne la séquence suivante: NON-OUI-NON-NON-OUI-NON. Cette représentation est remarquable parce qu'elle n'est qu'un texte découpé en pièces de puzzle reliées ensuite par des flèches de façon à reconstituer les phrases et l'ordre des phrases. Elle illustre la difficulté de certains élèves d'une part à sortir du registre proprement linguistique et d'autre part à segmenter un texte en unités d'information pertinentes.

L'application de la grille de questions à la troisième représentation, celle de ERB, nous donne la séquence : NON-NON-NON-OUI-NON-NON.

Cette représentation ne segmente plus un texte comme la représentation précédente mais elle en garde la caractère linéaire. Par exemple elle met bout à bout deux séquences similaires, chacune commençant par le "théorème des milieux" et chacune se terminant par une conclusion de parallélisme entre deux segments. Cette mise bout à bout de deux séquences indépendantes conduit d'une part à relier la deuxième "théorème des milieux" à la première conclusion, et d'autre part à répéter cette première conclusion dans la case où est mentionnée la seconde conclusion de parallélisme. C'est un peu de cette manière que

les choses se présenteraient s'il avait s'agi d'écrire directement un texte : d'une part la deuxième séquence commencerait juste après la conclusion de la première séquence, et, d'autre part, il faudrait rappeler la première conclusion intermédiaire pour le dernier pas de déduction. En ce sens le deuxième NON de la séquence et le cinquième s'annulent. On pourrait donc penser que ERB est ici simplement gêné par les contraintes d'une représentation qu'il ne maîtrise pas et qui est étrangère à la compréhension de la démarche déductive. En fait c'est l'organisation interne d'un pas de déduction qui n'est pas encore perçue. La règle de substitution apparaît en tête de chaque séquence et ne conduit pas directement à une conclusion. Et cette règle n'a pas à proprement parler de propositions d'entrée pertinentes : la première fois le théorème des milieux suit la liste de toutes les hypothèses mentionnées en bloc, et, la seconde fois, il suit une conclusion intermédiaire qui ne peut être sa condition d'application.

IV Caractéristiques des premières productions de démonstration par des élèves de 4^{ième}.

Nous n'indiquerons ici que les principales parmi celles que nous avons observées dans le corpus des productions recueillies au cours de l'expérience. L'énumération qui suit ne prétend pas être exhaustive. L'examen d'un autre corpus permettrait peut-être de l'enrichir.

L'absence de propositions d'entrée, ou l'absence de conclusion, pour les théorèmes mentionnés. Cette absence ne résulte pas d'un oubli, mais d'une méconnaissance de l'organisation ternaire d'un pas de déduction. Le théorème est utilisé comme un argument, ou comme l'idée générale d'une explication. C'est seulement à partir de la découverte de cette organisation ternaire qu'il peut y avoir prise de conscience de la différence entre statut opératoire et contenu et de l'indépendance du premier par rapport au second.

La globalisation descriptive soit de pas de déduction similaires, soit des conditions d'entrée. Ici, la structure ternaire du pas de déduction est prise en compte, mais son caractère algorithmique, et non pas simplement discursif, n'est pas encore perçu.

Une conclusion non encore obtenue prise comme condition d'entrée. C'est la "faute de raisonnement" classiquement observée dans les premières productions de démonstration, et sans "circonstances atténuantes" aux yeux des mathématiciens. Elle tient en réalité à la non-différenciation entre le statut opératoire des propositions et leur contenu. Celui-ci s'impose au détriment de celui-là. D'une façon plus générale cette "faute de raisonnement" signifie que l'élève s'en tient encore à un fonctionnement

discursif du raisonnement, comme dans l'argumentation, et qu'il n'en a pas encore perçu le caractère algorithmique. Elle relève des mêmes raisons que la globalisation descriptive.

La non prise en compte de toutes les propositions d'entrée nécessaires pour l'application d'un théorème. Une seule proposition d'entrée est mentionnée alors que son application en exige deux ou plus. Cette déficience ne concerne plus ici le fonctionnement d'un pas de déduction, mais la compréhension de la structure interne du théorème utilisé. Tout se passe comme si les élèves dans leur lecture de la phrase énonçant le théorème ne retenaient qu'une seule des conditions d'application: certains éprouvent peut-être des difficultés pour comprendre l'indépendance des deux propositions coordonnées par "et".

L'organisation linéaire du graphe. Elle révèle la prégnance de l'organisation discursive des propositions dans la langue qui impose une condition de linéarité stricte: deux propositions viennent nécessairement l'une après l'autre. Ce mode d'expression dans la langue naturelle rend difficile pour certains élèves une appréhension globale de la structure profonde d'une démarche discursive.

Non-séparation, en noeuds différents, des propositions qui interviennent séparément dans la démarche déductive. Ici c'est une difficulté plus générale qui se manifeste et qui concerne la segmentation du discours naturel. Elle peut être aisément observée dans les réponses à n'importe quel questionnaire portant sur un texte français. Beaucoup d'élèves répondent en recopiant soit une phrase entière soit un passage plus large encore, alors que l'information pertinente pour répondre est toute entière contenue dans un segment de phrase, soit une expression, soit une proposition. Ils ne peuvent isoler l'information du contexte immédiat dans lequel elle apparaît.

CONCLUSION

L'argumentation et la globalisation descriptive sont deux pratiques inhérentes à l'usage du langage naturel. Elles apparaissent spontanément dans toute activité de discussion et de description. Elles font, d'une certaine manière, écran au fonctionnement du raisonnement déductif, au moins pour la grande majorité des élèves. Il apparaît donc important de proposer des tâches qui d'une part les fassent sortir de ces deux pratiques dominantes, et qui, d'autre part, les fassent exprimer dans leur langage leur élaboration d'une organisation déductive de propositions.

Cette approche ne s'est pas seulement révélée efficace pour la découverte de la démarche déductive, elle a été fructueuse pour la phase heuristique, comme si une compréhension, de l'intérieur, de ce qu'est une organisation déductive donnait des clés pour chercher, ou pour apprendre à chercher. Mais l'intérêt de cette expérience ne s'arrête pas là. Elle laisse entrevoir d'autres perspectives qui, pour être sérieusement explorées, suppose la

collaboration avec des enseignants de Français. Non pour ce qui concerne l'amélioration de la rédaction des textes, mais pour ce qui concerne la segmentation du discours en unités d'information pertinentes et pour ce qui concerne une compréhension en profondeur des textes. Le type de travail qui a été mené à propos des problèmes de géométrie pourrait être aussi conduit à propos de textes français. Nous pensons même qu'il devrait être mené conjointement en Mathématiques et en Français (Duval 1990). Cela permettrait d'explorer et d'évaluer toutes les possibilités de l'approche que nous avons présentée. Mais, mais, mais...

REFERENCES

- Arsac G.**, 1988, Les Recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France, in *R.D.M.*, 9.3, p.247-280.
- Charolles M.**, 1978, Introduction aux problèmes de la cohérence des textes, in *Langue Française*, 38, p.7-41.
- Duval R.**, 1986, *Lecture et Compréhension des Textes*, IREM Strasbourg.
- Duval R.**, 1990, Pour une approche cognitive de l'argumentation, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 3, p. 195-221.
- Egret M.A.**, 1990, Propositions pour introduire les élèves de collège à l'activité de démonstration,
- Perelman C. & Olbrechts-Tyteca L.**, 1958, *Traité de l'argumentation*. Paris P.U.F.