PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ALBERT RAUGI

Caractérisation d'une famille de fonctions harmoniques positives sur les groupes moyennables

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1989-1990, fascicule 1
« Probabilités », , p. 115-133
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1989-1990___1_115_0>

Caractérisation d'une famille de fonctions harmoniques positives sur les groupes moyennables.

Par Albert RAUGI
IRMAR Université Rennes I
35042 Rennes cedex

1 - Introduction

Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive [resp. une mesure de probabilité] sur les boréliens de G. On s'intéresse aux fonctions boréliennes positives [resp. bornées] vérifiant l'équation fonctionnelle:

$$(*)\ h(g) = \int_G h(gx)\ \sigma(dx) \quad (g \in G).$$

On appelle fonction *σ–harmonique* toute fonction borélienne solution de cette équation fonctionnelle.

Lorsque G est abélien, ce problème a été examiné et résolu par G. Choquet et J. Deny ([2]). Des démonstrations de ces résultats s'étendant au cas d'un semi-groupe ont été données par L. Davies ([4], cas discret) et A. Raugi ([16], cas général).

Lorsque G est un groupe de Lie semi-simple et σ une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Haar, H. Furstenberg ([7]) a donné une représentation intégrale des fonctions σ–harmoniques bornées. Il existe un espace homogène compact B de G, appelé espace de Poisson, décrit explicitement, et une mesure de probabilité ν sur B vérifiant $\sigma*\nu=\nu$, appelée noyau de Poisson, tels que les solutions bornées h de l'équation $(*)$ sont données par $h(g)= \int_B \hat{h}(g.x)\ \nu(dx)$ où $\hat{h}$ est une fonction continue bornée sur B. Cette représentation a été étendue à des groupes plus généraux et pour une mesure de probabilité σ "étalée" par R. Azencott ([1]).

Dans le cas d'un groupe de Lie semi-simple, H. Furstenberg ([8]) a aussi résolu le problème des solutions positives lorsque σ vérifie l'hypothèse (H) (Voir (2.1)).

Dans le cas d'un groupe nilpotent ou extension compacte d'un groupe nilpotent: le problème des solutions bornées a été étudié par Y. Guivarc'h ([9]); celui des solutions positives, sous l'hypothèse (H), par G.A. Margulis ([13]) (cas nilpotent), puis par J.P.-Conze et Y. Guivarc'h ([3]) (cas d'une extension compacte d'un groupe nilpotent) .

Dans le cas du groupe libre non abélien à un nombre fini de générateurs et pour une mesure σ à support fini, le problème a été étudié par Y. Derriennic ([5]).

Dans le cas du groupe affine de la droite réelle, le problème a été résolu par L. Elie ([6]).

Dans le cas général d'un groupe L.C.D., presque connexe, et pour une mesure de probabilité étalée, A. Raugi ([15]) a donné une représentation intégrale des fonctions harmoniques bornées qui généralise celle obtenue par H. Furstenberg. Cette représentation est obtenue avec un espace homogène B de G, explicitement décrit, non nécessairement compact.

Plaçons nous dans le cas d'un groupe moyennable, en utilisant ce résultat, nous pouvons construire des fonctions σ–harmoniques positives. Appelons $\mathscr{P}$ l'ensemble des exponentielles σ–harmoniques (c.a.d. des homomorphismes de groupes χ de G dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ tels que $\int_G \chi(g)\sigma(dg)=1$). Pour tout élément χ de $\mathscr{P}$, Appelons B_χ l'espace de Poisson et ν_χ le noyau de Poisson qui permettent de décrire les fonctions $\chi\sigma$–harmoniques bornées. Si la mesure σ vérifie l'hypothèse (H), on voit facilement que pour tout $g \in G$, la mesure $g\nu_\chi$, convolée de la mesure de Dirac ε_g par la mesure ν_χ, est équivalente à ν_χ. Pour tout $x \in B_\chi$, la fonction

$$(*)\, h_{x,\chi}(g) = \chi^{-1}(g)\ (d(g\,\nu_\chi)/d\nu_\chi)(x)$$

est σ–harmonique positive. En prenant des moyennes sur x et χ de telles fonctions, on obtient encore des fonctions σ–harmoniques positives. Les résultats de L. Elie ([6]), montrent que l'on n'obtient pas ainsi toutes les solutions du problème. La question naturelle qui se pose alors est de caractériser les fonctions σ–harmoniques positives que l'on obtient ainsi.

A chaque fonction σ–harmonique positive, nous associons un système dynamique $(\Omega, \overset{h}{\mathbb{P}}, T)$. Nous montrons alors que les fonctions σ–harmoniques positives extrémales obtenus par la formule $(*)$, sont celles pour lesquelles le système dynamique possède une variable aléatoire T–invariante, positive, intégrable, non presque sûrement nulle. On peut dire aussi que les solutions du problème que l'on obtient ainsi sont celles qui sont comparables (dans un sens qui sera précisé dans la suite), à des exponentielles harmoniques.

Généralités

2 - Etude des cônes des fonctions σ-harmoniques

(2.0) Notations. Soient G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D.) et σ une mesure de Radon positive sur G. Nous notons e l'élément neutre de G. Nous désignons par $C(G)$ l'espace des fonctions continues sur G; par $C_K(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. Nous notons T_σ le semi-groupe fermé engendré par le support de la mesure σ.

Une fonction borélienne positive h sur G est dite *σ-harmonique à gauche* [respectivement *σ-harmonique à droite*] si elle vérifie l'égalité fonctionnelle:

$$h(g) = \int_G h(gx)\ \sigma(dx), \forall g \in G$$

[respectivement $h(g) = \int_G h(xg)\ \sigma(dx)$, $\forall g \in G$].

Une fonction qui est à la fois σ-harmonique à droite et à gauche sera dite *bi-σ--harmonique.*

Nous désignons par HG_σ l'espace des fonctions continues positives σ-harmoniques à gauche sur G ; par HD_σ l'espace des fonctions continues positives σ-harmoniques à droite sur G et par $H_\sigma = HG_\sigma \cap HD_\sigma$ l'espace des fonctions continues positives bi-σ-harmoniques sur G.

Si f est une fonction sur G et μ une mesure positive sur les boréliens de G, on note f^μ la fonction définie par : $f^\mu(x) = \int_G f(ux)\ \mu(du)$, ($x \in G$). Lorsque $\mu = \varepsilon_u$ est la mesure de Dirac en un point u de G on note plus simplement f^u la fonction f^{ε_u} ; cette fonction sera appelée *translatée à gauche* de f par u. L'espace HG_σ est stable par translation à gauche . On désigne par m_G une mesure de Haar à gauche sur G ; Lorsque la mesure μ possède une densité α par rapport à cette mesure de Haar , on note f^α la fonction f^μ .

La fonction identiquement nulle sur G appartient à HG_σ et H_σ . Nous désignons par HG_σ^* [*resp.* H_σ^*] l'ensemble des éléments non nuls de HG_σ [*resp.* H_σ] .

Nous introduisons l'hypothèse suivante :

(2.1) Définition. Nous disons que σ vérifie l'hypothèse (H) si $T_\sigma = G$ et si σ possède une densité continue à support compact par rapport à une mesure de Haar de G. Lorsque σ vérifie l'hypothèse (H) nous écrivons: $\sigma(dx)=\varphi(x)m_G(dx)$; où φ est un élément de $C_K(G)$. En outre nous posons :

$$\lambda(dx) = \sum_{k\geq 1} 2^{-k}\,\sigma^k(dx) = \psi(x)\ m_G(dx)\,;$$

où σ^k désigne la k–ième convolée de σ.
Sous cette hypothèse, la fonction ψ ainsi que tout élément de HG_σ^* est strictement positif sur G et il est facile de voir que :

(2.2) **Lemme.** *Si σ vérifie l'hypothèse (H), alors pour tout élément h de HG_σ nous avons :* $|h(x)-h(y)| \leq h(e)\ \varepsilon(x,y)$;
où $\varepsilon(x,y) = \sup_{u\in G} [\,|\varphi(x^{-1}u)-\varphi(y^{-1}u)| \,/\, \psi(u)\,]$.

Nous avons évidemment un résultat analogue pour les éléments de HD_σ.

Nous munissons $C(G)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts; $C(G)$ est alors un espace vectoriel topologique métrisable localement convexe. Du lemme (2.2) on déduit:

(2.3) **Corollaire.** *Soient G un groupe* L.C.D. *et σ une mesure de Radon positive vérifiant l'hypothèse (H). Alors, dans $C(G)$, HG_σ, HD_σ et H_σ sont des cônes réticulés à bases compactes.*

D'autre part du lemme (2.2), il résulte que les éléments de HG_σ et HD_σ possèdent les propriétés de continuités suivantes.

(2.4) **Corollaire.** *Si* σ *vérifie l'hypothèse* (*H*) *alors pour tout élément de* HG_σ *[respectivement* HD_σ*], il existe une fonction continue* δ *sur* G *vérifiant* $\delta(e)=0$ *et telle que* $\forall\, u, g \in G$,

$$|h(ug) - h(u)| \leq \delta(g)\, h(u) \qquad [\text{resp. } |h(gu) - h(u)| \leq \delta(g)\, h(u)]\,.$$

Nous terminons cette section par l'énoncé d'un résultat classique en théorie des martingales. Nous aurons l'occasion d'utiliser ce résultat à plusieurs reprises dans la suite.

(2.5) **Proposition.** *Soient* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *deux probabilités définies sur un espace mesurable filtré* $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0})$. *Pour tout entier naturel* n, *appelons* $\mathbb{P}_n$ et $\mathbb{Q}_n$ *les restrictions des probabilités* $\mathbb{P}$ *et* $\mathbb{Q}$ *à la tribu* $\mathcal{F}_n$. *Supposons que la probabilité* $\mathbb{Q}_n$ *soit absolument continue par rapport à la probabilité* $\mathbb{P}_n$ *avec une densité notée* X_n . *Alors :*

i) La suite de variables aléatoires $\{X_n\ ;\ n\geq 0\}$ *définie sur* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *est une martingale positive qui converge* $\mathbb{P}$*–p.s. vers une v.a.* $\mathbb{P}$*–intégrable* X .

ii) La probabilité $\mathbb{Q}$ *s'écrit* $\mathbb{Q} = X\ \mathbb{P} + \mathbb{R}$, *où* $\mathbb{R}$ *est une mesure positive étrangère à la probabilité* $\mathbb{P}$.

iii) La probabilité $\mathbb{Q}$ *s'écrit* $\mathbb{Q} = X\ \mathbb{P}$ *si et seulement si*

$$\int_\Omega X\, d\mathbb{P} = \int_\Omega X_0\, d\mathbb{P}\ .$$

Dans ce cas la convergence de la suite X_n *vers* X *a lieu aussi dans* $L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ *et l'on a* $X_n = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X \mid \mathcal{F}_n]$.

3. Probabilité sur $G^{\mathbb{N}^*}$ associée à une fonction harmonique.

Dans cette section nous associons à tout élément h de $HG_\sigma{}^*$ une probabilité ${}^h\mathbb{P}$ sur le G-espace $G^{\mathbb{N}^*}$. Nous reprenons les notations de la section 2 et nous supposons que σ vérifie l'hypothèse (H), (définition (2.1)).

(3.1) Soit $h \in HG_\sigma{}^*$. On considère la probabilité de transition ${}^hP$ sur G définie par: ${}^hPf(g) = \frac{1}{h(g)} \int_G h(gx) f(gx)\ \sigma(dx)$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit sur G^n la probabilité :

$$\mu_n(dx_1, \ldots, dx_n) = [\, h(x_1 \ldots x_n) / \, h(e)\,]\ \sigma(dx_1) \ldots \sigma(dx_n).$$

D'après le théorème de Kolmogorov, il existe une unique mesure de probabilité ${}^h\mathbb{P}$ sur $G^{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, la projection de ${}^h\mathbb{P}$ sur G^n soit égale à μ_n.

On note $\{Y_n \,;\ n \geq 1\}$ les coordonnées de $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$ et on pose :

$$X_0 = e \ ; \ X_n = Y_1 \ldots Y_n \quad \forall\, n \geq 1.$$

Pour $n \geq 1$, on appelle $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $\{Y_k : 1 \leq k \leq n\}$. On désigne par $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. On vérifie aisément que $(\, \Omega = G^{\mathbb{N}^*},\ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\, G^{\mathbb{N}^*}),\ (X_n)_{n\geq 0},\ (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0},\ {}^h\mathbb{P}\,)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$, partant de e.

(3.2) Nous introduisons l'opérateur θ de décalage sur $\Omega = G^{\mathbb{N}^*}$; θ est l'application de Ω dans Ω qui à l'élément $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ de Ω associe l'élément $(\omega_2, \ldots, \omega_{n+1}, \ldots)$; autrement dit nous avons

$$\forall \omega \in \Omega, \forall n \geq 1, Y_n\,(\theta(\omega)) = Y_{n+1}(\omega).$$

(3.3) **Lemme.** *Pour tout* $h \in HG_\sigma{}^*$, *nous avons :*

i) $\forall\, n \geq 1,\ \theta^n({}^h\mathbb{P}) = {}^{h^{\sigma^n}}\mathbb{P}$;

ii) Pour toute mesure positive ρ sur les boréliens de G,

$$\int_G h(x)\ {}^{h^x}\mathbb{P}\ \rho(dx) \quad = \quad h^\rho(e)\ {}^{h^\rho}\mathbb{P} .$$

Preuve. On montre l'égalité des mesures en vérifiant qu'elles coïncident sur les tribus $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$ et en utilisant le théorème des classes monotones ([14], Prop. I.4.2).❑

4. Variables aléatoires θ–invariantes.

(4.1) Un borélien A de Ω est dit θ-invariant si $\theta^{-1}(A) = A$. L'ensemble des boréliens θ-invariants forme une tribu que l'on notera $\mathcal{I}$. Une variable aléatoire Z est $\mathcal{I}$-mesurable si et seulement si $Z = Z \circ \theta$; une telle variable sera dite θ-invariante.

(4.2) **Lemme.** Soit h un élément de $HG_\sigma{}^*$. Nous avons:

i) $\forall A \in \mathcal{I}, \forall n \geq 1, {}^h\mathbb{P}[A] = {}^{h^{\sigma^n}}\mathbb{P}[A]$;

ii) Pour tout $A \in \mathcal{I}$, la fonction f définie par

$$f(g) = h(g)\ {}^{h^g}\mathbb{P}[A] , (g \in G).$$

appartient à HG_σ et vérifie $\lim_{n \to +\infty} (f(X_n)/h(X_n)) = 1_A$, ${}^h\mathbb{P}$–$p.s.$

Preuve. La première assertion résulte immédiatement de l'affirmation *i)* du lemme (3.3) .

Quant à la seconde elle s'obtient en appliquant sucessivement les assertions *ii)* du lemme (3.3) et *i)* du lemme (4.2) à l'élément h^g de HG_σ.

Pour $s \in G$, nous désignons par τ_s l'application de Ω dans Ω qui à $\omega \in \Omega = G \times \Omega$ associe $(s, \omega) \in \Omega$.

Nous appelons ${}^h\mathbb{P}_s$ la probabilité image de ${}^{h^s}\mathbb{P}$ par τ_s . On vérifie aisément que $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)$, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $(X_n)_{n\geq 0}, {}^h\mathbb{P}_s)$ est une chaîne de Markov de probabilité de transition ${}^hP$ partant de s.

La propriété de Markov nous donne alors :

$$\forall s \in G ,\ f(X_n)/h(X_n) = {}^h\mathbb{P}_{X_n}[A] = {}^h\mathbb{E}_s[1_A \mid \mathcal{F}_n] \quad {}^h\mathbb{P}_s\text{-}p.s..$$

Le résultat résulte alors de la convergence , ${}^h\mathbb{P}_s$ –$p.s.$, vers 1_A de la martingale $\{ {}^h\mathbb{E}_s[1_A \mid \mathcal{F}_n] ; n \geq 0 \}$.❑

(4.3) **Corollaire.** Si h est un élément extrémal de HG_σ, alors, pour tout élément A de $\mathcal{I}$, nous avons l'alternative suivante :

ou bien $\forall g \in G$, ${}^{h^g}\mathbb{P}[A] = 0$; ou bien $\forall g \in G$, ${}^{h^g}\mathbb{P}[A] = 1$.

5. Variable aléatoire η–invariante.

(5.1) Nous appelons η l'application de Ω dans Ω qui à $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n,\dots)$ associe l'élément $(\omega_1\omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_{n+1}, \dots)$. Autrement dit, nous avons pour tout élément ω de Ω,

$$Y_1(\eta(\omega)) = Y_1(\omega)\, Y_2(\omega) \quad \text{et} \quad \forall\, k \geq 2\,,\; Y_k(\eta(\omega)) = Y_k(\theta(\omega)) = Y_{k+1}(\omega)\,.$$

(5.2) Un borélien A de Ω est dit η–invariant si $\eta^{-1}(A) = A$. L'ensemble des boréliens η–invariants forme une tribu que l'on notera $\mathcal{G}$. Une variable aléatoire Z est $\mathcal{G}$–mesurable si et seulement si $Z = Z o \eta$; une telle application sera dite η–invariante.

(5.3) **Lemme.** *Pour tout élément h de HG_σ^* et tout élément g de G,*

$$\sup_{x \in G} \frac{h^\lambda(gx)}{h^\lambda(x)} < +\infty \qquad \text{(Voir (2.1))}.$$

Preuve. Pour $n \geq 1$, appelons ψ_n, la densité de la mesure positive $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\sigma^k$; nous avons $\psi_1 = \frac{1}{2}\varphi$ et $(\psi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions continues à supports compacts qui croît vers ψ. Les sous-ensembles $\{\psi_n > 0\}$ de G sont des ouverts qui croissent vers G tout entier.

Pour $g \in G$, il existe donc un entier $n(g)$, tel que $(supp\, \sigma)g \subset \{\psi_{n(g)} > 0\}$; et par suite $\delta(g) = \sup_{x \in G} \dfrac{\varphi(xg^{-1})}{\psi_{n(g)}(x)} < +\infty$.

Appelons ρ la mesure $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\sigma^{k-1}$. Nous avons

$$h^\lambda(gx) = \int_G h^\rho(ygx)\, \varphi(y)\, dy = \int_G h^\rho(yx)\, \varphi(yg^{-1})\, \Delta(g^{-1})\, dy$$

$$\leq \delta(g)\,\Delta(g^{-1})\,h^{\rho*\sigma^n}(x) \leq \delta(g)\,\Delta(g^{-1})\,2^{n(g)-1}\,h^{\lambda}(x) \;;$$

où Δ est définie par $m_G * \varepsilon_g = \Delta(g)\; m_G \quad (g \in G)$.

(5.4) Soit $h \in HG_\sigma{}^*$. Pour simplifier l'écriture nous écrivons $\overline{h}$ au lieu de h^λ. Pour tout $g \in G$, le sous-ensemble mesurable Ω_g de Ω défini par $\Omega_g = \{\omega \in \Omega : \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\overline{h}\,(gX_n(\omega))}{\overline{h}\,(X_n(\omega))}$ existe$\}$ est η–invariant. Nous posons alors:

$$\overline{\xi}\,(g,\omega) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\overline{h}\,(gX_n(\omega))}{\overline{h}\,(X_n(\omega))} \quad \text{si } \omega \in \Omega_g \quad \text{et} \quad \overline{\xi}\,(g,\omega) = 0 \quad \text{si } \omega \in \Omega \backslash \Omega_g.$$

Pour tout $g \in G$, $\overline{\xi}\,(g,\omega)$ est une variable η - invariante.

(5.5) **Proposition.**

i) $\forall\, n \geq 0$, $\overline{h}\,(gX_n)/\,\overline{h}\,(X_n) = {}^{\overline{h}}\mathbb{E}\,[\,\overline{\xi}\,(g,.)\mid \mathcal{F}_n\,] \quad {}^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$

et $\overline{h}\,(g)\; {}^{\overline{h}^{\,g}}\mathbb{P} = \overline{\xi}\,(g,.)\,\overline{h}\,(e)\; {}^{\overline{h}}\mathbb{P}$;

ii) $\forall\, g, x \in G$, $\overline{\xi}\,(gx,.) = \overline{\xi}\,(g,(x,.))\;\overline{\xi}\,(x,.) \quad {}^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$;

iii) ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}(dg, d\omega) = \dfrac{1}{\overline{h}\,(e)}\;\overline{\xi}\,(g,\omega)\;\sigma(dg)\;{}^{\overline{h}}\mathbb{P}(d\omega)$.

Preuve. Pour tout $x \in G$, le processus $\{\dfrac{\overline{h}\,(gxXn)}{\overline{h}\,(xXn)}\;;\; n \geq 0\}$ défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, {}^{\overline{h}^{\,x}}\mathbb{P})$ est une martingale bornée. Il converge donc ${}^{\overline{h}^{\,x}}\mathbb{P}$ $-p.s.$ et dans tous les espaces $\mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, {}^{\overline{h}^{\,x}}\mathbb{P})$ vers $\overline{\xi}\,(g,(x,\,.\,))$. Il s'ensuit que :

$$\forall\, x, g \in G,\quad \overline{h}\,(gx)\;{}^{\overline{h}^{\,gx}}\mathbb{P} = \overline{\xi}\,(g,(x,\,.\,))\;\overline{h}\,(x)\;{}^{\overline{h}^{\,x}}\mathbb{P}$$

et les probabilités $\{\,{}^{\overline{h}^{\,x}}\mathbb{P}\;;\, x \in G\,\}$ sont équivalentes.

Les assertions *i)* et *ii)* s'en déduisent immédiatement. A l'aide de la première assertion de *i)*, on vérifie que les deux probabilités de l'assertion *iii)* coïncident sur toutes les tribus $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$. ❑

(5.6) Nous appelons $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires Z η–invariantes et telles que , pour tout $g \in G$, la variable aléatoire $Z(g,.)\,\overline{\xi}\,(g,.)$ soit ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$ –intégrable.

(5.7) **Proposition.**

i) Pour tout élément positif Z de $\mathcal{E}$, la relation

$$f(g) = \overline{h}\,(e)\ {}^{\overline{h}}\mathbb{E}[\ \overline{\xi}\,(g\,,.)Z(g\,,.)\,]\ ,(g \in G),$$

définit un élément de HG_σ telle que la mesure ${}^{f}\mathbb{P}$ soit absolument continue par rapport à la mesure ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$.

ii) Réciproquement soit f est un élément de HG_σ telle que la mesure ${}^{f}\mathbb{P}$ soit absolument continue par rapport à la mesure ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$. *Pour tout $g \in G$, la suite de variables aléatoires $\{\dfrac{f(gX_n)}{\overline{h}\,(gX_n)}\ ;\, n \geq 0\ \}$ converge , ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$–p.s., vers une variable aléatoire $Z(g\,,.)$. La variable Z appartient à $\mathcal{E}$ et nous avons*

$$f(g)\ {}^{f^g}\mathbb{P} \ = Z(g\,,.)\ \overline{\xi}\,(g\,,.)\,\overline{h}\,(e)\ {}^{\overline{h}}\mathbb{P}.$$

Preuve. Clair.

6. Système dynamique associé à un élément de $HG_\sigma^{\;*}$.

(6.1) Nous introduisons l'opérateur T suivant : si F est une fonction borélienne positive (ou bornée) sur Ω , nous définissons

$$TF(\omega) = \int_\Omega F\,((g\,,\omega))\ \overline{\xi}\,(g\,,\omega)\ \sigma(dg) \qquad (\omega \in \Omega).$$

De l'assertion *iii)* de la proposition (5.5) il résulte que l'on a , pour toutes fonctions boréliennes positives (ou bornées) F et G ,

$$\int_\Omega TF(\omega)\,G(\omega)\ {}^{\overline{h}}\mathbb{P}(d\omega) \ = \ \int_\Omega F(\omega)\ Go\theta(\omega)\ {}^{\overline{h}}\mathbb{P}\,(d\omega)\ .$$

En particulier la probabilité ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$ est T–invariante .

Le triplet $(\Omega, {}^{\bar{h}}\mathbb{P}, T)$ sera appelé système dynamique associé à l'élément h de HG_σ.

(6.2) Nous avons $T1 = 1$ si et seulement $h \in H_\sigma$ et dans ce cas la probabilité ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$ est θ–invariante.

(6.3) Deux éléments Z et Z' de $\mathcal{E}$ sont dits équivalents si et seulement si : $\forall g \in G$, $Z(g,.) = Z'(g,.)$, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$–*p.s.*.

Nous notons $\mathcal{V}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ constitué des variables aléatoires telles que $TZ = Z$. De la proposition (5.7) il résulte que :

(6.4) **Corollaire.** *L'application* $Z \longrightarrow f(g) = \overline{h}(e)\ {}^{\bar{h}}\mathbb{E}[\ \overline{\xi}(g,.)\,Z(g,.)]$ *établit une correspondance bi-univoque entre les classes d'éléments* Z *de* $\mathcal{E}$ *[resp. de* $\mathcal{V}$*] et les fonctions* f *de* HG_σ *[resp.* H_σ*] telles que la mesure* ${}^{f}\mathbb{P}$ *soit absolument* continue par rapport à la mesure ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$.

Fonctions σ–harmoniques positives sur les groupes L.C.D. moyennables connexes

7 - Rappels sur les fonctions harmoniques bornées.

(7.1) Soient G un groupe localement compact à base dénombrable tel que G/G_0 soit compact et μ une mesure de probabilité sur les boréliens de G. [G_0 désigne la composante connexe de l'élément neutre de G]. La probabilité ${}^{1}\mathbb{P}_\mu$ sur Ω associée à la fonction μ–harmonique constante et égale à 1, n'est autre que la probabilité produit $\bigotimes_{\mathbb{N}^*} \mu$.

Lorsque la probabilité μ est étalée, les résultats de [15] peuvent se résumer ainsi:

(7.2) **Théorème.** *Il existe un espace homogène* $E_\mu = G/H_\mu$ *de* G *et une variable aléatoire* U_μ *à valeurs dans* E_μ *vérifiant* $\forall\omega \in \Omega$, $U_\mu(g,\omega)=g.U_\mu(\omega)$, *telle que la tribu des boréliens* η*–invariants coïncide, modulo* ${}^1\mathbb{P}_\mu$ *, avec la tribu engendrée par la variable aléatoire* U_μ *.*

La loi ν_μ *de* U_μ *est l'unique probabilité* μ*–invariante sur* E_μ*. La suite de mesure de probabilités* $(X_n\ \nu_\mu)_{n\geq 0}$ *converge,* ${}^1\mathbb{P}_\mu$*–p.s., vers la mesure de Dirac* ε_U*.Toute fonction* μ*–harmonique bornée* h *s'écrit sous la forme*

$$h(g) = \int_{E_\mu} \hat{h}\ (gx)\ \nu_\mu(dx),$$

pour un certain élément $\hat{h}$ *de* $\mathbb{L}^\infty(E,\nu)$.

8 - Rappel sur les fonctions bi-σ-harmoniques sur les groupes moyennables.

(8.0) Soit $h \in H_\sigma$. Nous avons $\overline{h} = h$ et nous désignons par $(\Omega, {}^h\mathbb{P}, T)$ le système dynamique associé à h. La probabilité ${}^h\mathbb{P}$ est θ–invariante. Les résultats de [16] peuvent se résumer de la façon suivante.

(8.1) **Théorème.** *Soient* G *un groupe L.C.D. moyennable connexe et* σ *une mesure de Radon positive sur les boréliens de* G *vérifiant l'hypothèse (H). Une fonction* h *de* H_σ *est extrémale (dans* H_σ*) si et seulement si le système dynamique* $(\Omega, {}^h\mathbb{P}, T)$ *est ergodique. Dans ce cas, il existe une exponentielle harmonique* χ *telle que pour* ${}^h\mathbb{P}$ *–presque tout* $\omega \in \Omega$, $\xi^h(g,\omega)=\chi(g)$.

9- Description des éléments extrémaux de HG_σ^* pour lesquels le système dynamique associé possède un élément T-invariant, positif, non p.s. nul, intégrable.

(9.1) **Proposition.** *Soit h un élément extrêmal de $HG_\sigma{}^*$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) Il existe une exponentielle harmonique χ telle que ${}^{\chi}\mathbb{P}$ ne soit pas étrangère à ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$.

ii) Il existe une exponentielle harmonique χ telle que ${}^{\chi}\mathbb{P}$ et ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$ soient équivalentes.

iii) $\mathscr{V}$ possède un élément positif, non ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s. nul, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-intégrable.

iv) $\mathscr{V}$ possède un élément ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-intégrable, ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s. strictement positif.

v) Il existe une variable aléatoire positive, T-invariante et ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-intégrable.

vi) La suite de variables aléatoires $\left(\frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}\right)_{n\geq 1}$ admet une valeur d'adhérence pour la topologie faible $\sigma(\mathbb{L}^1, \mathbb{L}^\infty)$.

vii) La suite de variables aléatoires $\left(\frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-p.s. et dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, {}^{\bar{h}}\mathbb{P})$.

Preuve.

1) Supposons que les probabilités ${}^{\chi}\mathbb{P}$ et ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$ ne soient pas étrangères et écrivons: ${}^{\chi}\mathbb{P} = Z\ {}^{\bar{h}}\mathbb{P} + \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ est une probabilité étrangère à ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$. La variable aléatoire Z est alors la limite ${}^{\bar{h}}\mathbb{P}$-*p.s.* de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{\chi(X_n)}{\bar{h}(X_n)}\right)_{n\geq 0}$ (voir proposition (2.5)) . Il s'ensuit que la variable aléatoire positive Z est η-invariante et vérifie la relation d'invariance :

$$Z = \frac{\chi(Y_1)}{\xi(Y_1, \theta(.))}\ Z o\theta \quad {}^{\bar{h}}\mathbb{P}\text{-}p.s..$$

Ce qui montre que Z est aussi T–invariante et que l'événement $\{Z = 0\}$ est θ–invariant et est donc de probabilité nulle (corollaire (4.3)).

2) Si Z est un élément positif $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–intégrable de $\mathscr{V}$, non $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ nul, la fonction f définie par:

$$f(g) = \overline{h}(e)\ ^{\overline{h}}\mathbb{E}[\ \overline{\xi}(g,.)Z(g,.)]\ ,(g \in G),$$

est bi–σ–harmonique extrémale; c'est-à-dire une exponentielle harmonique χ (Corollaires (6.4) et (4.3) et Théorème (8.1)). Nous avons alors:

$$^{\chi}\mathbb{P} = Z(e,.)\ \overline{h}(e)\ ^{\overline{h}}\mathbb{P};$$

et d'après 1) la variable Z(e,.) est $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ strictement positive.

3) D'après le théorème ergodique de Chacon-Ornstein, (Voir [14],Proposition V-6-4), pour toute variable aléatoire $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–intégrable U, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{U+TU+\ldots+T^nU}{1+T1+\ldots+T^n1}\right)_{n\geq 0}$ converge, $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$.

S'il existe une variable aléatoire Z positive, non $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ nulle, intégrable et T–invariante, la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ vers une variable strictement positive sur l'événement $\{Z>0\}$.

Posons $W = \liminf_{n\to\infty} \frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}$; nous avons $TW \leq W$ sur Ω et $TW = W$ sur $\{Z>0\}$. La variable aléatoire $\lim\downarrow_{n\to\infty} T^nW$, est alors un élément positif $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–intégrable de $\mathscr{V}$, strictement positive sur $\{Z>0\}$. D'après 2) la variable aléatoire W est $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ strictement positive. D'après le théorème ergodique de Hopf (Voir [14], Proposition (V-6-3)), il s'ensuit que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge, $^{\overline{h}}\mathbb{P}$–$p.s.$ et dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathscr{F}, {}^{\overline{h}}\mathbb{P})$ vers $\frac{W}{^{\overline{h}}\mathbb{E}[W]}$.

De 1), 2) et 3) on déduit facilement que les assertions de la proposition sont équivalentes.

(9.2) **Théorème.** *Lorsque le système dynamique associé à l'élément* h *de* $HG_\sigma{}^*$ *possède une variable aléatoire positive T–invariante, intégrable, non p.s. nulle, la suite de fonctions* $\left(f_n = \dfrac{\overline{h} + \overline{h}^{\sigma} + \ldots + \overline{h}^{\sigma^n}}{n} \right)_{n\geq 1}$ *converge uniformément sur tout compact vers une exponentielle harmonique* χ .

Considérons la mesure de probabilité $\mu = \chi.\sigma$ *et appelons* (E_χ, ν_χ) *la* μ*–frontière de* G *. La fonction* $\overline{h}$ *s'écrit alors:*

$$\overline{h}(g) = \chi(g) \int_{E_\chi} \hat{h}(g.u)\, \nu_\chi(du), \quad (g \in G) ;$$

pour une certaine fonction borélienne positive $\hat{h}$ *sur* E_χ*. La fonction harmonique* h *s'écrit:*

$$h(g) = \chi(g)\ (d g\nu_\chi / d\, \nu_\chi)(x)\ (g \in G);$$

pour un certain élément x *de* E_χ .

Preuve. D'après le lemme (2.2), via le théorème d'Ascoli, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ admet des valeurs d'adhérence pour la convergence uniforme sur les compacts. Ces valeurs d'adhérences sont nécessairement des fonctions bi–σ–harmoniques.

Soit $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction bi–σ–harmonique f. On voit aisément que la suite de probabilités $({}^{f_{\varphi(n)}}\mathbb{P})_{n\geq 1}$ sur le compact $(Supp\ \sigma)^{\mathbb{N}^*}$ converge étroitement vers la probabilité ${}^{f}\mathbb{P}$. Or nous avons ${}^{f_{\varphi(n)}}\mathbb{P} = \dfrac{1+T1+\ldots+T^{\varphi(n)}1}{\varphi(n)}\ {}^{\overline{h}}\mathbb{P}$ et d'après ce qui précède, nous savons qu'il existe une exponentielle harmonique χ telle que la suite de probabilités $(\frac{1+T1+\ldots+T^n1}{n}\ \overline{h}\,\mathbb{P})_{n\geq 1}$ converge vers ${}^{\chi}\mathbb{P}$. D'où la première assertion du théorème.

D'autre part, les probabilités ${}^{\chi}\mathbb{P}$ *et* ${}^{\overline{h}}\mathbb{P}$ sont équivalentes; il en est donc de même des probabilités ${}^{g}_{\chi}\mathbb{P}$ et ${}^{g}_{\overline{h}}\mathbb{P}$. Nous avons donc:

$$\overline{h}(g)\ {}^{g}_{\overline{h}}\mathbb{P} = Z(g,.)\ \chi(g)\ {}^{g}_{\chi}\mathbb{P} = Z(g,.)\ \chi(g)\ {}^{\chi}\mathbb{P};$$

pour une certaine variable aléatoire η–invariante Z. Mais d'après le théorème (7.2), nous savons que , modulo ${}^{\chi}\mathbb{P} = {}^{1}\mathbb{P}_{\mu}$, cette variable aléatoire s'écrit $\hat{h}\,(U_{\mu})$ pour une certaine fonction borélienne positive $\hat{h}$ sur E_{χ} . D'où le résultat.

La fonction $\overline{h}$ s'écrit aussi:

$$\overline{h}(g) = \chi(g)\ \int_{E_\chi} \frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(u)\ \hat{h}(u)\ v_\chi(du).$$

Pour toute fonction continue positive à support compact α, une telle formule reste valable pour la fonction harmonique h^{α}. Pour tout $x\in E_{\chi}$, la fonction $g\rightarrow \frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(x)$ appartient à HG_{σ} et est donc continue et strictement positive (lemme (2.2)). Or nous avons $\frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(y^{-1}x) = \frac{dygv_\chi}{dyv_\chi}(x)$, par suite, pour tout $g\in G$, la fonction $\frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(.)$ est continue. En prenant une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues positives à support compact, dont les supports forment une suite fondamentale de voisinages de l'élément neutre de G, et telles que $\int_G \alpha_n(g)\, m_G(dg) = 1$, on montre alors, par des arguments standards, que:

$$h(g) = \chi(g)\ \frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(x)\quad (g\in G).\ \square$$

(9.3) <u>Réciproque.</u> Supposons que :

$$h(g) = \chi(g)\ \frac{dgv_\chi}{dv_\chi}(x)\quad (g\in G);$$

où χ est une exponentielle harmonique, v_χ est une mesure de probabilité $\chi\mu$–invariante sur l'espace homogène E_χ de G et x un élément de E_χ.

Pour toute fonction continue, positive, à support compact α sur G, nous avons:

$$h^{\alpha}(g) = \chi(g) \int_{E_\chi} \frac{dg\nu_\chi}{d\nu_\chi}(y^{-1}x)\ h(y)\, a(y)\, dy\ ;$$

que l'on peut écrire

$$h^{\alpha}(g) = \chi(g) \int_{E_\chi} \frac{dg\nu_\chi}{d\nu_\chi}(u)\ \zeta_x(u)\, \nu_\chi(du) = \chi(g) \int_{E_\chi} \zeta_x(g.u)\, \nu_\chi(du)$$

en désignant par ζ_x la dérivée de Radon-Nykodym de la mesure $\tau(h\alpha m_G) * \varepsilon_x$ relativement à ν_χ; où τ est l'application qui à $g \in G$ associe g^{-1}. Or la suite de mesure de probabilités $(X_n.\nu_\chi)_{n\geq 0}$ converge étroitement, ${}^\chi\mathbb{P}$-$p.s.$, vers une mesure de Dirac ε_U (Théorème(7.2)). Nous avons alors :

$$\frac{h^{\alpha}(X_n)}{\chi(X_n)} = \int_{E_\chi} \zeta_x(X_n.u)\, \nu_\chi(du) = {}^\chi\mathbb{E}[\zeta_x(U) \mid \mathcal{F}_n]\,,$$

qui converge, ${}^\chi\mathbb{P}$-$p.s.$ et dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, {}^\chi\mathbb{P})$, vers $\zeta_x(U)$. Par suite

$$\frac{h^\alpha}{h}\mathbb{P} = \zeta_x(U)\ {}^\chi\mathbb{P}.$$

On en déduit que la probabilité ${}^h\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à ${}^\chi\mathbb{P}$ et le système dynamique associé à la fonction harmonique h vérifie la propriété voulue.

BIBLIOGRAPHIE

1. Azencott (R.) : *Espaces de Poisson des groupes localement compacts,* Lect. Notes Math., 148, Springer-Verlag, 1970.

2. Choquet (G.) et Deny (J.) : *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$, C.R.Acad. Sc.,250,1960, p. 799-801.

3. Conze (J.-P.) et Guivarc'h (Y.) : *Propriété de droite fixe et fonctions propres des opérateurs de convolution,* Lect. Notes Math., 404, Springer Verlag, 1974, p. 126-133.

4. Davies (L.) : *A theorem of Deny with applications to characterization problems,* Lect. Notes Math., 861, (Proc. Oberwolfach), Springer Verlag, 1980.

5. Derriennic (Y.) : *Marche aléatoire sur le groupe libre et frontière de Martin,* Zeit. Wahr. verw. Geb., 32,1975, p. 261-276.

6. Elie (L.) : *Fonctions harmoniques positives sur le groupe affine.* Probability measures on groups, Lect. Notes Math., 706, p. 96-110, (Proc. Oberwolfach 1978), Springer-Verlag, 1979.

7. Furstenberg (H.) : *A Poisson formula for semi-simple lie groups,* Annals of math., series 2, t. 77, 1963, p. 335-386.

8. Furstenberg (H.) : *Translation -invariant cones of functions on semi-simple Lie groups,* Bull. Amer. Math. Soc., 71, 1965, p. 271-236.

9. Guivarc'h (Y.) : *Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques,* Bull. Soc. math. France, 101, 1973, p. 333-379.

10. Guivarc'h (Y.) : *Quelques propriétés asymptotiques des produits de matrices aléatoires.* Lect. Notes Math. 774, p. 178-250, (Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour), Spriger-Verlag, 1980.

11. Kaimanovich (V.A.) et Vershik (A.M.) : *Random walks on discrete groups. Boundary and entropy,* Ann. Prob., 11, 1983, p. 457-490.

12. Ledrappier (F.) : *Poisson boundaries of discrete groups of matrices,* C.R.A.S., Série I, 2978, 1984, n°16, 393-396.

13. Margulis (G.A.) : *Positive harmonic functions on nilpotent groups.* Doklady, t. 166, n°5, 1966.

14. Neveu (J.) : *Bases mathématiques du calcul des probabilités,* Masson, 1970.

15. Raugi (A.) : *Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes.* Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977, p. 5-118.

16. Raugi (A.) : *Un théorème de Choquet-Deny pour les semi-groupes abéliens,* Théorie du potentiel, proceedings, Orsay 1983, (Lect. Notes Math., 1096, p. 502-520) Berlin Heidelberg New York, Springer 1984.

17. Raugi (A.) : *Un théorème de Choquet-Deny pour les groupes moyennables,* Probab. Th. Rel. Fields 77, 1988, p. 481-496.

18. Series (C.) : *Martin boundaries of random walks on Fuchsian Groups,* Israel J. Math., 44, n°3, 1983, p. 221-242.