

MARC PEIGNE

Vitesse de convergence dans le théorème du renouvellement

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1
« Probabilités », , p. 74-89

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990__1_74_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VITESSE DE CONVERGENCE DANS LE THEOREME DU RENOUVELLEMENT

Soit $\mathcal{H}$ la classe des fonctions Φ intégrables sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier $\hat{\Phi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (i-e admettant des dérivées à tout ordre) et à support $S(\hat{\Phi})$ compact.

$\mathcal{H}$ possède des fonctions positives sur $\mathbb{R}$; en effet, $\Phi_0^2 \in \mathcal{H}$, Φ_0 étant la fonction dont la transformée de Fourier est définie par

$$\hat{\Phi}_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow 1_{[-1,1]}(x) \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$$

I.CAS DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, adaptée, admettant un moment d'ordre 1

$$\text{et telle que } m = \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \in]0, +\infty[.$$

On pose $G(x, \cdot) = \varepsilon_x \otimes \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{*n}$, μ^{*n} étant la convolée d'ordre n de μ .

Théorème 1

Lorsque μ admet un moment d'ordre $2+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_1, B_1 et ε éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait :

$$|G\Phi(c)| \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \text{ lorsque } c > 0$$

$$\text{et } |G\Phi(c) - \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt| \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \text{ lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_1(\Phi) = A_1 (\|\hat{\Phi}\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\Phi'_1\|_1) + B_1 \left(1 + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1-r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)^2 (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1)$$

$$\Phi_1 \text{ étant la fonction définie par } \Phi_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1 + \left(\frac{\lambda a}{2m}\right)^2} - \hat{\Phi}(0) \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{et } a = \int x^2 \mu(dx).$$

Si μ admet un moment d'ordre $3+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_2, B_2 et ε éléments de $\mathbb{R}^{**}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait :

$$|G\Phi(c)| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \text{ lorsque } c > 0$$

$$\text{et } |G\Phi(c) - \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \text{ lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_2(\Phi) = A_2 (\|\hat{\Phi}\|_{\infty} + \|\hat{\Phi}'\|_{\infty} + \|\hat{\Phi}''\|_{\infty} + \|\Phi''_2\|_1)$$

$$+ B_1 \left(1 + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)^3 (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1 + \|\hat{\Phi}''\|_1)$$

$$\Phi_2 \text{ étant la fonction définie par } \Phi_2(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda)(1 - \frac{b\lambda^2}{6m})}{(\frac{a\lambda}{2m})^2 + (1 - \frac{b\lambda^2}{6m})^2} - \hat{\Phi}(0) \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

$$\text{et } b = \int x^3 \mu(dx).$$

II. CAS MARKOVIAN

Soit P un noyau markovien sur $\mathbb{R}$, quasi-compact, ergodique, de mesure de probabilité invariante π .

On définit le noyau U , pour Φ fonction borélienne bornée de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par

$$\forall (x, a) \in \mathbb{R}^2 \quad U\Phi(x, a) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(y, a+x) P(x, dy)$$

$$\text{et l'on pose } G = \sum_{n=0}^{+\infty} U^n.$$

On définit l'opérateur "transformée de Fourier" P_{λ} associé à P par :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 \quad P_{\lambda}\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda y} \Phi(y) P(x, dy).$$

On introduit les hypothèses

- . π est décentrée, i.e $0 < \int x \pi(dx) < +\infty$
- . P est adapté i.e $P_\lambda \Phi = \Phi \Leftrightarrow \lambda = 0$ et Φ est constante.
- . les valeurs spectrales de module 1 de P_λ sont des valeurs propres (condition S).

Théorème 2

Si P admet des moments d'ordre $2+\alpha$, $\alpha > 0$, (i.e $\sup_{x \in \mathbb{R}} \int \|y\|^{2+\alpha} P(x, dy) < +\infty$)

il existe A_1, B_1 et $\varepsilon > 0$ éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |G(1_{\mathbb{R}} \otimes \Phi)(x, c)| \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c > 0$$

$$\text{et } \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(1_{\mathbb{R}} \otimes \Phi)(x, c) - \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt| \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_1(\Phi) = A_1 (\|\hat{\Phi}\|_{\infty} + \|\hat{\Phi}'\|_{\infty} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \|\Phi_x'\|_1)$$

$$+ B_1 \left(1 + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \|(I - rP_\lambda)^{-1}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \left\| \frac{d}{d\lambda} ((I - P_\lambda)^{-1}) \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \right) (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1)$$

$$\Phi_x \text{ étant la fonction définie par } \Phi_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda) (1 + \lambda \pi_0' 1(x))}{1 + \left(\frac{a\lambda}{2m}\right)^2} - \hat{\Phi}(0) \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

π_0' un opérateur borné sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $a = \int x^2 \pi(dx)$.

Lorsque P admet des moments d'ordre $3+\alpha$, $\alpha > 0$, il existe A_2, B_2 et ε éléments de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que, pour toute fonction Φ de $\mathcal{H}$, on ait

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |G(1_{\mathbb{R}} \otimes \Phi)(x, c)| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \text{lorsque } c > 0$$

$$\text{et } \sup_{x \in \mathbb{R}} |G(1_{\mathbb{R}} \otimes \Phi)(x, c) - \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt| \leq \frac{K_2(\Phi)}{|c|^2} \quad \text{lorsque } c < 0$$

$$\text{avec } K_1(\Phi) = A_1 (\|\hat{\Phi}\|_{\infty} + \|\hat{\Phi}'\|_{\infty} + \|\hat{\Phi}''\|_{\infty} + \sup_{x \in \mathbb{R}} \|\Psi_x''\|_1)$$

$$+ B_1 \left(1 + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \|(I - rP_\lambda)^{-1}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \left\| \frac{d}{d\lambda} ((I - P_\lambda)^{-1}) \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \right)$$

$$+ \left. \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \left\| \frac{d^2}{d\lambda^2} ((I - P_\lambda)^{-1}) \right\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} \right) (\|\hat{\Phi}\|_1 + \|\hat{\Phi}'\|_1 + \|\hat{\Phi}''\|_1)$$

Ψ_x étant la fonction définie par

$$\Psi_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{(1 - \frac{b\lambda^2}{6m}) \hat{\Phi}(\lambda) (1 + \lambda \pi_0' 1(x) + \frac{\lambda^2}{2} \pi_0'' 1(x))}{(1 - \frac{b\lambda^2}{6m}) + (\frac{a\lambda}{2m})^2} - \hat{\Phi}(0) \right) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*,$$

π_0' et π_0'' des opérateurs bornés sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $b = \int x^3 \pi(dx)$.

Remarque

$\hat{\Phi}$ étant à support compact, avec par exemple $S(\hat{\Phi}) \subset [-a, a]$, nous pouvons majorer

de façon élémentaire l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda) - \hat{\Phi}(0)}{\lambda} \right) \right| d\lambda$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda) - \hat{\Phi}(0)}{\lambda} \right) &= \frac{\hat{\Phi}'(\lambda)}{\lambda} - \frac{\hat{\Phi}(\lambda) - \hat{\Phi}(0)}{\lambda^2} \\ &= \frac{\hat{\Phi}'(\lambda) - \hat{\Phi}'(0)}{\lambda} - \frac{\hat{\Phi}(\lambda) - \hat{\Phi}(0) - \lambda \hat{\Phi}'(0)}{\lambda^2} \\ &= \hat{\Phi}''(\theta_1 \lambda) - \frac{1}{2} \hat{\Phi}''(\theta_2 \lambda) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\hat{\Phi}(\lambda) - \hat{\Phi}(0)}{\lambda} \right) \right| d\lambda \leq 3a \|\hat{\Phi}''\|_\infty.$$

De la même façon, comme $\|\Phi_1''\|_\infty \leq K(\|\hat{\Phi}''\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\hat{\Phi}\|_\infty)$ avec K constante indépendante de Φ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(0)}{\lambda} \right) \right| d\lambda \leq 3a K (\|\hat{\Phi}\|_\infty + \|\hat{\Phi}'\|_\infty + \|\hat{\Phi}''\|_\infty).$$

III.DEMONSTRATION DES RESULTATS

Nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires :

Lemme 1

i) Si f est une fonction dérivable de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, avec $f' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\left| c \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{icx} dx \right| \leq \|f'\|_1$$

ii) Si f est une fonction deux fois dérivable de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ avec f' et $f'' \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$\left| c^2 \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{icx} dx \right| \leq \|f''\|_1$$

Preuve :

Il suffit de faire une intégration par parties

$$\int_{-A}^{+A} f(x) e^{icx} dx = \frac{e^{icA} f(A)}{ic} - \frac{e^{-icA} f(-A)}{ic} - \frac{1}{ic} \int_{-A}^{+A} e^{icx} f'(x) dx$$

puis de faire tendre A vers $+\infty$ $\square$

Lemme 2

Soit $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une identité approchée et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.

Si la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction f , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

La démonstration de ce lemme est évidente.

Démonstration du théorème 1

Cette démonstration s'inspire des techniques développées dans [1] et [3].

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a.i.i.d de loi μ . On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec $S_0 = 0$. On note $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \hat{\mu}(\lambda) = \mathbb{E}[e^{i\lambda X_1}]$.

1^{er} cas : μ admet un moment d'ordre $2+\alpha$

$\hat{\mu}$ est alors de classe C^2 et l'on a $\hat{\mu}(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} + \lambda^{2+\alpha} \varepsilon(\lambda)$ avec $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon(\lambda) = 0$

$$\text{et } a = \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(dx).$$

Comme pour toute fonction positive Φ de $\mathcal{H}$

$$G\Phi(c) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[\Phi(c+S_n)] = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathbb{E}[\Phi(c+S_n)] = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} G_r\Phi(c)$$

avec $\forall r < 1$ $G_r\Phi(c) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathbb{E}[\Phi(c+S_n)]$, il suffit de montrer que

$$| \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} G_r\Phi(c) | \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c > 0$$

$$\text{et } | \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} G_r\Phi(c) - \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \Phi(t) dt | \leq \frac{K_1(\Phi)}{|c|} \quad \text{lorsque } c < 0.$$

D'après la formule inverse de Fourier, on a

$$\begin{aligned} G_r\Phi(c) &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathbb{E} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda(c+S_n)} d\lambda \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) \frac{e^{i\lambda c}}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} d\lambda \\ &= I_{1,r}(c) + I_{2,r}(c) \end{aligned}$$

$$\text{avec } I_{1,r}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) d\lambda$$

$$\text{et } I_{2,r}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} d\lambda.$$

Etude de $I_{1,r}(c)$.

La fonction $\lambda \rightarrow \hat{\Phi}(\lambda) \left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de

dérivée :

$$\lambda \rightarrow \hat{\Phi}'(\lambda) \left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) + \hat{\Phi}(\lambda) \left(\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2} - \frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right)$$

Montrons que cette dérivée est une fonction de $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Fixons $\varepsilon > 0$ tel que, pour $|\lambda| < \varepsilon$ on ait simultanément $|\hat{\mu}'(\lambda) - im + \lambda a| \leq |\lambda|^{1+\alpha}$,

$|1-r\hat{\mu}(\lambda)| \geq rm|\lambda|$, $|\hat{\mu}(\lambda) - (1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})| \leq |\lambda|^{2+\alpha}$ et $|\hat{\mu}'(\lambda)| \leq 2m$.

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
& \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} \left| \hat{\Phi}'(\lambda) \left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) \right| d\lambda \\
& \leq \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} \left| \hat{\Phi}'(\lambda) \frac{\hat{\mu}(\lambda) - (1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})}{r(m\lambda)^2} \right| d\lambda \\
& \leq \frac{\|\hat{\Phi}'\|_{\infty}}{r m^2} \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} |\lambda|^{\alpha} d\lambda .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, μ étant adaptée, $\hat{\mu}(\lambda) = 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$; pour $\lambda \in S(\hat{\Phi}) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]^c$, on a donc
 $\forall r \in [\frac{1}{2}, 1[\quad \left| \frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right| \leq \frac{2}{m\varepsilon} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1-r\hat{\mu}(\lambda)|} < +\infty$

si bien que

$$\int_{[|\lambda| \geq \varepsilon]} \left| \hat{\Phi}'(\lambda) \left(\frac{1}{1-r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) \right| d\lambda \leq \|\hat{\Phi}'\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1-r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)$$

Il reste à montrer l'intégrabilité de la fonction

$$\lambda \rightarrow \hat{\Phi}(\lambda) \left(\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2} - \frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right)$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2} - \frac{r(im-a\lambda)}{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} &= \frac{r\hat{\mu}'(\lambda)(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2 - (1-r\hat{\mu}(\lambda))^2 r(im-a\lambda)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2 (1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \\
&= \frac{r\hat{\mu}'(\lambda) \left((1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2 - (1-r\hat{\mu}(\lambda))^2 \right)}{(1-r\hat{\mu}(\lambda))^2 (1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{r(\hat{\mu}'(\lambda) - (im - \lambda a))}{(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2}$$

Par conséquent, pour $|\lambda| < \varepsilon$, on a d'une part

$$\left| \frac{r(\hat{\mu}'(\lambda) - im + \lambda a)}{(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right| \leq \frac{r|\lambda|^{1+\alpha}}{(rm\lambda)^2}$$

et d'autre part
$$\left| \frac{r\hat{\mu}'(\lambda) \left(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})^2 - (1 - r\hat{\mu}(\lambda))^2 \right)}{(1 - r\hat{\mu}(\lambda))^2 (1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right|$$

$$= \left| \frac{r\hat{\mu}'(\lambda) \left(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}) + 1 - r\hat{\mu}(\lambda) \right) \left(r\hat{\mu}(\lambda) - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}) \right)}{(1 - r\hat{\mu}(\lambda))^2 (1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right|$$

$$\leq \frac{4r^2 m |\lambda|^{2+\alpha}}{(rm|\lambda|)^3}$$

si bien que, $\forall r \in [\frac{1}{2}, 1[$

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\Phi}(\lambda) \left(\frac{r\hat{\mu}'(\lambda)}{(1 - r\hat{\mu}(\lambda))^2} - \frac{r(im - a\lambda)}{(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right) \right| d\lambda \leq \frac{10 \|\hat{\Phi}\|_{\infty}}{m^2} \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{1-\alpha}}$$

$$+ \|\hat{\Phi}\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon^2} + \frac{2a}{m^2\varepsilon} + 2m \left(\sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| \geq \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)^2 \right)$$

Finalement, on obtient, via le lemme 1.i)

$$\left| c I_{1,r}(c) \right| \leq \frac{10 \|\hat{\Phi}\|_{\infty}}{m^2} \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} \frac{d\lambda}{|\lambda|^{1-\alpha}} + \frac{2\|\hat{\Phi}'\|_{\infty}}{m^2} \int_{[|\lambda| < \varepsilon]} |\lambda|^{\alpha} d\lambda$$

$$+ \|\hat{\Phi}\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon^2} + \frac{2a}{m^2\varepsilon} + 2m \left(\sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| \geq \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)^2 \right)$$

$$+ \|\hat{\Phi}'\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| \geq \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \frac{1}{|1 - r\hat{\mu}(\lambda)|} \right)$$

ε étant un réel strictement positif ne dépendant que de μ .

Etude de $I_{2,r}(c)$.

$$\begin{aligned}
 I_{2,r}(c) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1-r+r\frac{a\lambda^2}{2}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2} d\lambda + \frac{rim}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2} d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{R}} \frac{t \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2} d\lambda + \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2} d\lambda \\
 &\quad + \frac{rim}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda (\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c})}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2+(rm\lambda)^2} d\lambda \quad \text{avec } t = \frac{r}{1-r}.
 \end{aligned}$$

Lorsque r tend vers 1, la suite de fonctions $\left(\lambda \rightarrow \frac{1+(mt\lambda)^2}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \right)_{t>0}$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\frac{m^2}{m^2 + \frac{(a\lambda)^2}{4}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c}$. En appliquant alors

le lemme 2, avec $\varphi_n(x) = \frac{n}{\pi(1+(nx)^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{R}} \frac{t \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2} d\lambda \\
 = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{1+(mt\lambda)^2} \left(\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1+(mt\lambda)^2}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2+(mt\lambda)^2} \right) d\lambda = \frac{\hat{\Phi}(0)}{2m}
 \end{aligned}$$

Enfin, pour $r \in [\frac{1}{2}; 1[$, on a

$$|\hat{\Phi}(\lambda) \frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2 + (mt\lambda)^2}| \leq \frac{a|\hat{\Phi}(\lambda)|}{2m^2}$$

$$\text{et } |\lambda \frac{\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2}) + (rm\lambda)^2}| \leq \frac{4}{m^2} \left| \frac{\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c}}{\lambda} \right|$$

si bien que, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi r} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{\frac{a(\lambda t)^2}{2}}{(1+t\frac{a\lambda^2}{2})^2 + (mt\lambda)^2} d\lambda = \frac{a}{4\pi m^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2} e^{i\lambda c} d\lambda$$

$$\text{et } \lim_{r \rightarrow 1} \frac{rim}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \lambda \frac{\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c}}{(1-r+r\frac{a\lambda^2}{2})^2 + (rm\lambda)^2} d\lambda = \frac{i}{4\pi m} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c}}{\lambda(1+(\frac{a\lambda}{2m})^2)} d\lambda$$

En écrivant $\frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2} = \hat{\Phi}(0) + \lambda \Phi_1(\lambda)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{i}{4\pi m} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} - \hat{\Phi}(-\lambda) e^{-i\lambda c}}{\lambda(1+(\frac{a\lambda}{2m})^2)} d\lambda &= \frac{i}{4\pi m} \left(\hat{\Phi}(0) \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\lambda c} - e^{-i\lambda c}}{\lambda} d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} (\Phi_1(\lambda) e^{i\lambda c} + \Phi_1(-\lambda) e^{-i\lambda c}) d\lambda \right) \\ &= \frac{-\hat{\Phi}(0)}{2\pi m} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\lambda c)}{\lambda} d\lambda + \frac{2i}{4\pi m} \int_{\mathbb{R}} \Phi_1(\lambda) e^{i\lambda c} d\lambda. \end{aligned}$$

Le lemme 1.i) nous donne alors, d'une part

$$|c \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\Phi}(\lambda)}{1+(\frac{a\lambda}{2m})^2} e^{i\lambda c} d\lambda| \leq \|\hat{\Phi}'\|_1 + \frac{a}{m} \|\hat{\Phi}\|_1$$

$$\text{et d'autre part } |c \int_{\mathbb{R}} \Phi_1(\lambda) e^{i\lambda c} d\lambda| \leq \|\Phi_1'\|_1.$$

Il suffit alors de remarquer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\lambda c)}{\lambda} d\lambda = \pi$ lorsque $c > 0$ et $-\pi$ lorsque $c < 0$.

2ème cas : μ admet des moments d'ordre $3+\alpha$

$\hat{\mu}$ est alors de classe C^2 et l'on a $\hat{\mu}(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6} + \lambda^{3+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ avec $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varepsilon(\lambda) = 0$.

On décompose $G_r \Phi(c)$ en $I_{1,r}(c) + I_{2,r}(c)$ avec cette fois

$$I_{1,r}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left(\frac{1}{1 - r\hat{\mu}(\lambda)} - \frac{1}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} \right) d\lambda$$

$$\text{et } I_{2,r}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} d\lambda ;$$

la suite de la démonstration se calque sur la précédente.

Démonstration du théorème 2

Etude de l'opérateur "transformée de Fourier".

Lorsque $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables indépendantes et de même loi, l'égalité $\mathbb{E}[e^{i\lambda S_n}] = \mathbb{E}[e^{i\lambda X_1}]^n$ joue un rôle crucial dans l'étude du potentiel G . Lorsque la suite $(X_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov, cette égalité n'est plus vérifiée, mais certaines propriétés spectrales de P_λ permettent néanmoins d'utiliser des techniques similaires, d'où l'intérêt d'étudier de façon assez précise l'opérateur "transformée de Fourier". On a la

Proposition

Sous les hypothèses du théorème 2, lorsque P admet des moments d'ordre k

i) *la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ est de classe C^k .*

$$\lambda \rightarrow P_\lambda$$

ii) *au voisinage de 0, on peut écrire $P_\lambda = k(\lambda) \pi_\lambda + r_\lambda$ avec $k(\lambda)$ valeur propre dominante de P_λ*

. π_λ projecteur propre associé à $k(\lambda)$ et r_λ opérateur borné sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$, de rayon spectral $\rho(r_\lambda) < 1$, tels que $r_\lambda \pi_\lambda = \pi_\lambda r_\lambda = 0$.

. $\lambda \rightarrow k(\lambda)$, r_λ et π_λ sont des fonctions de classe C^k .

En particulier, lorsque P admet des moments d'ordre $2+\alpha$, $\alpha > 0$, on a

$k(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} + \lambda^{2+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ avec $m = \int x \pi(dx)$ et $a = \int x^2 \pi(dx)$, et lorsque

P admet des moments d'ordre $3+\alpha$, on a $k(\lambda) = 1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i \frac{b\lambda^3}{6} + \lambda^{3+\alpha}\varepsilon(\lambda)$ avec $b = \int x^3 \pi(dx)$.

Preuve (cf. [2],[3],[4])

i) Lorsque P admet des moments d'ordre 1, on peut définir l'opérateur U_λ par

$\forall \Phi \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}) \quad U_\lambda \Phi(x) = i \mathbb{E}_x [X_1 e^{i\lambda X_1} \Phi(X_1)]$; pour toute fonction Φ de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$,

on a $U_\lambda \Phi(x) = \frac{d}{d\lambda}(P_\lambda \Phi(x))$ i-e $U_\lambda = \frac{dP_\lambda}{d\lambda}$.

Pour montrer la continuité de la fonction $\lambda \rightarrow P_\lambda$, on écrit

$$\begin{aligned} \|U_\lambda - U_{\lambda_0}\|_{\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_x [|(e^{i\lambda X_1} - e^{i\lambda_0 X_1}) X_1|] \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_x [|(e^{i(\lambda-\lambda_0)X_1} - 1) X_1| \mathbf{1}_{|X_1| \leq c}] + 2 \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_x [|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| > c}] \end{aligned}$$

On fixe c de façon à rendre négligeable le terme $\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{E}_x [|X_1| \mathbf{1}_{|X_1| > c}]$, puis l'on fait tendre λ vers λ_0 .

ii) P étant quasi-compact et irréductible, il existe sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R})$ un opérateur borné r de rayon spectral $\rho(r) < 1$ et tel que $P = \pi + r$, avec $\pi r = r \pi = 0$. D'après ce qui précède, l'opérateur P_λ est une perturbation de P au voisinage de 0, d'où le ii) du lemme.

iii) on a $P_{\frac{\lambda}{n}}^n 1(x) = \mathbb{E}_x [e^{i\lambda \frac{S_n}{n}}] = k(\frac{\lambda}{n})^n \pi_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + r_{\frac{\lambda}{n}}^n 1(x)$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(P_{\frac{\lambda}{n}}^n 1(x) \right) &= i \mathbb{E}_x \left[\frac{S_n}{n} e^{i\lambda \frac{S_n}{n}} \right] \\ &= k'(\frac{\lambda}{n}) k(\frac{\lambda}{n})^{n-1} \pi_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + \frac{1}{n} k(\frac{\lambda}{n})^n \pi'_{\frac{\lambda}{n}} 1(x) + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} r_{\frac{\lambda}{n}}^l r'_{\frac{\lambda}{n}} r_{\frac{\lambda}{n}}^{n-l-1} 1(x) \end{aligned}$$

En prenant $\lambda = 0$, on obtient $i \mathbb{E}_x [\frac{S_n}{n}] = k'(0) + \frac{1}{n} \pi'_0 1(x) + \frac{1}{n} r^{n-1} r' 1(x)$,

d'où $k'(0) = i \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x [\frac{S_n}{n}] = im$.

Lorsque P admet des moments d'ordre $2+\alpha$, nous introduisons la fonction

$$H(x, \lambda) = \mathbb{E}_x [e^{i \frac{\lambda}{\sqrt{n}} (S_n - nm)}] = e^{-i\lambda m \sqrt{n}} P_{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}}^n 1(x); \text{ cette fonction est de classe } C^{2+\alpha} \text{ et}$$

l'on obtient, en prenant la valeur de la dérivée seconde à l'origine :

$$-\frac{1}{n} \mathbb{E}_x [(S_n - nm)^2] - k''(0) - m^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \pi'_0 1(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} r^{n-1} r'_0 1(x) + \frac{1}{n} \pi''_0 1(x) \\ + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-2} r^l r'_0 r^{n-2-l} r'_0 1(x) + \frac{1}{n} r^{n-2} r''_0 1(x),$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_x [(S_n - nm)^2] + k''(0) + m^2 = 0.$$

$$\text{Comme } \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}_x [(S_n - nm)^2] = \int_{\mathbb{R}} (x - m)^2 \pi(dx), \text{ on a finalement}$$

$$k''(0) = -\alpha^2.$$

Pour conclure cette étude de la famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, notons que lorsque P est adapté, 1 n'est pas valeur propre de P_λ pour $\lambda \neq 0$; par conséquent, sous la condition S , pour $\lambda \neq 0$, $I - P_\lambda$ est inversible, et en particulier la fonction $\lambda \rightarrow \|(I - P_\lambda)^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.

1^{er} cas : P admet des moments d'ordre $2 + \alpha$

Pour toute fonction positive Φ de $\mathcal{H}$, on a

$$G(1 \otimes \Phi)(x, c) = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} G_r(1 \otimes \Phi)(x, c)$$

$$\text{où } \forall r < 1 \quad G_r(1 \otimes \Phi)(x, c) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathbb{E}_x [\Phi(c + S_n)] \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathbb{E}_x [e^{i\lambda S_n}] d\lambda \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} (I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) d\lambda$$

et l'on décompose $G_r(1 \otimes \Phi)(x, c)$ en $I_{1,r}(x, c) + I_{2,r}(c)$ avec

$$I_{1,r}(x, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left((I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi'_0 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda \frac{\alpha \lambda^2}{2})} \right) d\lambda$$

$$\text{et } I_{2,r}(x,c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} d\lambda.$$

Etude de $I_{1,r}(x,c)$.

Elle se calque sur celle du théorème 1 ; en particulier, il nous faut prouver l'intégrabilité de la fonction

$$\lambda \rightarrow \hat{\Phi}'(\lambda) \left((I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) + \hat{\Phi}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left((I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right)$$

On fixe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $|\lambda| < \varepsilon$, on ait $P_\lambda = k(\lambda) \pi_\lambda + r_\lambda$, avec simultanément

$$\rho(r_\lambda) \leq \rho_\varepsilon < 1, |k(\lambda) - 1 - im\lambda + \frac{a\lambda^2}{2}| \leq A_\varepsilon |\lambda|^{2+\alpha}, |k'(\lambda) - im + \lambda a| \leq A_\varepsilon |\lambda|^{1+\alpha}$$

$$\|\pi_\lambda - 1 - \lambda \pi_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq A_\varepsilon |\lambda|^2, \|\pi_\lambda' - \pi_0'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq A_\varepsilon |\lambda| \text{ et } \|\pi_\lambda\| \leq 2.$$

L'hypothèse $\rho_\varepsilon < 1$ entraîne en particulier l'existence d'une constante $M_\varepsilon < +\infty$ telle que

$$\sup_{|\lambda| < \varepsilon} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} r_\lambda^n \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_\varepsilon \text{ et } \sup_{|\lambda| < \varepsilon} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{n-1} r_\lambda^l r_\lambda' r_\lambda^{n-l-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq M_\varepsilon.$$

Pour $|\lambda| < \varepsilon$, on a d'une part

$$\begin{aligned} (I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n r_\lambda^n 1(x) + \left(\frac{\pi_\lambda 1(x)}{1 - rk(\lambda)} - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n r_\lambda^n 1(x) + \frac{\pi_\lambda 1(x) - (1 + \lambda \pi_0' 1(x))}{1 - rk(\lambda)} + (1 + \lambda \pi_0' 1(x)) \frac{r(k(\lambda) - (1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))}{(1 - rk(\lambda))(1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))} \end{aligned}$$

si bien que, d'après le choix de ε , il existe une constante $A_\varepsilon > 0$ telle que

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |\lambda| < \varepsilon \\ \frac{1}{2} < r < 1}} \left| (I - rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right| \leq A_\varepsilon < +\infty$$

d'où la majoration

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2} < r < 1}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Phi}(\lambda) \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right)| d\lambda \leq A_\varepsilon \|\hat{\Phi}\|_\infty \\ + \|\hat{\Phi}\|_1 \left(\frac{2}{m\varepsilon} + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \|(I-rP_\lambda)^{-1}\| \right) \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2})} \right) &= \frac{(1-rk(\lambda))\pi_\lambda' 1(x) + rk(\lambda)\pi_\lambda 1(x)}{(1-rk(\lambda))^2} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \sum_{l=0}^{n-1} r_\lambda^l r_\lambda' r_\lambda^{n-l-1} 1(x) - \frac{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))\pi_0' 1(x) + (rim-\lambda a)(1+\lambda\pi_0' 1(x))}{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \end{aligned}$$

Le choix de ε permet alors de montrer que cette fonction est bornée sur $[-\varepsilon; \varepsilon]$, si bien que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\Phi}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x)}{(1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2}))^2} \right)| d\lambda \leq K_\varepsilon \|\hat{\Phi}\|_\infty \\ + \sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \left\| \frac{d}{d\lambda} ((I-rP_\lambda)^{-1}) \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})} \|\hat{\Phi}\|_1 \end{aligned}$$

Notons que $\sup_{\substack{\lambda \in S(\hat{\Phi}) \\ |\lambda| > \varepsilon \\ 0 < r < 1}} \|(I-rP_\lambda)^{-1}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})} < +\infty$.

La suite de la démonstration se calque sur celle du théorème 1 ; en particulier, pour l'étude de $I_{2,r}(x, c)$, on remplace, dans la preuve du théorème 1, $\hat{\Phi}(\lambda)$ par $(1+\lambda\pi_0' 1(x)) \hat{\Phi}(\lambda)$.

2ème cas : P admet des moments d'ordre $3+\alpha$
On reprend l'étude précédente avec cette fois

$$I_{1,r}(x, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left((I-rP_\lambda)^{-1} 1(x) - \frac{1 + \lambda \pi_0' 1(x) + \frac{\lambda^2}{2} \pi_0'' 1(x)}{1-r(1+im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i\frac{b\lambda^3}{6})} \right) d\lambda$$

$$\text{et } I_{2,r}(x,c) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(\lambda) e^{i\lambda c} \left(\frac{1 + \lambda \pi_0' l(x) + \frac{\lambda^2}{2} \pi_0'' l(x)}{1 - r(1 + im\lambda - \frac{a\lambda^2}{2} - i \frac{b\lambda^3}{6})} \right) d\lambda.$$

□

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREIMAN L. *"Probability"*
Addison Wesley Publishing Company, 1968
- [2] DUNFORD N. & SCHWARTZ J. *"Linear operators"* Part I
Interscience, 1971
- [3] GUIVARC'H Y. *"Application d'un théorème limite local à la transience et à la récurrence de marches de Markov"*
Springer Verlag Lectures Notes 1096, p.301-332, 1984
- [4] LEPAGE E. *"Théorèmes limites pour les produits de matrices aléatoires"*
Springer Verlag Lectures Notes 928, p.258-303, 1984

PEIGNE Marc
I.R.M.A.R.
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDEX