JEAN-LUC PRIGENT

Étude de quelques modèles financiers en temps discret et en temps continu. Convergence en loi des stratégies optimales

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1
« Probabilités », , p. 90-114
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___1_90_0>

ETUDE DE QUELQUES MODELES FINANCIERS EN TEMPS DISCRET ET EN TEMPS CONTINU. CONVERGENCE EN LOI DES STRATEGIES OPTIMALES.

PRIGENT Jean-Luc
I.R.M.A.R.
Université de RENNES I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX

Résumé

L'objet de cette étude est d'illustrer sur des exemples simples (des hypothèses assez fortes sont introduites pour obtenir des résultats explicites) la convergence en loi d'une suite de processus solutions de problème d'optimisation en temps discret vers la solution du problème d'optimisation correspondant en temps continu. Les questions abordées ici sont issues de la recherche de stratégies optimales de gestion de portefeuilles financiers.

Présentation du modèle général

I - Le Modèle en temps discret

A - Le problème d'optimisation de l'investisseur

Les transactions boursières sont supposées ici se dérouler sur un intervalle de temps $[0, T]$ aux instants déterministes $\frac{k}{n}T, k \in \{0, -, n\}$. Dans la suite, on supposera que $T = 1$.

A chaque instant $\frac{k}{n}$, l'investisseur répartit le montant de son portefeuille noté $X_{n,k}$:

1 - Une somme notée $s_{n,k}$, correspondant au montant de sa consommation sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$.

2 - Un vecteur d'investissement financier, noté

$$\pi_{n,k} \left| \begin{array}{l} \pi^0_{n,k} \\ \pi^1_{n,k} \end{array} \right.$$

pour la période $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$.

$\pi^0_{n,k}$ désigne le montant de son placement sur l'actif non risqué,

$\pi^1_{n,k}$ celui sur l'actif risqué.

Ses préférences sont représentées sous la forme d'une fonction d'utilité qu'on supposera ici séparable et additive par rapport au temps (Fonction d'utilité de Von Neumann Morgenstern.)

B - Le Modèle

On considère l'espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_n)$ représentant "les aléas" qui interviennent dans la détermination du système des prix des actifs. On supposera ici que $|\Omega_n| < \infty$.

Ce système se compose d'un actif non risqué dont le prix en $\frac{k}{n}$ est noté $S^0_{n,k}$ et d'un actif risqué dont le prix en $\frac{k}{n}$ est noté $S^1_{n,k}$.

On note $(1+Y^0_{n,k})$ et $(1+Y^1_{n,k})$ les rendements des actifs : On a les relations suivantes :

$$\begin{cases} S^0_{n,k} & = S^0_{n,k-1}[1+Y^0_{n,k}] \\ S^1_{n,k} & = S^1_{n,k-1}[1+Y^1_{n,k}] \end{cases}$$

Remarque : ici, $Y^0_{n,k}$ est déterministe et $Y^1_{n,k}$ est aléatoire.

On désigne par $\tilde{S}_{n,k} = \frac{S_{n,k}}{S^0_{n,k}}$ le système des prix actualisé.

On considère la filtration $(\mathcal{F}_{n,k})_k$ engendrée par $(Y^1_{n,k})_k$: $\mathcal{F}_{n,k} = \sigma[Y^1_{n,\ell}/\ell \leq k]$.

On note $R_{n,k}$ la matrice des paiements : Cette matrice a pour ligne i les valeurs des rendements des actifs pour l'aléa w_i et elle a pour colonne j les valeurs des rendements de l'actif j. Ainsi, la richesse que l'on reçoit dans l'état w_i si l'on détient le portefeuille

$$\Pi \left| \begin{array}{l} \pi^0 \\ \pi^1 \end{array} \right.$$

est donné par la relation : $X(w_i) = \pi^0 R_{w_i,0} + \pi^1 R_{w_i,1}$.

Examen des stratégies : Elles se présentent ici sous la forme d'une suite finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\theta_n = (\theta_{n,k})_k \text{ avec } \theta_{n,k} \left| \begin{array}{l} \pi^0_{n,k} \\ \pi^1_{n,k} \\ s_{n,k} \end{array} \right. , \theta_{n,k} \ \mathcal{F}_{n,k} - \text{mesurable.}$$

On note Θ_n l'ensemble des stratégies admissibles qui sera précisé sur les exemples.

Examen de la valeur du portefeuille $(X_{n,k})_k$.

$(X_{n,k})_k$ vérifie l'équation aux différences :

$$X_{n,k+1} - X_{n,k} = \pi^0_{n,k} Y^0_{n,k+1} + \pi^1_{n,k} Y^1_{n,k+1} - s_{n,k+1}.$$

Examen des préférences de l'investisseur Elles sont représentées par une fonction, dite d'utilité, sur Θ_n

$$U_n : \left| \begin{array}{ll} \Theta_n & \to \mathbb{R} \\ \Theta_n & \to U_n(\theta_n) = \mathbb{E}_{P_n}[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n,k} u_1(s_{n,k}) + u_2(X_{n,n})] \end{array} \right.$$

où $\gamma_{n,k}$ est un coefficient d'actualisation de la forme $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-\rho s} ds, \ \rho > 0$.

Hypothèses sur u_1 et u_2

$u_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, C^2, strictement croissante et concave. (D'autres hypothèses seront faites suivant les exemples.)

Critère de choix : La stratégie θ^*_n est dite "optimale" si elle maximise $U_n(\theta_n)$ sur Θ_n.

II - Le Modèle en temps continu

On considère l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Le système des prix $(S_t)_{t\in[0,1]}$ **est du type** :

$$S_t \left| \begin{array}{l} S_t^0 \\ S_t^1 \end{array} \right.$$

où S_t^0 est le prix de l'actif non risqué et S_t^1 celui de l'actif risqué. On a les relations

$$\left\{ \begin{array}{ll} dS_t^0 & = S_t^0 \alpha^0(t) dt \\ dS_t^1 & = S_t^1 \alpha^1(t) dt + a(S_t^1, t) dW_t \end{array} \right.$$

a désignant une fonction de $\mathbb{R}^+ \times [0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On considère la filtration $\mathcal{F}_t$ définie par $\mathcal{F}_t = \sigma[R_s^1, s \leq t]$.

Les stratégies sont du type : $(\theta_t)_{t\in[0,1]}$ avec

$$\theta_t \left| \begin{array}{l} \pi_t^0 \\ \pi_t^1 \\ c_t \end{array} \right. , \theta_t \ \mathcal{F}_t - \text{mesurable.}$$

On note Θ l'ensemble des stratégies admissibles.

Examen de la valeur du portefeuille : $(X_t)_t$

$(X_t)_t$ vérifie l'équation : $dX_t = \pi_t^0 \frac{dS_t^0}{S_t^0} + \pi_t^1 \frac{dS_t^1}{S_t^1} - c_t dt$.

Exemples

Exemple 1 On ne cherche pas ici à étudier et à utiliser la structure du marché financier mais, en faisant des hypothèses assez fortes sur les fonctions d'utilité u_i et en supposant que les stratégies sont d'un certain type markovien, on résoud le problème d'optimalité en temps discret par une méthode de programmation dynamique. On montre alors que les stratégies optimales convergent (au sens $\mathcal{L}(\mathbb{D}^3)$) vers celles du problème en temps continu.

A - Le Modèle

Soit $\Omega_n = \{0,1\}^n$ l'espace des aléas.

Les rendements sont du type

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_{n,k}^0 & = \frac{1}{n}\alpha^0 \\ Y_{n,k}^1 & = \frac{1}{n}\alpha^1 + \beta^1 \Delta_{n,k} \end{array} \right.$$

avec : $\alpha^0, \alpha^1, \beta^1$ constantes positives strictement et $(\Delta_{n,k})_k$ suite de v.a.r indépendantes en k, de même loi définie par $\mathbb{P}_n[\Delta_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}}] = \mathbb{P}_n[\Delta_{n,k} = -\frac{1}{\sqrt{n}}] = \frac{1}{2}$.

Hypothèses sur les coefficients α^0, α^1 et β^1

$H1-1$: $-1 < \frac{\alpha^0-\alpha^1}{\beta^1} < 1$ (non dominance stochastique d'ordre 1). (on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\alpha^1}{n} - \frac{\beta^1}{\sqrt{n}} < \frac{\alpha^0}{n} < \frac{\alpha^1}{n} + \frac{\beta^1}{\sqrt{n}}$).

$H1-2 : \alpha^1 > \alpha^0$.

$\Theta_n = \{\theta_n / \theta_n$ **admissible**$\}$: On note $x_{n,k} = X_{n,k} + s_{n,k}$ (remarque :

$$\begin{cases} x_{n,0} &= x_0 \\ x_{n,n} &= X_{n,n} \end{cases}$$

H2-1 : $\forall k \in \{0, -, n-1\}, s_{n,k} > 0$ et $X_{n,k} > 0$ (exigence d'un "minimum vital" et impossibilité d'emprunt ou de vente à découvert...)

H2-2 = $\forall k \in \{0, -, n-1\}, \theta_{n,k} = \theta(n, k, x_{n,k})$ (L'investisseur choisit sa stratégie à l'instant $\frac{k}{n}$ en fonction de la valeur de son portefeuille à cet instant).

Fonctions d'utilité : $u_1(x) = u_2(x) = \ln(x)$ (critère de Kelly).

B - Recherche de stratégies optimales :

Les hypothèses précédentes permettent d'utiliser le principe d'optimalité de la programmation dynamique.

1ère étape : On suppose connue la valeur du portefeuille $x_{n,n-1}$ à l'instant $\frac{n-1}{n}$ le problème d'optimisation devient : $\max[\gamma_{n,n-1} \ln(n s_{n,n-1}) + \mathbb{E}(\ln(X_n)]$ où $\Theta_{n,n-1}$ représente l'ensemble des stratégies admissibles à l'instant $\frac{n-1}{n}$.

On peut le résoudre de la manière suivante : $X_{n,n-1}$ étant fixé, on examine
$\max[\gamma_{n,n-1} \ln(n X_{n,n-1}) + \mathbb{E}[\ln(\pi^0_{n,n-1}(1+\frac{\alpha^0}{n}) + (X_{n,n-1} - \pi^0_{n,n-1})(1 + \frac{\alpha^1}{n} + \beta^1 \delta_{n,n})]$

$$\left| \begin{array}{c} 0 \leq \pi^0_{n,n-1} \leq X_{n,n-1} \\ X_{n,n} > 0 \end{array} \right.$$

Hypothèse supplémentaire sur les rendements des actifs : (Pour l'obtention d'un maximum intérieur)

$$(1+\frac{\alpha_0}{n})^2 \leq \frac{1[(1+\frac{\alpha^1}{n})^2 - (\frac{\beta^1}{\sqrt{n}})^2] - 1}{(2\frac{\beta_1}{\sqrt{n}})^2}.$$

Remarque : Cette condition est évidemment satisfaite à partir d'un certain rang.

On obtient un maximum $\pi^{0*}_{n,n-1} = A_n \; X_{n,n-1}$ avec

$$A_n = \frac{(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{n})(1+\frac{\alpha^1}{n}) - \frac{{\beta^1}^2}{n}}{(\frac{\alpha^0-\alpha^1}{n^2}) - \frac{{\beta^1}^2}{n}}$$

On résoud alors :

$$\max_{\substack{\theta_{n,\ell} \\ \ell \geq k}} \left[\sum_{\ell=k}^{n-1} \gamma_{n,\ell} \ln[n(x_{n,\ell} - X_{n,\ell})] + \ln(X_{n,n}) \right]$$

en utilisant les résultats des $(n-k-1)$ problèmes d'optimisation précédents.

Remarque : A chaque étape k, la fonction d'utilité indirecte en $x_0, \ldots, x_{n,k}$ est du type

$$\begin{aligned} V_{n,k}(x_0, \ldots, x_{n,k}) &= V_{n,k}(x_{n,k}) \\ &= (1 + \sum_{i=k}^{n-1} \gamma_{n,i}) \ln(x_{n,k}) + \text{ constante.} \end{aligned}$$

Le problème d'optimisation à l'étape k est donc du type :

$$\begin{aligned} \max[\gamma_{n,k} \ \ln[n(x_{n,k} - X_{n,k}] \ &+ \ (1 + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{n,n-i}) \mathbb{E}[\ln(\pi^0_{n,k}(1 + \frac{\alpha^0}{n}) \\ &+ \ (X_{n,k} - \pi^0_{n,k})(1 + \frac{\alpha^1}{n} + \beta^1 \Delta_{n,k})] \end{aligned}$$

$$\text{Sous :} \left| \begin{array}{c} X_{n,k} \in]0, x_{n,k}[\\ \pi^0_{n,k} \in]x_{n,k}(-\dfrac{1 + \dfrac{\alpha^1}{n} - \dfrac{\beta^1}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\alpha^0 - \alpha^1}{n} + \dfrac{\beta^1}{\sqrt{n}}}), X_{n,k}] \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses du modèle, on obtient :

$$\begin{aligned} X^*_{n,k} &= x^*_{n,k} \left(\frac{1 + \sum_{i=1}^{k-1} \gamma_{n,n-i}}{1 + \sum_{i=1}^{k} \gamma_{n,n-i}} \right) \\ s^*_{n,k} &= x^*_{n,k} \left(\frac{\gamma_{n,k}}{1 + \sum_{i=k}^{n-1} \gamma_{n,i}} \right). \end{aligned}$$

Posons $\mu_{n,k} = \frac{1 + \sum_{k+1}^{n-1} \gamma_{n,\ell}}{1 + \sum_{k}^{n-1} \gamma_{n,\ell}}$, on a :

$$\begin{aligned} \pi^0_{n,k} &= (A_n \mu_{n,k}) x^*_{n,k} \text{ et } \pi^{1*}_{n,k} = (1 - A_n) \mu_{n,k} x^*_{n,k} \\ x^*_{n,k} &= (E_{n,k} + F_{n,k} \Delta_{n,k}) x^*_{n,k-1} = x_0 \prod_{\ell=1}^{k} (E_{n,\ell} + F_{n,\ell} \Delta_{n,\ell}) \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_{n,\ell} &= A_n \mu_{n,\ell-1}(1 + \frac{\alpha^0}{n}) + (1 - A_n) \mu_{n,\ell-1}(1 + \frac{\alpha^1}{n}) \\ F_{n,\ell} &= (1 - A_n) \mu_{n,\ell-1} \beta^1 \end{array} \right.$$

Remarques : ici, $E_{n,\ell} et F_{n,\ell}$ sont non aléatoires. $(x^*_{n,k})_k$ et $(\theta^*_{n,k})_k$ sont markoviennes (propriété due à l'hypothèse H2-2).

$$\forall n, \ \sum_{k=0}^{n} \ \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}[x^*_{n,k^2}] < \infty$$

et

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}[\|\theta^*_{n,k}\|^2] < \infty.$$

C - Convergence en loi des stratégies optimales

A partir des suites $(\theta_n, k^*)_k$ et $(x^*_{n,k})_k$, on construit les suites de processus cadlag suivantes :

$$(\theta^*_{n,t} \text{ définie par : } \forall t \in [0,1], \theta^*_n(t) \left| \begin{array}{ll} c^*_{n(t)} & = ns^*_{n,[nt]} \\ \pi^{0*}_{n(t)} & = \pi^{0*}_{n,[nt]} \\ \pi^{1*}_{n(t)} & = \pi^{1*}_{n,[nt]} \end{array} \right.$$

Remarque : On suppose ici que le montant $s^*_{n,k}$ est réparti uniformément sur la période $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$.

$(x_{n,t})^*_n$ est défini par : $\forall n, \forall t \in [0,1], x^*_{n(t)} = x^*_{n,[nt]}$.

1 - Convergence en loi de (x^*_n)

On a :

$$\begin{aligned} x^*_{n,k} &= x_0 \prod_{\ell=1}^{k}[(E_{n,\ell} - 1) + F_{n,\ell}\Delta_{n,\ell} + 1] \\ x^*_{n(t)} &= x^*_{n,[nt]} \end{aligned}$$

Introduisons le processus Z_n défini par

$$Z_n(t) = \sum_{\ell=1}^{[nt]}[(E_{n,\ell} - 1) + F_{n,\ell}\Delta_{n,\ell}].$$

On obtient : $x_n(t)^* = x_0 + \int_0^t x^*_n(s) dZ_n(s)$.

(a) Etude de Z_n

$$Z_n(t) = \sum_{k=1}^{[nt]}(E_{n,k} - 1) + \sum_{k=1}^{[nt]} F_{n,k}\Delta_{n,k}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{[nt]}(E_{n,k} - 1) &= \sum_{k=1}^{[nt]}((A_n(\frac{\alpha^0 - \alpha^1}{n}) + \frac{\alpha^1}{n} + 1)\mu_{n,k-1} - 1) \\ &= (A_n(\frac{\alpha^0 - \alpha^1}{n}) + \frac{\alpha^1}{n}) \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k-1} + \sum_{k=1}^{[nt]}(\mu_{n,k-1} - 1). \end{aligned}$$

Examinons : $\sum_{k=1}^{[nt]}(\mu_{n,k-1} - 1)$ On a :

$$\sum_{k=1}^{[nt]}(\mu_{n,k-1} - 1) = \sum_{k=1}^{[nt]} \frac{-\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-\rho s} ds}{1 + \int_{\frac{k+1}{n}}^{1} e^{-\rho s} ds}.$$

Posons : $f(x) = 1 + \int_x^1 e^{-\rho s} ds$ On a :

$$\sum_1^{[nt]}(\frac{-\int_{\frac{k+1}{n}}^{\frac{k}{n}} e^{-\rho s} ds}{1 + \int_{\frac{k+1}{n}}^{1} e^{-\rho s} ds}) = \sum_1^{[nt]} \frac{f(\frac{k}{n}) - f(\frac{k-1}{n})}{f(\frac{k-1}{n})} = \frac{1}{f_{n-}} \cdot f_n$$

avec $f_n(x) = f(\frac{k}{n})\mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}[}(x)$.

f_n est monotone et $\sup_{s\leq t} |\Delta f_n(s)|$ est majoré uniformément donc :

$$\frac{1}{f_{n-}} \cdot f_n \to \frac{1}{f_-} \cdot f.$$

Conséquence :

$$\sum_{k=1}^{[nt]}(\mu_{n,k-1} - 1) \underset{n}{\to} \log\left(\frac{1 + \int_t^1 e^{-\rho u} du}{1 + \int_0^1 e^{-\rho u} du}\right)$$

examinons :

$$[A_n(\frac{\alpha^0 - \alpha^1}{n}) + (\frac{\alpha^1}{n})] \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k-1}$$

on a : $A_n \underset{n}{\to} A = 1 + \dfrac{\alpha^0 - \alpha^1}{\beta'^2}$ et d'après ce qui précède,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k-1} \to t.$$

Donc :

$$[A_n(\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{n}) + (\frac{\alpha^1}{n})] \sum_{k=1}^{[nt]} \mu_{n,k-1} \underset{n}{\to} (A(\alpha^0 - \alpha^1) + \alpha^1)t, \forall t \in [0,1].$$

On a alors :

$$([A_n(\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{n}) + \frac{\alpha^1}{n}] \sum_{k=1}^{[nt]} (\mu_{n,k-1})_{t\in[0,1]} \to ((A(\alpha^0 - \alpha^1) + \alpha^1)t)_{t\in[0,1]}$$

(c'est une convergence d'intégrales de Stieltjes).

2 - Examinons $\sum_1^{[nt]} F_{n,k}\Delta_{n,k}$:

Ici : $F_{n,k} = (1 - A_n)B^1\mu_{n,k-1}$ et $(\Delta_{n,k})_k iid$ avec $\mathbb{P}_n[\Delta_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}}] = \mathbb{P}_n[\Delta_{n,k} = -\frac{1}{\sqrt{n}}] = \frac{1}{2}$.
On a : $F_{n,k} \to (1 - A)\beta^1$ (uniformément en k). On en déduit que :

$$(\sum_{k=1}^{[nt]} F_{n,k}\Delta_{n,k})_{t\in[0,1]} \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} (\tilde{Z}_t)_{t\in[0,1]}$$

où $\tilde{Z}_t = BW_t$ avec

$$\begin{cases} (W_t) \text{ mouvement brownien standard} \\ B = (\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1}). \end{cases}$$

Conséquence : $Z_n \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} Z$ où $Z_t = (A(\alpha^0 - \alpha^1) + \alpha^1)t + \log(\left(\frac{1+\int_t^1 e^{-\rho u} du}{1+\int_0^1 e^{-\rho u} du}\right) + \tilde{Z}_t$.

(b) **Etude de x_n^***

On a : $x_n^* = x_0\mathcal{E}(Z_n)$ (exponentielle de Doléans de Z_n).

Pour montrer la convergence de $\mathcal{E}(Z_n)$, on utilise les résultats suivants :

1 - Condition suffisante : (cf. AVRAM) de convergence de $\mathcal{E}(Z_n)$ vers $\mathcal{E}(Z)$:
$(Z_n, [Z_n, Z_n]) \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} (Z, [Z, Z])$.

2 - Résultat de JAKUBOWSKI-MÉMIN-PAGES $(Z_n)_n$ étant une suite de semimartingales convergente en loi vers une semimartingale continue Z, on a :

(a) : $(Z^n, [Z^n, Z^n]) \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} (Z, [Z, Z])$ si (Z^n) vérifie U.T. (uniforme tension) et

(b) : (Z^n) vérifie U.T. si :

$$\forall t > 0 \ \exists a > 0 \{\sum_{k=1}^{[nt]} |E^n(F_{n,k}\Delta_{n,k}\mathbf{1}_{\{|F_{n,k}\Delta_{n,k}|>a} | F^n_{k-1}, \ n \in \mathbb{N}\}$$

est stochastiquement bornée, condition satisfaite ici car $(F_{n,k}\Delta_{n,k})_k$ est uniformément bornée en n et k.

Conséquence : $x^*_n \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} x_0\mathcal{E}(Z)$ On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(Z)_t &= \exp[Z_t - Z_0 - \frac{1}{2}\langle Z^c_t, Z^c_t\rangle] \\
&= \exp[(\alpha^1 + \frac{1}{2}B^2) + \log\left(\frac{1 + \int_t^1 e^{-\rho u}du}{1 + \int_0^1 e^{-\rho u}du}\right) + BW_t].
\end{aligned}$$

(c) **Etude de θ^*_n**

On a :

$$\begin{array}{c|lll}
\theta^*_n(t) & c^*_n(t) & = n\left(\frac{\gamma_{n,[nt]}}{1+\sum_{\ell=[nt]}^{n-1}\gamma_{n,\ell}}\right) x^*_{n,[nt]} \\
(t<1) & \pi^{0*}_n(t) & = (A_n\mu_{n,[nt]})x^*_{n,[nt]} \\
 & \pi^{1*}_n(t) & = (1 - A_n\mu_{n,[nt]} - \frac{\gamma_{n,[nt]}}{1+\sum_{\ell=[nt]}^{n-1}\gamma_{n,\ell}})x^*_{n,[nt]}.
\end{array}$$

On obtient :

$$\theta^*_n \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^3)}{\Longrightarrow} \theta^*_{(t<1)} \text{ avec } \theta^*_t \left| \begin{array}{ll}
c^*(t) & = \Gamma(t)x_0\mathcal{E}(Z_t), \\
\pi^{0*}(t) & = Ax_0\mathcal{E}(Zt) \\
\pi^{1*}(t) & = (1-A)\ x_0\mathcal{E}(Zt)
\end{array}\right.$$

où

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\rho t}}{1 + \int_t^1 e^{-\rho u}du}.$$

Remarques :

1. On a donc : $X^*(t) = x^*_t = X_0\mathcal{E}(Z_t)$.
2. Les processus limites ont des trajectoires continues.
3. On a : $\Gamma \in \mathcal{C}[0,1]$ et Γ à valeurs dans $]0,1[$
   $A \in]0,1[$.

(d) **Etude de la convergence de S_n**

On a :

$$S_t^n \left| \begin{array}{l} S^0_{n,t} \\ S^1_{n,t} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{llll} S^0_{n(t)} & = S^0_{n,[nt]} & = S^0_0\mathcal{E}(Z^0_n)_t \text{ où } Z^0_n(t) & = \frac{[nt]\alpha^0}{n} \\ S^1_{n(t)} & = S^1_{n,[nt]} & = S^1_0\mathcal{E}(Z^1_n)_t \text{ où } Z^1_n(t) & = \frac{[nt]\alpha^1}{n} + \sum_{k=1}^{[nt]} \beta^1\Delta_{n,k}. \end{array} \right.$$

On obtient (mêmes arguments que précédemment pour $\mathcal{E}(Z^i_n) \Rightarrow \mathcal{E}(Z^i)$) :

$$S^n \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^2)}{\Longrightarrow} S \left| \begin{array}{ll} S^0(t) & = S^0\exp(\alpha_1 t) \\ S^1(t) & = S^1\exp[(\alpha_1 - \frac{1}{2}\beta_1^2)t + \beta^1 Wt]. \end{array} \right.$$

D - Résolution du problème en temps continu

On va rechercher ici des stratégies $(\theta_t)_{t\in[0,1]}$ sous l'hypothèse $\theta_t = \theta(t, X_t)$ avec une expression du type suivant :

$$\theta_t \left| \begin{array}{ll} c_t & = \tilde{\Gamma}_t X_t \\ \pi^0_t & = \tilde{\delta}_t \\ \pi^1_t & = (1 - \tilde{\delta}^2_t)X_t \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}, \tilde{\Delta} \in \mathcal{C}_{[0,1]} \text{ et sont à valeurs dans } [0,1] \\ E[\int_0^1 X_t^2] < \infty, X_t > 0 \ P.ps. \end{array} \right.$$

On a :

$$dX_t = \pi^0_t \frac{dS^0_t}{S^0_t} + \pi^1_t \frac{dS^1_t}{S^1_t} - c_t dt$$

d'où :

$$dX_t = X_t[(\alpha^0\tilde{\delta}_t + (1 - \tilde{\delta}_t)\alpha^1 - \tilde{\Gamma}_t)dt + (1 - \tilde{\delta}_t)\beta^1 dW_t]$$

donc $dX_t = X_t dY_t$ avec $dY_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ où

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(t) & = \alpha^0\tilde{\delta}_t + (1 - \tilde{\delta}_t)\alpha^1 - \tilde{\Gamma}_t \\ b(t) & = (1 - \tilde{\delta}_t)\beta^1. \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0\mathcal{E}(Y)_t \\ &= X_0\exp[\int_0^t a(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \beta^{1^2}(1 - \tilde{\Gamma}(s))ds + \int_0^t b(s)dWs] \end{aligned}$$

posons $\alpha(t) = \frac{1}{2}\beta^{1^2}(1 - \tilde{\delta}(t))^2 + a(t)$.

Examen du problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} U(\theta) &= \mathbb{E}[\int_0^1 e^{-\rho s}\ln(c(s))ds + \ln(X_1)] \\ &= \mathbb{E}[\int_0^1 (e^{-\rho s}\ln(\tilde{\Gamma}(s)) + \alpha(s) + e^{-\rho s}\int_0^s \alpha(u)du)ds + \int_0^1 \beta(s)dW_s \\ &+ \int_0^1 e^{-\rho s}(\int_0^s \beta(u)dW_u)ds] \end{aligned}$$

or :

$$E[\int_0^1 \beta(s)dWs] = 0$$

$$E[\int_0^1 (e^{-\rho s}\int_0^1 \beta(u)dW_u)ds] = 0$$

donc

$$U(\theta) = \int_0^1 (e^{-\rho s}\ln(\tilde{\Gamma}_s) + \alpha(s) + e^{-\rho s}\int_0^s \alpha(u)du)ds].$$

Conséquence : Le problème d'optimisation devient :

$$\max(\int_0^1 (e^{-\rho s}\ln(\tilde{\Gamma}_s) + \alpha(s) + e^{-\rho s}\int_0^s \alpha(u)du)ds)$$

$$\text{Sous : } \left| \begin{array}{l} \tilde{\Gamma} \in \mathcal{C}[0,1]; 0 < \tilde{\Gamma} < 1 \\ \tilde{\delta} \in \mathcal{C}[0,1]; 0 < \tilde{\delta} < 1. \end{array} \right.$$

On munit l'ensemble $\mathcal{C}[0,1]$ des applications continues sur $[0,1]$ de la norme $\sup_{[0,1]} |\cdot|$

$\theta = \{f \in \mathcal{C}[0,1]/0 < f < 1\}$ est un ouvert.

Résolution :

$$\emptyset \left| \begin{array}{c} \Theta \times \Theta \to I\!R \\ (\tilde{\Gamma},\tilde{\delta}) \to \int_0^1 (e^{-\rho s}\ln(\tilde{\Gamma}(s) + \alpha(s) + e^{-\rho s}\int_0^1 \alpha(u)du)ds \end{array} \right.$$

$\emptyset$ est différentiable et l'on obtient :

$$d\emptyset(\tilde{\Gamma}^*,\tilde{\delta}^*) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Gamma}^*(s) = \frac{e^{-\rho s}}{1+\int_s^1 e^{-\rho u}du} \\ \tilde{\delta}^*(s) = 1 + \frac{\alpha^0-\alpha^1}{\beta'^2} \end{array} \right.$$

$\emptyset$ étant concave, $(\tilde{\Gamma}^*,\tilde{\delta}^*)$ est un maximum.

Expression de $(X_t^*)_t$ (rappel : $B = (\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1})^2$). On a :

$$X_t^* = X_0 \exp[\int_0^t \alpha(s)^* ds + \int_0^t b(s)^* dW_s]$$

donc :

$$X_t^* = X_0 \left(\frac{1+\int_t^1 e^{-\rho u}du}{1+\int_0^1 e^{-\rho u}du}\right) \exp[(\alpha + \frac{1}{2}B^2)t + BW_t]$$

Expression de $(\theta_t^*)_t$:

$$\theta_t^* \left| \begin{array}{ll} c_t^* & = \tilde{\Gamma}_t^* X_t^* \\ \pi_t^{0*} & = \tilde{\delta}_t^* X_t^* \\ \pi_t^{1*} & = (1-\tilde{\delta}_t^*)X_t^* \end{array} \right.$$

Conclusion : On a donc identité entre ces processus optimaux et les limites des processus $(X_n^*)_n$ et $(\theta_n^*)_n$.

Remarque : On peut montrer que $U_n(\theta_n^*) \underset{n}{\to} U(\theta^*)$ (Convergence des fonctions d'utilité indirectes). On utilise pour cela l'équiintégrabilité de $(x_{n,k})^*$ et $(\frac{1}{x_{n,k}})^*$ en n et k et l'inégalité : $\forall x \in I\!R^+, |\ln(x)| \leq \sup(x, \frac{1}{x})$.

Exemple 2 : Dans cet exemple, on étudie la structure du marché financier (non arbitrage, marché complet...) et on recherche des stratégies optimales sans hypothèse à priori de type markovienne. Les conditions imposées à $(Y^1_{n,k})_k$ permettent d'obtenir d'une part un modèle "limite" qui soit sans arbitrage et complet, et, d'autre part, la convergence en loi des stratégies optimales.

A - Le modèle en temps discret

$\Omega_n = \{0,1\}^n$, $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n); \overline{\omega_k} = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$

$I\!P_{n,k}(\omega_k) = \frac{1}{2}$; $I\!P_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} I\!P_{n,k}(\omega_k) = (\frac{1}{2})^n$

$$\begin{cases} Y^0_{n,k} & = \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{k}{n}) \\ Y^1_{n,k} & = \frac{1}{n}\alpha^1(\frac{k}{n}) + \beta^1(\frac{k}{n}\Delta_{n,k}) \end{cases}$$

avec ici :

1) $\alpha^0, \alpha^1, \beta^1$ fonctions de $\mathcal{C}([0,1])$, positives strictement.

2) $(\Delta_{n,k})_k$ définie comme dans l'exemple 1.

Hypothèses sur les fonctions α_0, α_1 et β^1

H1-1 : $-1 < \frac{\alpha^0 - \alpha^1}{\beta^1} < 1$

H1-2 : $\alpha^1 > \alpha^0$

$\Theta_n = \{\theta_n / \theta_n$ admissible $\}$

H2-1 $\forall k \in \{0, -, n-1\}$, $s_{n,k} > 0$ et $X_{n,n} > 0$.

B - Etude du marché financier

On introduit ici les deux propriétés essentiellement étudiées sur les marchés financiers [cf. [4], [5] et [6]] et on adopte la présentation d'Harrison-Pliska.

Définition : Une stratégie de gestion $(\theta_{n,k}$ est autofinançante si $\forall k \in \{0, -, n-1\}, s_{n,k} = 0$ (consommation nulle).

On a encore : $X_{n,k} = \pi^0_{n,k} + \pi^1_{n,k}$ désignant la valeur du portefeuille à l'instant $\frac{k}{n}$ juste après la variation des prix,

$$\pi^0_{n,k} + \pi^1_{n,k} = \frac{\pi^0_{n,k-1}}{S^0_{n,k-1}} S^0_{n,k} + \frac{\pi^1_{n,k-1}}{S^1_{n,k-1}} S^1_{n,k}.$$

Notion d'arbitrage

Définition 1 : Une opportunité d'arbitrage est une stratégie θ_n auto-finançante telle que :

$$\begin{cases} (1)\ I\!P_n[X_0 = 0] & = 1 \\ (2)\ I\!P_n[X_{n,n} \geq 0] & = 1 \text{ et } I\!P_n[X_{n,n} > 0] > 0 \end{cases}$$

l'investisseur a un capital initial nul et termine à l'instant 1 avec un profit positif, strictement positif sur un ensemble de mesure strictement positive.

Proposition 1 [cf. [6]]

Le marché financier ne contient pas d'opportunité d'arbitrage si et seulement s'il existe une probabilité $\mathbb{Q}_n$ équivalente à $\mathbb{P}_n$ telle que, sous $\mathbb{Q}_n$, le système des prix actualisé soit une $(\mathcal{F}_{n,k})_k$ martingale.

On appellera "A.O.A." un tel marché.

Notion de marché complet

Définition 2 : Soit X une v.a. $\mathcal{F}_{n,n}$-mesurable et positive. On dit que X est simulable s'il existe une stratégie auto-finançante telle que $X_{n,n}(\theta_n) = X$.

Définition 3 : Le marché financier est dit "complet" si toute v.a.X $\mathcal{F}_{n,n}$-mesurable et positive est simulable !

Proposition 2 : cf.[6]

Un marché financier AOA est complet si et seulement s'il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{Q}_n$ équivalente à $\mathbb{P}_n$ pour laquelle les prix actualisés sont des martingales.

On se propose ici d'étudier le marché financier à n périodes à partir des marchés financiers aux différents instants $\frac{k}{n}$. On obtient alors une expression de la probabilité $\mathbb{Q}_n$ en fonction des probabilités $\mathbb{Q}_{n,k}^{\overline{\omega}_{k-1}}$ de ces marchés intermédiaires.

Proposition 3 : *Le marché financier à n périodes est AOA si et seulement si : $\forall k, \forall\overline{\omega}_{k-1}$, le marché financier intermédiaire à l'instant $\frac{k}{n}$, conditionné par $\overline{\omega}_{k-1}$ est AOA.*

Proposition 4 : *Le marché financier à n périodes est complet si et seulement si : $\forall k, \forall\overline{\omega}_{k-1}$, le marché financier intermédiaire à l'instant $\frac{k}{n}$, conditionné par $\overline{\omega}_{k-1}$ est complet.*

Proposition 5 : *Sur l'exemple considéré, les marchés intermédiaires sont AOA et complets.*

Considérons les probabilités $\mathbb{Q}_{n,k}^{\overline{\omega}_{k-1}}$ associées à ces marchés. (cf. Proposition 2 ci-dessus).

Proposition 6 : *La probabilité $\mathbb{Q}_n$ définie par*

$$\mathbb{Q}_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{Q}_{n,k}^{\overline{\omega}_{k-1}}(\omega k)$$

est la mesure de probabilité associée au marché à n périodes.

On obtient une expression de $\mathbb{Q}_{n,k}^{\overline{\omega}_{k-1}}$: on utilise ici le lemme de Farkas, on a :

$$AOA \Rightarrow \forall(x,y) \begin{cases} x(1+Y_{n,k}^0 + y(1+Y_{n,k}^1(0)) \geq 0 \\ x(1+Y_{n,k}^1 + y(1+Y_{n,k}^1(1)) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x+y \geq 0$$

en appliquant le lemme de Farkas à ces formes linéaires, on a : $\exists\lambda_{n,k}(0), \lambda_{n,k}(1)$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_{n,k}(0)(1+Y_{n,k}^0) + \lambda_{n,k}(1)(1+Y_{n,k}^0) & = 1 \\ \lambda_{n,k}(0)(1+Y_{n,k}^1(0)) + \lambda_{n,k}(1)(1+Y_{n,k}^1(1)) & = 1 \end{cases} \quad et\ \lambda_{n,k}(0) > 0; \lambda_{n,k}(1) > 0.$$

On trouve les expressions :

$$\begin{cases} \lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1}, 0) & = \frac{Y_{n,k}^1(\overline{\omega}_{k-1},1) - Y_{n,k}^0}{(1+Y_{n,k}^0)(Y_{n,k}^1(-,1) - Y_{n,k}^1(-,0))} \\ \lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1}, 0) & = \frac{Y_{n,k}^0 - Y_{n,k}^1(\overline{\omega}_{k-1},0)}{(1+Y_{n,k}^0)(Y_{n,k}^1(\overline{\omega}_{k-1},1) - Y_{n,k}^1(\overline{\omega}_{k-1},0))} \end{cases}$$

donc :

$$\lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},\cdot) = \frac{|Y^1_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},\cdot) - Y^0_{n,k}|}{(1+Y^0_{n,k})(Y^1_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},1) - Y^1_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},0))}$$

on a donc, en posant :

$$\mathbb{Q}\,{}^{\overline{\omega}_{k-1}}_{n,k}(\cdot) = \frac{\lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},\cdot}{)}\lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},1) + \lambda_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},0)$$

une mesure de probabilité et

$$\mathbb{Q}\,{}^{\overline{\omega}_{k-1}}_{n,k}(\cdot) = \frac{|Y^1_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},\cdot) - Y^0_{n,k}|}{Y^1_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},1) - Y_{n,k}(\overline{\omega}_{k-1},0))}.$$

Soit

$$\eta_{n,k} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}[\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}_n}/\mathcal{F}_{n,k}]$$

on a :

$$Y_{n,k}(\overline{\omega}_k) = \prod_{\ell=1}^{k} 2\mathbb{Q}\,{}^{\overline{\omega}_{\ell-1}}_{n,\ell}(\omega_\ell) = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{2|Y^1_{n,\ell}(\overline{\omega}_{\ell-1},\cdot) - Y^0_{n,\ell}|}{(Y^1_{n,\ell}((\overline{\omega}_{\ell-1},1) - Y^1_{n,\ell}(\overline{\omega}_{\ell-1},0))}.$$

Notation : On pose

$$\nu_{n,k} = \prod_{\ell=1}^{k} \lambda_{n,\ell}.$$

On a donc

$$\eta_{n,k} = \nu_{n,k} \times \prod_{\ell=1}^{k} 2(1+Y^0_{n,\ell}).$$

C - Recherche des stratégies optimales

On prendra

$$\Theta_n = \left\{\theta_n \,\middle|\, \begin{array}{ll} \forall k,\ s_{n,k} & > 0 \\ X_{n,n} & > 0 \end{array}\right\}$$

On utilise ici une méthode déjà employée dans [2] mais en adoptant une approche en termes d'espérance conditionnelle.

Problème d'optimisation

$$\max_{\theta_n} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n,k} u_1(s_{n,k}) + u_2(X_{n,n})\right].$$

Hypothèse sur les fonctions d'utilité u_i. $u_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, classe C^2, strictement croissante et concave et telle que

$$\lim_{0+} u_i' = +\infty,\ \lim_{+\infty} u_i' = 0$$

On note $J_i = (u_i')^{-1}$ (exemple ; $u_i(x) = 2\sqrt{x}$. On a alors $J_i(x) = \frac{1}{x^2}$).

On peut se ramener à un problème d'optimisation ne faisant intervenir que les variables $(s_{n,k})_k$ et $X_{n,n}$.

En effet :

$$X_{n,k} = \pi^0_{n,k} + \pi^1_{n,k} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \pi^0_{n,k} \\ \pi^1_{n,k} \end{pmatrix} \rangle$$

Or

$${}^tR_{n,k+1}(\overline{\omega}_k) \begin{pmatrix} \lambda_{n,k+1}(\overline{\omega}_k, 0) \\ \lambda_{n,k+1}(\overline{\omega}_k, 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$R_{n,k+1}(\overline{\omega}_k) \begin{pmatrix} \pi^0_{n,k} \\ \pi^1_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X_{n,k+1} + s_{n,k+1}) & (\overline{\omega}_k, 0) \\ (X_{n,k+1} + s_{n,k+1}) & (\overline{\omega}_k, 1) \end{pmatrix}$$

donc

$$X_{n,k}(\overline{\omega}_k) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\overline{\omega}_k)}_{n,k+1}} [X_{n,k+1} + s_{n,k+1}][1 + Y^0_{n,k}]^{-1}$$

On itère ce procédé et on obtient :

$$\begin{aligned} X_{n,k}(\overline{\omega}_k) &= \sum_{\ell=k+1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\overline{\omega}_k}_{n,k+1}} [\cdots \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\overline{\omega}_{\ell-1}}_{n,\ell}} (s_{n,\ell})] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1 + Y^0_{n,i})^{-1} \\ &+ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\overline{\omega}_k}_{n,k+1}} [\cdots \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{\overline{\omega}_{n-1}}_{n,n}} (X_{n,n}] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1 + Y^0_{n,i})^{-1} \end{aligned}$$

ou encore

Proposition 7 :

$$\begin{aligned} X_{n,k}(\cdot) &= \sum_{\ell=k+1}^{n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} [s_{n,\ell}/\mathcal{F}_{n,\ell}] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1 + Y^0_{n,i})^{-1} \\ &+ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} [X_{n,n}/\mathcal{F}_{n,n}] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1 + Y^0_{n,i})^{-1}. \end{aligned}$$

Remarques : On peut retrouver ce résultat de la manière suivante :

On sait (cf. [5]) que si θ_n est une stratégie auto-finançante alors $(\tilde{X}_{n,k})_k$ suite des valeurs du portefeuille par rapport au système des prix actualisés est une $\mathbb{Q}_n$-martingale par rapport à $(\mathcal{F}_{n,k})_k$.

On obtient donc :

$$X_{n,k} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n} [X_{n,n}/\mathcal{F}_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{n} (1 + Y^0_{n,k})^{-1}.$$

En utilisant les propriétés des marchés intermédiaires on peut déterminer une stratégie auto-finançante θ'_n générant la même valeur terminale $X_{n,n}$ qu'une autre stratégie quelconque θ_n (mais avec une valeur initiale différente en général).

$$\text{Considérons } \theta_{n,n-2} \left| \begin{array}{l} \pi^0_{n,n-1} \\ \pi^1_{n,n-2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta_{n,n-1} \left| \begin{array}{l} \pi^0_{n,n-1} \\ \pi^1_{n,n-1} \end{array} \right.$$

On a :

$$X_{n,n} = R_{n,n} \begin{bmatrix} \pi^0_{n,n-1} \\ \pi^1_{n,n-1} \end{bmatrix}$$

Or, il existe

$$\begin{pmatrix} \pi'^{0}_{n,n-2} \\ \pi'^{1}_{n,n-2} \end{pmatrix}$$

tel que :

$$s_{n,n-1} = R_{n,n-1} \begin{bmatrix} \pi'^{0}_{n,n-2} \\ \pi'^{1}_{n,n-2} \end{bmatrix}.$$

De plus,

$$\pi'^{0}_{n,n-2} + \pi'^{1}_{n,n-2} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{n,n-1}^{\varpi_{n-2}}}[s_{n,n-1}](1+Y^{0}_{n,n-1})^{-1}$$

Donc :

$$\theta'_{n,n-2} \left| \begin{array}{l} \pi^{0}_{n,n-2} - \pi'^{0}_{n,n-2} \\ \pi^{1}_{n,n-2} - \pi'^{1}_{n,n-2} \\ s_{n,n-2}, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta'_{n,n-1} \left| \begin{array}{c} \pi^{0}_{n,n-1} \\ \pi^{1}_{n,n-1} \\ 0 \end{array} \right.$$

est auto-finançante en $\frac{n-1}{n}$ et génère $X_{n,n}$. En itérant ce procédé, on obtient une stratégie auto-finançante qui génère $X_{n,n}$ et dont les valeurs $X'_{n,k}$ vérifient :

$$X'_{n,k} = X_{n,k} - \sum_{\ell=k+1}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[s_{n,k}/\mathcal{F}_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1+Y^{0}_{n,i})^{-1}, k < n-1.$$

En particulier :

$$\left\{ \begin{array}{ll} X'_{n,n} & = X_{n,n} \\ X'_{n,n-i} & = X_{n,n-1} \\ X'_{0} & = X_0 - s_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[s_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{\ell}(1+Y^{0}_{n,i})^{-1}. \end{array} \right.$$

On a donc :

$$X'_{n,k} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[X'_{n,n}/\mathcal{F}_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{n} (1+Y^{0}_{n,i})^{-1}$$

d'où

$$\begin{aligned} X_{n,k} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[X_{n,n}/\mathcal{F}_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{n} (1+Y^{0}_{n,i})^{-1} \\ &+ \sum_{\ell=k+1}^{n-1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[s_{n,\ell}/\mathcal{F}_{n,k}] \prod_{i=k+1}^{\ell} (1+Y^{0}_{n,i})^{-1}. \end{aligned}$$

□

Recherche des stratégies optimales : Il s'agit de résoudre

$$\max \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n,k} u_1(n\, s_{n,k}) + u_2(X_{n,n}) \right]$$

$$\text{Sous} \left| \begin{array}{ll} \forall k,\ s_{n,k} & > 0 \\ X_{n,n} & > 0 \\ X_0 & = \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} s_{n,k} \frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{k}(1+Y^{0}_{n,i})} + \frac{X_{n,n}\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^{k}(1+Y^{0}_{n,i})} \right]. \end{array} \right.$$

Considérons pour cela le Lagrangien :

$$\mathcal{L}_n = \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n,k} u_1(n\ s_{n,k}) + u_2(X_{n,n})\right] + \lambda_n(X_0 - \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{n,k}\eta_{n,k}}{\Pi(\cdot)} + X_{n,n}\frac{\eta_{n,n}}{\Pi(\cdot)}\right].$$

On a, à l'optimum :

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial s_{n,k}}(\overline{\omega}_k) & = 0\ \forall k,\ \forall \overline{\omega}_k \\ \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial X_{n,n}}(\omega) & = 0\ \forall \omega \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} s^*_{n,k} & = \frac{1}{n} J_1\left[\frac{\lambda_n \eta_{n,k}}{n\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^k (1+Y^0_{n,i})}\right] \\ X^*_{n,n} & = J_2\left[\frac{\lambda_n \eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^n (1+Y^0_{n,i})}\right] \end{array}\right.$$

avec λ_n tel que :

$$X_0 = \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} J_1\left[\frac{\lambda_n \eta_{n,k}}{n\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^k (1+Y^0_{n,i})}\right] + J_2\left[\frac{\lambda_n \eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^n (1+Y^0_{n,i})}\right]\right].$$

Posons

$$f_n(x) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} J_1\left[\frac{x\eta_{n,k}}{n\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^k (1+Y^0_{n,i})}\right]\frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^k (1+Y^0_{n,i})} + J_2\left[\frac{x\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^n (1+Y^0_{n,i})}\right]\frac{\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^n (1+Y^0_{n,i})}\right].$$

Remarque : on a $\lambda_n = f_n^{-1}(X_0)$ (> 0).

Propriétés de f_n :

f_n $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^+$, strict $\downarrow$, classe C^1, $\lim\limits_0 f_n = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f_n = 0$ donc $(f_n)^{-1}$ existe, est strict $\downarrow$, C^1 avec $\lim\limits_0 f_n^{-1} = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f_n^{-1} = 0$.

D - Etude des convergences

1 - Convergence du système des prix

Rappel :

$$\left|\begin{array}{ll} S^0_{n,k} & = S^0_{n,k-1}(1 + \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{k}{n})), \alpha^0 \in \mathcal{C}[0,1] \\ S^1_{n,k} & = S^1_{n,k-1}(1 + \frac{1}{n}\alpha^1(\frac{k}{n}) + \beta^1(\frac{k}{n})\Delta_{n,k}), \alpha^1 \text{ et } \beta^1 \in \mathcal{C}[0,1] \end{array}\right.$$

Proposition : *On a*

$$S_n \stackrel{\mathcal{L}(\boldsymbol{D}^2)}{\Longrightarrow} S$$

avec

$$S_t \left|\begin{array}{ll} S^0_t & = S^0_0 \exp(\int_0^t \alpha^0(s)ds) \\ S^1_t & = S^1_0 \exp(\int_0^t (\alpha^1 - \frac{1}{2}(\beta^1)^2)(s)ds) + \int_0^t \beta^1(s)dW_s \end{array}\right.$$

(*preuve* : même argument que dans l'exemple (1)).

2 - Convergence de η_n :

$$\eta_{n,k} = \prod_{\ell=1}^{k} \frac{|\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{\ell}{n}) - \alpha^1(\frac{\ell}{n} - \beta^1(\frac{\ell}{n})\Delta_{n,\ell}|}{\frac{\beta^1(\frac{\ell}{n})}{\sqrt{n}}}$$

donc :

$$\eta_{n,k} - \eta_{n,k-1} = \eta_{n,k-1}\left(\frac{|\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{k}{n}) - \alpha^1(\frac{k}{n})\beta^1(\frac{k}{n})\Delta_{n,k}|}{\frac{\beta^1(\frac{k}{n})}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$

Posons :

$$T_{n,k} = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\left| \frac{\frac{1}{n}(\cdot) - \beta^1(\frac{\ell}{n})\Delta_{n,\ell}}{\frac{\beta^1(\frac{\ell}{n})}{\sqrt{n}}} \right| - 1 \right)$$

$$T_{n(t)} = T_{n,[nt]}.$$

Proposition :

$$T_n \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} T$$

avec

$$T_t = \frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^1}(t)dt.$$

Preuve : D'après les inégalités,

$$\frac{1}{n}\alpha^1(\frac{k}{n}) - \beta^1(\frac{k}{n})\Delta_{n,k} < \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{k}{n}) < \frac{1}{n}\alpha^1(\frac{k}{n}) + \beta^1(\frac{k}{n})\Delta_{n,k}$$

on a :

$$\left| (\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^1})(\frac{k}{n}) \right| < \sqrt{n}.$$

On en déduit que :

$$T_{n,k} = \sum_{\ell=1}^{k} (\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^1})(\frac{\ell}{n})\Delta_{n,\ell}$$

par les mêmes arguments que précédemment pour la convergence des exponentielles de Doléans, on en déduit que :

$$\eta_n = \mathcal{E}(T_n) \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} \eta = \mathcal{E}(T)$$

avec

$$\eta_t = \exp[\int_0^t (\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^1})(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^1})^2(s)ds].$$

3 - Etude de la convergence des stratégies optimales

1 - Etude de $(c_n^*)_t$ et $X_{n,n}^*$:

Pour cela, étudions la convergence de $(\lambda_n)_n$ où $\lambda_n = f_n^{-1}(X_0)$.

Lemme 1 : $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, strict $\downarrow$, classe C^1 vérifiant

$$\begin{cases} \lim_{0^+} f_n & = +\infty \\ \lim_{+\infty} f_n & = 0 \end{cases}$$

alors :

$$f_n \xrightarrow{s} f \Rightarrow f_n^{-1} \xrightarrow{s} f^{-1}$$

Examinons la convergence simple des f_n

On a :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}_n}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} J_1(\frac{x \cdot \eta_{n,k}}{n\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^{k}(1 + \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))})(\frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{k}(1 + \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))})\right] \\ &+ J_2\left[(\frac{x \cdot \eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))})(\frac{\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))})\right] \end{aligned}$$

(a) Etude de la convergence du 1er terme :

Rappel :

$$\begin{cases} \gamma_{n,k} & = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-\rho s} ds, \ \rho > 0 \\ (\eta_{n,k})_n & : \eta_n \Rightarrow \eta \end{cases}$$

D'autre part,

$$h \left| \begin{array}{ll} I\!\!D_{I\!\!R}[0,1] & \rightarrow I\!\!D_{I\!\!R}[0,1] \text{ est continue} \\ (X_t)_t & \rightarrow \int_0^t g(X_s)ds \text{ avec } g \text{ continue} \end{array} \right.$$

or :

$$\left(\frac{x\eta_{n,[nt]}}{n\gamma_{n,[nt]} \prod_{k=1}^{[nt]}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{k}{n}))} \right)_{t\in[0,1]} \overset{\mathcal{L}(I\!\!D^1)}{\Longrightarrow} \left(\frac{x\eta(t)e^{\rho t}}{\exp(\int_0^t \alpha^1(s)ds)} \right)_{t\in[0,1]}$$

On en conclut :

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} J_1 \left(\frac{x\eta_{n,k}}{n\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}\right) \frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))} \right)_{t\in[0,1]} \overset{\mathcal{L}(I\!\!D^1)}{\Longrightarrow}$$
$$\left(\int_0^1 J_1\left(\frac{x\eta(t)e^{\rho t}}{\exp(\int_0^t \alpha^1(s)ds)}\right) \frac{\eta(t)}{\exp(\int_0^t \alpha^1(s)ds)} dt \right)_{t\in[0,1]}.$$

Remarque : Pour obtenir la convergence en espérance, on introduit une hypothèse supplémentaire "raisonnable" sur u_i du type $\exists \alpha < -2$, $\exists c_0 > 0$, $\forall x \in I\!\!R^{+*}$, $J_i'(x) \geq -c_0 x^\alpha$.

On obtient alors

$$\begin{cases} \exists c_1 & > 0, J_i(x) & \leq c_1 x^{\alpha+1} \\ \exists c_2 & > 0, \exists \beta \in]0,1[, u_i(x) & \leq c_2 x^\beta \end{cases}$$

Ceci nous permet d'établir un résultat d'équi-intégrabilité.

Lemme 2 : $\forall \gamma < 0, (\eta_{n,k})_{n,k}^{\gamma}$ *est équi-intégrable.*

Preuve : $I\!\!E_n[(\eta_{n,k}^{2\gamma}]$ est majoré uniformément. En effet, on a :

$$\begin{aligned} I\!\!E_n[(\eta_{n,k})^{2\gamma}] &= I\!\!E_n\left[\prod_{\ell=1}^{k}(1+\delta_{n,\ell}\Delta_{n,\ell}^{2\gamma})\right], \delta_{n,\ell} \in \ ]-1,1[\\ &= \prod_{\ell=1}^{k}\left[\frac{1}{2}(1+\frac{\delta_{n,\ell}}{\sqrt{n}})^{2\gamma} + \frac{1}{2}(1-\frac{\delta_{n,\ell}}{\sqrt{n}})^{2\gamma}\right] \end{aligned}$$

or :

$$\frac{1}{2}(1+\frac{\delta_{n,\ell}}{\sqrt{n}})^{2\gamma} + \frac{1}{2}(1-\frac{\delta_{n,\ell}}{\sqrt{n}})^{2\gamma} = 1 + (2\gamma)(2\gamma-1)\frac{\delta_{n,\ell^2}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\ \epsilon(\frac{1}{n})$$

donc : $I\!\!E_n[(\eta_{n,k})^{2\gamma}] \leq e^c$ (où $c = (2\gamma)(2\gamma-1) +$ constante).

Lemme 3 :

$$\forall x > 0, \ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n} J_1\left(\frac{x\ \eta_{n,k}}{\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}\right)\frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}$$

est équi-intégrable.

Preuve :

Elle s'appuie sur le résultat suivant : si $(A_{n,k})_k$ est une suite de v.a ≥ 0 équi-intégrable alors $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}$ l'est aussi.

Ici

$$J_1\left(\frac{x\eta_{n,k}}{\gamma_{n,k}\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}\right)\frac{\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}$$
$$\leq \underbrace{c_1(\frac{x}{\gamma_{n,k}})^{\alpha+1}(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))})^{\alpha+2}}_{\text{borné}}(\eta_{n,k})^{\alpha+2} \text{ avec } \alpha+2<0$$

donc, on obtient l'équi-intégrabilité en utilisant le lemme 2.

(b) Etude du second terme.

On a :

$$J_2\left(\frac{x\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))}\right)\frac{\eta_{n,n}}{\prod_{i=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{i}{n}))} \xrightarrow{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)} \frac{x\eta(1)}{\exp(\int_0^1\alpha^0(u)du)}$$

avec l'hypothèse : $J_i(x)\leq c_1x^{\alpha+1}, c_1>0, \alpha<-2$, on obtient de la même façon que précédemment, l'équi-intégrabilité et donc la convergence des espérances.

Conséquence :

$$\begin{aligned} f_n(x)\to f(x) &= \mathbb{E}_{\boldsymbol{P}}\left[\int_0^t J_1(\frac{x\eta(s)}{e^{\rho s}\exp(\int_0^s\alpha^0(u)du)})\frac{\eta(s)}{\exp(\int_0^s\alpha^0(u)du)}ds\right] \\ &+ J_2\left[(\frac{x\eta(1)}{\exp(\int_0^1\alpha^0(u)du)})\frac{\eta(1)}{\exp(\int_0^s\alpha^0(u)du)}\right] \end{aligned}$$

et en utilisant le lemme 1, on obtient : $\lambda_n\to\lambda=f^{-1}(x)$

Conclusion :

(1) c_n^* défini par

$$c_n^*(t)=J_1\left[\frac{\lambda_n\eta_n[nt]}{n\gamma_{n,[nt]}\prod_{\ell=1}^{[nt]}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{\ell}{n})}\right)\right]$$

vérifie :

$$(c_n^*)_{t\in[0,1]} \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^1)}{\Longrightarrow} (c_t^*)_{t\in[0,1]}$$

où

$$c_t^*=J_1\left[\frac{\lambda\eta(t)}{e^{\rho t}\exp(\int_0^t\alpha^0(u)du)}\right]$$

(2) $X_{n,n}^*$ défini par

$$X_{n,n}^*=J_2\left[\frac{\lambda_n\eta_{n,n}}{\prod_{\ell=1}^{n}(1+\frac{1}{n}\alpha^0(\frac{\ell}{n}))}\right]$$

vérifie :

$$X_{n,n}^* \xrightarrow{\mathcal{L}} X^*(1)=J_2\left[\frac{\lambda\eta(1)}{\exp(\int_0^1\alpha^0(u)du)}\right].$$

2 - Etude de π_n^{0*} et π_n^{1*}

(a) Expression de π_n^{1*}

On a :

$$\begin{pmatrix} \pi_{n,k}^{0*} \\ \pi_{n,k}^{1*} \end{pmatrix} = R_{n,k^{-1}}(\overline{\omega}_k) \begin{pmatrix} X_{n,k+1}(\overline{\omega}_k, 1) \\ X_{n,k+1}(\overline{\omega}_k, 0) \end{pmatrix}$$

donc :

$$\pi_{n,k}^{1*} = \frac{X_{n,k+1}^*(\overline{\omega}_k, 1) - X_{n,k+1}^*(\overline{\omega}_k, 0)}{Y_{n,k+1}^1(1) - Y_{n,k+1}^1(0)}$$

Rappel :

$$\begin{cases} Y_{n,\ell}^0 & = \frac{1}{n}\alpha^0(\frac{\ell}{n}) \\ Y_{n,\ell}^1 & = \frac{1}{n}\alpha^1(\frac{\ell}{n}) + \beta^1(\frac{\ell}{n})\Delta_{n,\ell} \end{cases}$$

et

$$X_{n,k+1}^* = \sum_{\ell=k+2}^{n-1} \int_{\{0,1\}^{\ell-(k+1)}} s_{n,\ell}^* \prod_{i=k+2}^{\ell} \lambda_{n,i} + \int_{\{0,1\}^{n-(k+1)}} X_{n,n}^* \prod_{i=k+2}^{n} \lambda_{n,i}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\pi_{n,k}^{1*} &= \sum_{\ell=k+2}^{n-1} \left[\int_{\{0,1\}^{\ell-(k+1)}} (\frac{1}{n} J_1'[a_{n,\ell}^{k+1}] \frac{\lambda_n}{n\gamma_{n,\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(1+Y_{n,i}^0)} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k+1}}^{\ell} \frac{2|Y_{n,i}^1(\cdot) - Y_{n,i}^0(\cdot)|}{(Y_{n,i}^1(1) - Y_{n,i}^1(0))} \times \cdots \right. \\
&\times \left. \frac{2(Y_{n,k+1}^1(1) + Y_{n,k+1}^1(0) - 2Y_{n,k+1}^0)}{(Y_{n,k+1}^1(1) - Y_{n,k+1}^1(0))^2} \times \prod_{i=k+2}^{\ell} \lambda_{n,i}) \right] + \cdots \\
&+ \left[\int_{\{0,1\}^{n-(k+1)}} J_2'[b_{n,n}^{k+1}] \times \frac{\lambda_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+Y_{n,i}^0)} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k+1}}^{n} \frac{2|Y_{n,i}^1(\cdot) - Y_{n,i}^0(\cdot)|}{(Y_{n,i}^1(1) - Y_{n,i}^1(0))} \right. \\
&\times \left. \frac{2(Y_{n,k+1}^1(1) + Y_{n,k+1}^1(0) - 2Y_{n,k+1}^0)}{(Y_{n,k+1}^1(1) - Y_{n,k+1}^1(0))^2} \times \prod_{i=k+2}^{n} \lambda_{n,i} \right]
\end{aligned}$$

où

$$a_{n,\ell}^{k+1} \in \left] \frac{\lambda_n}{n\gamma_{n,\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(1+Y_{n,i}^0)}\eta_{n,\ell}(-,0-), \frac{\lambda_n}{n\gamma_{n,\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(1+Y_{n,i}^0)}\eta_{n,\ell}(-,1-) \right[$$

et

$$b_{n,n}^{k+1} \in \left] \frac{\lambda_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+Y_{n,i}^0)}\eta_{n,n}(-,0-), \frac{\lambda_n}{\prod_{i=1}^{n}(1+Y_{n,i}^0)}\eta_{n,n}(-,1-) \right[.$$

Remarques : On a

$$\begin{cases} (1) \ \frac{2(Y_{n,k+1}^1(1) - Y_{n,k+1}^1(0) - 2Y_{n,k+1}^0}{(Y_{n,k+1}^1(1) - Y_{n,k+1}^1(0))^2} & = (\frac{\alpha^1 - \alpha^0}{\beta^{1^2}})(\frac{k+1}{n}) \\ (2) \ \prod_{i=k+2}^{\ell} 2\lambda_{n,i} & = (\frac{\eta_{n,\ell}}{\eta_{n,k+1}}) \times \frac{1}{\prod_{i=k+2}^{\ell}(1+Y_{n,\ell}^0)} \end{cases}$$

On obtient :

$$\pi_{n,k}^{1*} = \frac{\lambda_n(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^{1^2}})(\frac{k+1}{n})\eta_{n,k}}{\prod_{i=1}^{k+1}(1+Y_{n,i}^0)} \times I\!E_n[T_{n,k}|\mathcal{F}_{n,k}]$$

où

$$
\begin{aligned}
T_{n,k} &= \sum_{\ell=k+2}^{n-1} \frac{1}{n} J''^{1}(a_{n,\ell}^{k+1})(\frac{\eta_{n,\ell}}{\eta_{n,k+1}})^2 \frac{1}{n\gamma_{n,\ell}\prod_{i=k+2}^{\ell}(1+Y_{n,i}^0)^2} \\
&+ \frac{J_2'(b_{n,n}^{k+1})}{\prod_{i=k+2}^{n}(1+Y_{n,i}^0)^2}(\frac{\eta_{n,n}}{\eta_{n,k+1}})^2
\end{aligned}
$$

Convergence de π_n^{1*} : On supposera ici que

$$J_i'(x) = -c_0 x^\alpha,\ c_0 > 0,\ \alpha < -2$$

Proposition :

$$\pi_n^{1*} \xrightarrow{\mathcal{L}} \pi^{1*}$$

où

$$
\begin{aligned}
\pi^{1*}(t) &= \frac{\lambda^{\alpha+1}(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^{1^2}})(t)}{\exp[(\alpha+1)\int_0^t \alpha^0(u)du]}(\eta(t))^{\alpha+1}(-c_0)\mathbb{E}\left[\int_t^1 (e^{(1+\alpha)\rho s}(\frac{\eta(s)}{\eta(t)})^{\alpha+2}\right. \\
&\times \left.\exp(-(\alpha+2)\int_t^s \alpha^0(u)du))ds + [(\frac{\eta(1)}{\eta(t)})^{\alpha+2} \times \exp(-(\alpha+2)\int_t^1 \alpha^0(u)du)]\right].
\end{aligned}
$$

Démonstration de la convergence de π_n^{1*}

Lemme 1 :

$$\frac{\lambda_n^{\alpha+1}(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^{1^2}})(\frac{[nt]+1}{n})}{\prod_{i=1}^{[nt]}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+1}} \xrightarrow{\mathcal{T}_{SK^o}} (\frac{\lambda^{\alpha+1}(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1}(t)}{\exp[(\alpha+1)\int_0^t \alpha^0(u)du]})_{t\in[0,1]}$$

Preuve On a la convergence locale uniforme !

Lemme 2 : Soit

$$
\begin{aligned}
T_n^{(1)}(t) &= \int_{\frac{[nt]+2}{n}}^1 (\mathbb{E}_n[(\frac{\eta_{n,[ns]}}{\eta_{\eta,[nt]+1}})^{\alpha+2}](\frac{1}{n\gamma_{n,[ns]}})^{\alpha+1}(\frac{1}{\prod_{i=[nt]+2}^{[ns]}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+2}})ds \\
T_n^{(2)}(t) &= \mathbb{E}_n[(\frac{\eta_n(1)}{\eta_{n,[nt]+1}})^{\alpha+2}\frac{1}{\prod_{i=[nt]+2}^{n}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+2}}]
\end{aligned}
$$

(notation : $\xrightarrow{s}$ désigne la convergence simple)

On a :

$$
\begin{cases}
T_n^{(1)}(t) \xrightarrow{s} T^{(1)}(t) &= \int_t^1 \mathbb{E}[(\frac{\eta(s)}{\eta(t)})^{\alpha+2}]e^{(\alpha+1)\rho s}\exp(-(\alpha+2)\int_t^s \alpha^0(u)du)ds \\
T_n^{(2)}(t) \xrightarrow{s} T^{(2)}(t) &= \mathbb{E}[(\frac{\eta(1)}{\eta(t)})^{\alpha+2}\exp(-(\alpha+2)\int_t^1 \alpha^0(u)du]].
\end{cases}
$$

Preuve :

(1) Convergence de $T_n^{(1)}$: (à t et s fixés dans $[0,1[$)

$$
a)\ \left[(\frac{\eta_{n,[ns]}}{\eta_{n,[nt]+1}})^{\alpha+2}(\frac{1}{n\gamma_{n,[ns]}})^{\alpha+1}\frac{1}{\prod_{i=[nt]+2}^{[ns]}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+2}}\right] \xrightarrow{\mathcal{L}}
$$

$$(\frac{\eta(s)}{\eta(t)})^{(\alpha+2)}e^{(\alpha+1)\rho s}\exp[-(\alpha+2)\int_t^s \alpha^0(u)du].$$

$$b)\ \left[(\frac{\eta_{n,[ns]}}{\eta_{n,[nt]+1}})^{\alpha+2}(\frac{1}{n\gamma_{n,[ns]}})^{\alpha+1}\frac{1}{\prod_{i=[nt]+2}^{[ns]}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+2}}\right]_n$$

est équi-intégrable. (cf. démonstration de l'ex. 2 D lemme 3).

$$c)\ \forall n,\ \mathbb{E}_n\left[(\frac{\eta_{n,[ns]}}{\eta_{n,[nt]+1}})^{\alpha+2}\right](\frac{1}{n\gamma_{n,[ns]}})^{\alpha+1}\frac{1}{\prod_{i=[nt]+2}^{[ns]}(1+Y_{n,i}^0)^{\alpha+2}}$$

est majoré uniformément.

On en déduit :

$$T_n^{(1)}(t) \xrightarrow{s} T^{(1)}(t).$$

De même

$$T_n^{(2)}(t) \xrightarrow{s} T^{(2)}(t).$$

(mêmes arguments que (a) et (b)).

Lemme 3 :

$$(T_n^{(1)}, T_n^{(2)}) \xrightarrow{\mathcal{T}_{SK^o}} (T^{(1)}, T^{(2)}).$$

Preuve : Il suffit de montrer la convergence uniforme de $T_n^{(1)}$ vers $T^{(1)}$ et de $T_n^{(2)}$ vers $T^{(2)}$ (par continuité des $T^{(i)}$ et $T_n^{(i)}$.)

E - Etude du modèle à temps continu

On utilise ici des résultats établis par (COX-HUANG [3]). Le système des prix est défini par

$$\begin{cases} S_t^0 &= S_0^0 \exp(\int_0^t \alpha^0(u)du) \\ S_t^1 &= S_0^1 \exp(\int_0^t(\alpha^1(u) - \frac{1}{2}{\beta^1}^2(u))du + \int_0^t \beta^1(u)dW_u) \end{cases}$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma[W_{s/s\leq t}]$

Θ : ensemble des stratégies admissibles est du type suivant

$\Theta = \{(\theta(t)_{t\in[0,1]}, \forall t, c_t > 0, X_1(\theta) > 0, \theta \in \mathbb{L}^2(\Omega \times [0,1], \mathcal{F} \otimes B_{[0,1]}, P \otimes \lambda)\}.$

I - Propriété du marché financier (cf [5] et [6])

(1) Il est AOA et complet

(2) On en déduit l'existence d'une unique mesure $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,1]}$ soit une $\mathcal{F}_t$-martingale par rapport à $\mathbb{Q}$.

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} &= \exp[\int_0^1(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1})(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^1(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1})^2(s)ds] \\ \eta(t) &= \mathbb{E}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}/\mathcal{F}_t] = \exp[\int_0^t(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1})(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^1})^2(s)ds]. \end{aligned}$$

II - Recherche des stratégies optimales

On obtient :

$$\begin{aligned} c^*(t) &= J_1\left[\frac{\lambda\eta(t)e^{\rho t}}{\exp(\int_0^t \alpha^0(s)ds)}\right] \\ X^*(1) &= J_2\left[\frac{\lambda\eta(1)}{\exp(\int_0^1 \alpha^0(s)ds)}\right] \text{ où } \lambda \text{ vérifie } :\lambda = f^{-1}(x_0) \end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \mathbb{E}[\int_0^1 J_1(\frac{x\eta(t)e^{\rho t}}{\exp(\int_0^t \alpha^0(s)ds)})\frac{\eta(t)}{\exp(\int_0^t \alpha^0(s)ds)}dt \\
&+ J_2(\frac{x\eta(1)}{\exp(\int_0^1 \alpha^0(s)ds)})\frac{\eta(1)}{\exp(\int_0^1 \alpha^0(s)ds)}] \\
\pi_1^*(t) &= \frac{\lambda^{\alpha+1}(\frac{\alpha^1-\alpha^0}{\beta^{1^2}})(t)}{\exp[(\alpha+1)\int_0^t \alpha^0(u)du]}(\eta(t))^{\alpha+1}(-c_0) \\
&\times \mathbb{E}\left[\int_t^1 e^{(\alpha+1)\rho s}(\frac{\eta(s)}{\eta(t)})^{\alpha+2}\exp(-(\alpha+2)\int_t^s \alpha^0(u)du)ds\right. \\
&+ \left.(\frac{\eta(1)}{\eta(t)})^{\alpha+2}\exp(-(\alpha+2)\int_t^1 \alpha^0(u)du)\right] \\
\pi^{0*}(t) &= X_t^* - \pi_t^{1*}.
\end{aligned}
$$

Conclusion

On obtient les mêmes stratégies que celles obtenues par convergence.

Exemple 3 : Les hypothèses faites ici sur $(Y^1_{n,k})_k$ conduisent au résultat suivant : les modèles en temps discret et continu sont AOA et complets mais les stratégies optimales "discrètes" ne convergent plus vers les stratégies optimales "continues".

On va se limiter ici à des problèmes d'optimisation sans consommation et à une fonction d'utilité $u(x) = 2\sqrt{x}$.

Système des prix :

Hypothèse : α^0, α^1 constantes positives strictement et $c = \alpha^1 - \alpha^0 \in]0,1[$.

$$
\left\{ \begin{array}{ll} S^0_{n,k} = S^0_{n,k-1}(1+Y^0_{n,k}) \text{ avec } Y^0_{n,k} & = \frac{\alpha^0}{n} \\ S^1_{n,k} = S^1_{n,k-1}(1+Y^1_{n,k}) \text{ avec } Y^1_{n,k} & = \frac{\alpha^1}{n} + a_{n,k}\Delta_{n,k} \end{array} \right. \quad \text{où } a_{n,k} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ si } k \text{ pair} \\ 1 \text{ si } k \text{ impair} \end{array} \right.
$$

Remarque : On vérifie la comptabilité de ces hypothèses avec les non-dominances stochastiques.

Proposition 1 : *Le marché financier en temps discret est AOA et complet.*

Proposition 2 : *(Convergence du système des prix)*

$$
S_n(t) \left| \begin{array}{l} S^0_n(t) \\ S^1_n(t) \end{array} \right. \overset{\mathcal{L}(\mathbb{D}^2)}{\longrightarrow} \left| \begin{array}{ll} S^0_t & = S^0_0 \exp(\alpha^0 t) \\ S^1_t & = S^1_0 \exp[t(\alpha^1 - \frac{1}{4}) + B^2_t] \end{array} \right.
$$

où $(\tilde{B}_t)_t$ est un mouvement brownien de loi $N(0, \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2}})$.

Proposition 3 :

$$
(1)\ \eta_n(t) = \mathbb{E}_n\left[\frac{d\mathbb{Q}_{n[nt]}}{d\mathbb{P}_{n,[nt]}}/\mathcal{F}_{n,[nt]}\right]
$$

ne converge pas en loi vers

$$
\eta(t) = \exp[2cW_t - 2c^2 t].
$$

(remarque : $\eta_n(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$)

(2) $(X_n^*)_n$ ne converge par en loi vers X^* vérifiant

$$X^* = \left(\frac{\lambda\eta(1)}{\exp(\int_0^1 \alpha^0(u)du)}\right)^{-2}$$

Remarque : Ici (1) :

$$\eta_{n,n} = \prod_{\substack{\ell=1\\ \ell \text{ impair}}}^{n} (1 + c\Delta_{n,\ell}) \times \prod_{\substack{\ell=2\\ \ell \text{ pair}}}^{n} (1 + c\epsilon_{n,\ell})$$

avec

$$\begin{cases} (\Delta_{n,\ell})_n \ iid \\ I\!\!P_n[\Delta_{n,\ell} = \frac{1}{\sqrt{n}}] = I\!\!P_n[\Delta_{n,\ell} = -\frac{1}{\sqrt{n}}] = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (\epsilon_{n,\ell})_n \ iid \\ I\!\!P_n[\epsilon_{n,\ell} = 1] = I\!\!P_n[\epsilon_{n,\ell} = -1] = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(2)\ X_{n,n}^* = X_0 \prod_{\ell=1}^{n}(1 + \frac{\alpha^0}{n})\frac{1}{\eta_{n,n}^2 I\!\!E_n[\frac{1}{\eta_{n,n}}]}$$

Proposition 4 : *Le modèle en temps continu est AOA et complet.*
Il existe une stratégie optimale.

(cf. L'étude en temps continu de l'exemple 2)

$$\text{avec} \begin{cases} \alpha^1(u) &= \alpha^1 \text{ et } \beta^1(u) = \frac{1}{2} \\ \alpha^0(u) &= \alpha^0 \end{cases}$$

Exemple 4 : On reprend les mêmes hypothèses que dans l'exemple 3 mais en supposant maintenant que $Y_{n,k}^1 = \frac{\alpha^1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\Delta_{n,k}$. C'est-à-dire : $Y_{n,k}^1 = \frac{\alpha^1}{n} + \frac{\epsilon_{n,k}}{n}$ où $(\epsilon_{n,k})$ est une suite de v.a *iid* telles que $I\!\!P_n[\epsilon_{n,k} = -1] = I\!\!P_n[\epsilon_{n,k} = +1] = \frac{1}{2}$.

Proposition 1 : *Le marché en temps discret est AOA et complet*

Proposition 2 : *Convergence du système des prix*

$$(S_n(t))_t \xrightarrow{\mathcal{L}(I\!\!D^2)} (S(t))_t \left| \begin{array}{ll} S^0(t) &= S_0^0 \exp(\alpha^0 t) \\ S^1(t) &= S_0^1 \exp(\alpha^1 t) \end{array} \right.$$

Proposition 3 : (η_n) *ne converge pas en loi vers une v.a positive d'espérance* 1 *(On a en effet :*

$$\eta_n(1) \xrightarrow{\mathcal{L}} 0)$$

$(X_n^*)_n$ *ne converge pas en loi.*

Proposition 4 : *Le marché en temps continu présente (de manière évidente) une opportunité d'arbitrage.*

Remarque : Le fait qu'ici $\sup_n I\!\!E[X_n^p] = +\infty$, $\forall p \neq 0$ ne permet pas d'imposer à priori une condition de bornitude dans $I\!\!L^p$ des stratégies en temps continu.

Références

[1] Avram F. *Weak convergence of the variations, iterated integrals and Doleans-Dade exponential of sequences of semi-martingales.*

Ann. Probab. 16, 246-250 (1988)

[2] Bajeux I. *Gestion de portefeuille dans un modèle binomial.*

Annales d'économie et de statistiques. n° 13 (1989)

[3] Cox-J. et Huang C. *Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process*

Journal of economic theory (1989)

[4] R.A. Anna, D. Duffie, M. Jeanblanc-Picque *Cours d'introduction au problème de l'évaluation du prix des actions en temps continu*

Université Paris IX, Cérémade (mars 1990)

[5] Harrisson J.M. et Kreps D. *Martingales and Arbitrage in multiperiod securities Markets*

Journal of Economic Theory 20, 381-408 (1979)

[6] Harrisson-Pliska *Martingales and stochastic integrals in the theory of coninuous trading*

Stochastic Process and their applications 11, 215-260 (1981)

[7] Jacod J., Shirayev A.N. *Limit theorems for stochastic processes*

Springer-Verlag, Berlin (1987)

[8] Jakubowski A., Mémin J, Pagés G. *Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace* $\mathbb{D}^1$ *de Skorokhod.*

Prob. th. Rel. Fields 81, 111-137 (1989)

[9] Mémin J., Slominsky L. *Condition U.T. et stabilité en loi des solutions d'équations différentielles stochastiques.*