

HORST IBISCH

**L'œuvre de Louis Antoine et son influence**

*Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, 1988, fascicule S6  
« Journée Louis Antoine », , exp. n° 5, p. 1-35

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1988\\_\\_S6\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988__S6_A5_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,  
1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**L'oeuvre de Louis ANTOINE et son influence**

**par Horst IBISCH**

**Professeur à l'Université de Nantes**



# L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE

LOUIS ANTOINE

ET SON INFLUENCE. <sup>1)</sup>

Par HORST IBISCH

Département de Mathématiques, Université de NANTES

0) En avril 1917, LOUIS ANTOINE, âgé de 29 ans et demi, ancien élève de l'École Normale Supérieure, Agrégé de Mathématiques (1912), est capitaine au 151<sup>ème</sup> Régiment d'Infanterie au front devant REIMS. Le 16 avril il est blessé par une balle qui le rend aveugle.

Pendant son long séjour à l'hôpital, où Gaston JULIA partage sa chambre pendant plusieurs mois, Henri LEBESGUE lui donne l'espoir de pouvoir faire une thèse, en évoquant les exemples d'EULER et de GAUSS qui, devenus aveugles, ont continué leurs travaux.

Henri LEBESGUE le dirige vers la topologie en dimension 2 et 3 : d'une part parce que il n'y avait encore que peu de bibliographie à copier en BRAILLE ; d'autre part, d'après le témoignage de G. JULIA, avec l'espoir "que, dans une telle étude, les yeux de l'esprit et l'habitude de la concentration remplaceront la vision perdue " [15].

En juillet 1921, LOUIS ANTOINE soutient à STRASBOURG sa Thèse d'Etat " Sur l'homéomorphisme de deux figures et de leurs voisinages " qui contient l'essentiel de ses travaux scientifiques.

Cette thèse constitue une contribution fondamentale à la topologie en dimension 3. Elle fournit en particulier la méthode de construction d'un

---

1) Conférence donnée le 18 novembre 1988 lors de la JOURNÉE LOUIS ANTOINE à l'Institut de Mathématiques de l'Université de RENNES I.

certain sous-ensemble de CANTOR de  $\mathbb{R}^3$  qui a pris désormais le nom de "COLLIER d'ANTOINE". Cet objet joue d'abord le rôle d'un exemple type symbolisant les pièges et les dangers que rencontrent les topologues en dimension 3. Il intervient ainsi dans la construction de contre-exemples à toute une liste de conjectures classiques. J'en donnerai des détails concernant les conjectures de SCHOENFLIES et de BROUWER et le 5<sup>ème</sup> problème de HILBERT pour les groupes de transformation.

Mais on retrouve également sa trace dans les démonstrations de certains théorèmes parmi les plus récents et les plus célèbres. Il est à l'origine de la définition des "bons" plongements pour lesquels la conjecture de SCHOENFLIES et la conjecture annulaire sont vraies ; il est donc impliqué, bien qu'indirectement, dans le contre-exemple à la HAUPT-VERMUTUNG. Mais d'une façon directe, le Collier d'ANTOINE est la base géométrique même de la célèbre involution de  $S^3$  inventée par BING. C'est en contemplant le Collier d'ANTOINE que BING a imaginé son célèbre SHRINKING CRITERION -le critère de rétrécissement- qui a permis à Robert EDWARDS de montrer que la double suspension d'une sphère homologique est une vraie sphère. Et c'est dans les discussions avec EDWARDS que MICHAEL FREEDMAN a trouvé l'outil qui lui manquait pour mener à bien la démonstration de la conjecture de POINCARÉ en dimension 4 et la classification des variétés simplement connexes en dimension 4.

Cette liste de résultats dans lesquels on peut déceler des relations avec les idées d'ANTOINE n'est pas complète. On pourrait ajouter la 3-variété ouverte contractile de J.H.C. WHITEHEAD non-homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  [23], point de départ des travaux sur les bouts des variétés non-compactes et leur invariants d'homotopie propre. Et le rôle des idées

d'ANTOINE dans la théorie des actions continues ne commence qu'à être reconnu. On peut s'en servir, par exemple, pour montrer que, stablement, le groupe des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  n'est pas engendré par les involutions.

### 1. Plongements topologiques des Sphères en codimension 1.

Nous prenons comme point de départ des questions concernant des plongements de sphères.

Problème : Pour  $n > 1$  soit  $f : S^{n-1} \rightarrow S^n$  un plongement (une application continue injective, donc un homéomorphisme de  $S^{n-1}$  sur  $f(S^{n-1})$ ).

- A. Le complément  $S^n - f(S^{n-1})$  a combien de composantes connexes ?  
 B. Ces composantes connexes ont quelle forme ? Quelles formes ont leurs adhérences ? Sont-elles des boules de dimension  $n$  ?

Généralisation : Soit  $f : \coprod_i S_i^{n-1} \rightarrow S^n$  un plongement d'une réunion disjointe (finie) de sphères de dimension  $n-1$ . Quelles formes ont les adhérences des composantes connexes du complément  $S^n - f(\coprod_i S_i^{n-1})$  ?

### 2. Théorèmes et Conjectures avant les travaux de L. ANTOINE vers 1920.

Il y avait peu de résultats avant 1920. On connaissait en particulier la réponse à la question A :

#### (1) THEOREME de SEPARATION :

$S^n - f(S^{n-1})$  est réunion disjointe de deux ouverts connexes  $U_i$ . Leur bord commun  $\partial U_i$  est  $f(S^{n-1})$ .

Pour  $n=2$ , il s'agit d'un théorème de C. JORDAN (Cours d'ANALYSE 1893).

Pour  $n > 2$ , c'est le célèbre théorème de L.E.J. BROUWER (1912)[7].

A la question B répondait la

(2) CONJECTURE de SCHOENFLIES :

Les compléments  $U_i$  de  $f(S^{n-1})$  dans  $S^n$  sont des boules ouvertes, et les adhérences  $\bar{U}_i = U_i \cup f(S^{n-1})$  sont des boules fermées  $B^n$ .

La conjecture de SCHOENFLIES était démontrée pour  $n=2$ , donc pour les courbes de JORDAN sans points multiples dans le plan. La preuve est due à Arthur SCHOENFLIES (1853-1928) qui était professeur aux Universités de KÖNIGSBERG et de FRANKFURT [22].

La conjecture de SCHOENFLIES est équivalente à la

(2') CONJECTURE de PROLONGEMENT pour les SPHERES :

Etant donné le plongement  $f : S^{n-1} \rightarrow S^n$ , il existe un homéomorphisme  $h : S^n \rightarrow S^n$  tel que  $h \circ f(S^{n-1})$  est l'équateur  $S^{n-1}$  de  $S^n$ .

C'est un simple exercice de montrer que les conjectures (2) et (2') sont équivalentes :

si  $h_i : B_i^n \rightarrow \bar{U}_i$  ( $i=1,2$ ) sont deux homéomorphismes, pour  $B_1^n \cup B_2^n = S^n$ ,  $B_1^n \cap B_2^n = S^{n-1}$ , alors  $h_2^{-1} \circ h_1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  se prolonge en un homéomorphisme  $g : B_2^n \rightarrow B_2^n$  par homothétie :

$$g(x) = \begin{cases} |x| \cdot h_2^{-1} \circ h_1 \left( \frac{x}{|x|} \right) & \text{si } |x| \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

L'homéomorphisme  $h : S^n \rightarrow S^n$ , défini par  $h|_{B_1^n} = h_1$ ,  $h|_{B_2^n} = h_2 \circ g$  applique alors  $S^{n-1}$  sur  $f(S^{n-1})$ .

On considérait également la généralisation de (2').

(3) Problème de PROLONGEMENT GENERAL :

Si  $X$  et  $Y$  sont des sous-espaces de  $S^n$ ,  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  un homéomorphisme, peut-on prolonger  $f$  en un homéomorphisme de  $S^n$  tout entier, ou au moins en un homéomorphisme entre des voisinages de  $X$  et de  $Y$  dans  $S^n$  ?

Le cas particulier du problème de prolongement général pour les sous-espaces de CANTOR semblait digne d'une considération prioritaire.

Rappel : Un espace de CANTOR est un espace compact métrisable, totalement discontinu et sans points isolés. Exemple : l'ensemble triadique de CANTOR dans  $[0,1]$ .

Dans deux notes aux C.R.A.S. en 1909/10 [10], ARNAUD DENJOY avait annoncé les résultats suivants :

Deux espaces de CANTOR sont homéomorphes.

Tout sous-espace de CANTOR de  $S^n$  est contenu dans un arc de JORDAN sans points multiples.

Ces résultats de DENJOY et les techniques de SCHOENFLIES conduisaient à la conjecture que tout homéomorphisme entre sous-espaces de CANTOR de  $S^2$  se prolonge à  $S^2$  tout entier.

Dans les chapitres I et II de sa thèse L. ANTOINE reprend les démonstrations que DENJOY lui avait communiquées, les modifie en les basant sur la technique dite " des chaînons " , due à DE LA VALLEE POUSSIN, et démontre en plus la conjecture de prolongement pour les sous-espaces de CANTOR de  $S^2$ .

Vers 1920, beaucoup de mathématiciens, dont H. LEBESGUE, pensaient qu'il était possible de généraliser les résultats de la topologie de dimension 2 aux dimensions  $n \geq 3$ .

Ainsi, participant à l'optimisme général, J.W. ALEXANDER de l'Université de PRINCETON et l'un des fondateurs de la topologie algébrique annonçait-il en 1921 la démonstration de la Conjecture de SCHOENFLIES en dimension  $n \geq 3$ . La publication de ce travail se faisait attendre : elle ne parut jamais. Car l'annonce des résultats de L. ANTOINE aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences en 1920 [4] et la soutenance de sa thèse [5] en juillet 1921 à STRASBOURG obligeaient les topologues à admettre immédiatement la probabilité de l'existence de contre-exemples.

Le 16 novembre 1923, ALEXANDER communique une note à la NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES intitulée " Remarks on a point set constructed by ANTOINE " [1], où, " from the consideration of a remarkable point set discovered by ANTOINE " , il construit un contre-exemple à la conjecture de SCHOENFLIES.

Le 19 novembre 1923, ALEXANDER présente une nouvelle note : " An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected " [2], " obtained directly without the help of ANTOINE'S inner limiting set " . Il s'agit de la célèbre " HORNED SPHERE " . Dans cette note, ALEXANDER reconnaît : " This example shows that a proof of the generalized SCHOENFLIES theorem announced by me two years ago, but never published, is erroneous " . Il est évident que les deux notes d'ALEXANDER sont le résultat de sa réflexion sur les travaux d'ANTOINE.

### 3. Les résultats de L. ANTOINE en dimension 3.

Voici le résumé des principaux résultats de L. ANTOINE.

La conjecture de prolongement pour les homéomorphismes entre

sous-espaces de CANTOR de  $\mathbb{R}^3(S^3)$  est fausse. Il existe un sous-espace de CANTOR dans  $\mathbb{R}^3(S^3)$ , le "COLLIER d'ANTOINE"  $A$  avec la propriété suivante : si  $C$  est le sous-espace triadique de CANTOR de  $\mathbb{R}^3(S^3)$ , aucun homéomorphisme  $f : A \xrightarrow{\sim} C$  ne se prolonge à des voisinages de  $A$  et de  $C$ , et, a fortiori, à  $\mathbb{R}^3(S^3)$ .

Une légère modification du COLLIER d'ANTOINE, comme celle indiquée par ALEXANDER [1] conduit à l'évidence que la conjecture de SCHOENFLIES dans  $S^3(\mathbb{R}^3)$  est fausse : il existe un plongement  $f : S^2 \rightarrow S^3$  tel que l'un des compléments de l'image  $f(S^2)$  n'est pas homéomorphe à  $B^3$  et n'est même pas simplement connexe : il existe des "sphères sauvages". Les propriétés du COLLIER d'ANTOINE bouleversent notre intuition de la continuité dans l'espace :

Soit  $f : S^2 \rightarrow S^3$  un plongement,  $S^3 - f(S^2)$  la réunion disjointe des ouverts  $U_1$  et  $U_2$ , et soit  $A \cap U_i \neq \emptyset$  ( $i=1,2$ ). Alors  $A \cap f(S^2) \neq \emptyset$ .

Ce qui veut dire : bien que le COLLIER d'ANTOINE soit totalement discontinu, il est impossible de glisser entre ses points l'image homéomorphique d'une sphère sans la rencontrer.

La découverte du COLLIER d'ANTOINE avait sur les spécialistes de l'Analysis Situs un effet comparable à celui de la découverte des courbes de PEANO 30 années plus tôt et à propos desquelles SCHOENFLIES avait parlé d'un "tremblement de terre". Elle était la preuve d'une différence qualitative importante entre la topologie en dimension 2 et celle en dimension 3 et elle incitait les topologues désormais à la plus grande prudence. Pour citer P. ALEXANDROFF et H. HOPF [3], p. 17 : "Man wurde besorgt, ob nicht noch mehr anscheinend selbstverständliche Tatsachen der dreidimensionalen Topologie ihrer Widerlegung harreten". On

transformait en conjecture des faits tacitement admis, comme l'existence d'une triangulation sur des variétés topologiques.

G. JULIA [15] a formulé cette nouvelle attitude d'une façon audacieuse : " Tout ce que l'on peut prévoir relevant du bon sens est exact dans le plan mais est toujours faux dans l'espace à plus de deux dimensions. Notre intuition est surtout celle d'être infiniment plats "

#### 4. Le COLLIER d'ANTOINE.

Dans un tore plein  $T=X_1$ , on plonge  $k \geq 2$  tores  $T_i$  enlacés plus petits qui forment les maillons d'une chaîne (Fig.1,2,3)

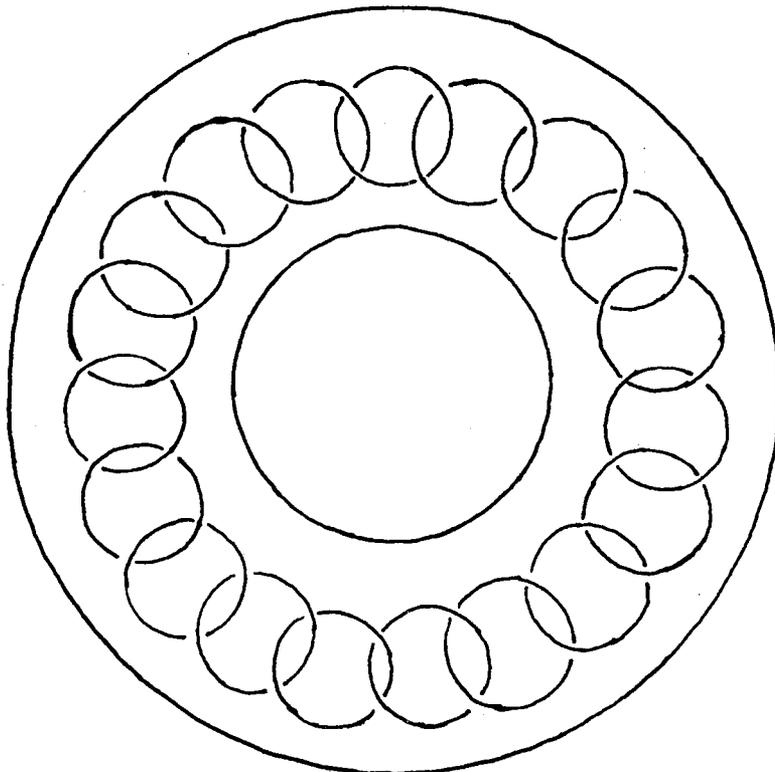
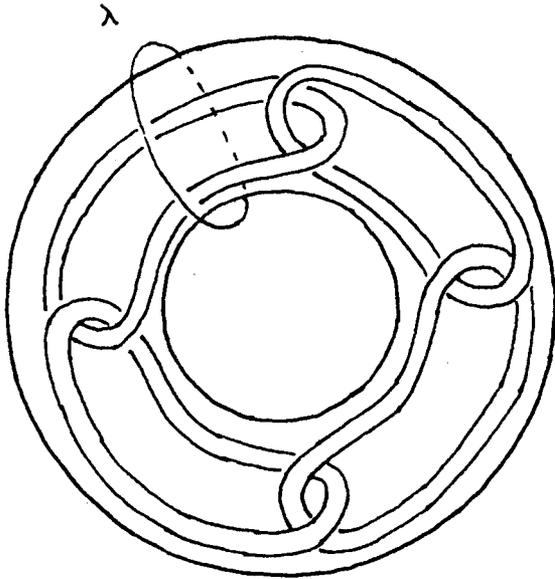
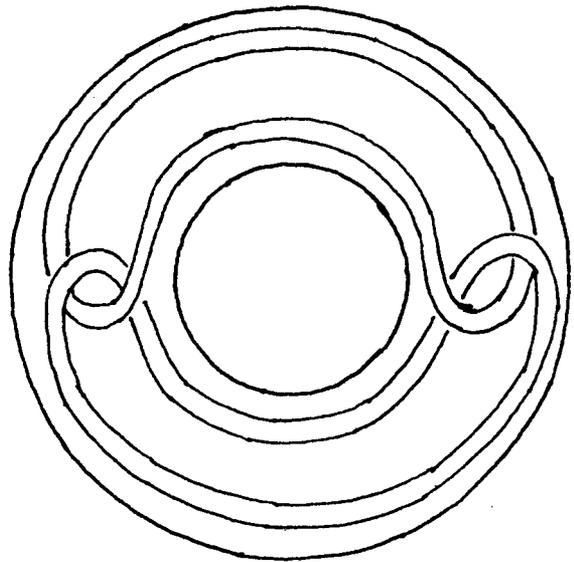


Fig. 1  $k=19$

Fig. 2  $k=4$ Fig. 3  $k=2$ 

La façon dont les tores  $T_i$  sont enlacés n'a pas d'importance. Dans l'exemple  $k=2$ ,  $T_1$  et  $T_2$  ne sont pas enlacés dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut supposer que  $\text{diam } T_i \leq \frac{1}{2} \text{diam } T$ . On pose

$$X_2 = \bigcup_{i=1}^k T_i.$$

Trois maillons consécutifs  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  de la chaîne à  $k(=4)$  tores se présentent sous la forme (Fig. 4 ; tores verts)

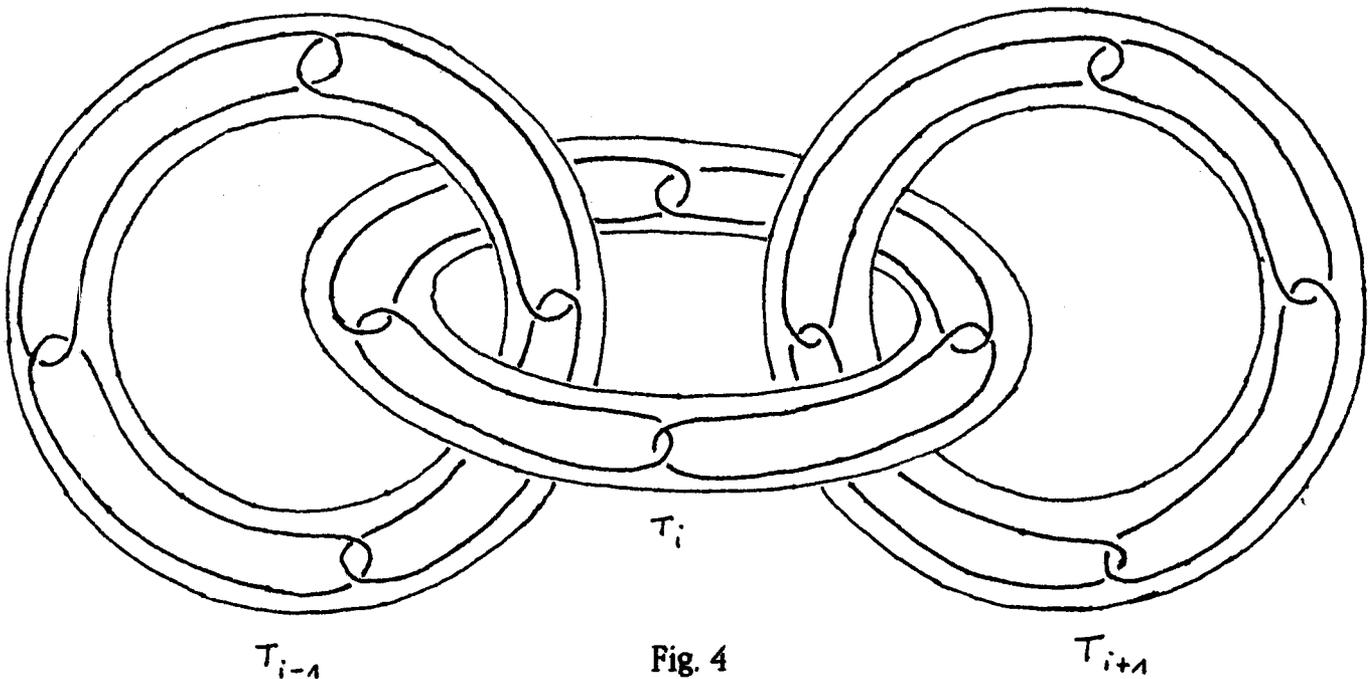


Fig. 4

Soit  $h_i : T \xrightarrow{\cong} T_i$  une similitude de  $T$  sur  $T_i$  (homothétie suivie d'une isométrie). On pose

$$X_3 = \bigcup_{i=1}^k h_i(X_2) = \text{réunion de } k^2 \text{ tores } T_i^3.$$

Par récurrence, si  $X_n$  contient les  $k^n$  tores  $T_i^n$ , on choisit  $k^n$  similitudes  $h_i : T \xrightarrow{\cong} T_i^n$  et l'on pose

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{k^n} h_i(X_n) = \text{réunion de } k^{n+1} \text{ tores.}$$

On peut supposer que  $\text{diam } T_i^n \leq \frac{1}{2^n} \text{diam } T$ .

On obtient par récurrence une suite d'inclusions

$$T = X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \dots$$

et l'on définit le COLLIER d'ANTOINE en prenant l'intersection des  $X_n$  :

$$A = \bigcap_{n \geq 1} X_n.$$

A est un sous-espace de CANTOR de  $\mathbb{R}^3$  :

A est évidemment fermé et compact, et  $A \neq \emptyset$  car  $T$  est compact et les

intersections finies  $\bigcap_{i=1}^n X_i$  ne sont pas vides. Pour les mêmes raisons

$T_i^n \cap A \neq \emptyset$  pour toute composante connexe  $T_i^n$  de  $X_n$ , pour tout  $n$ .

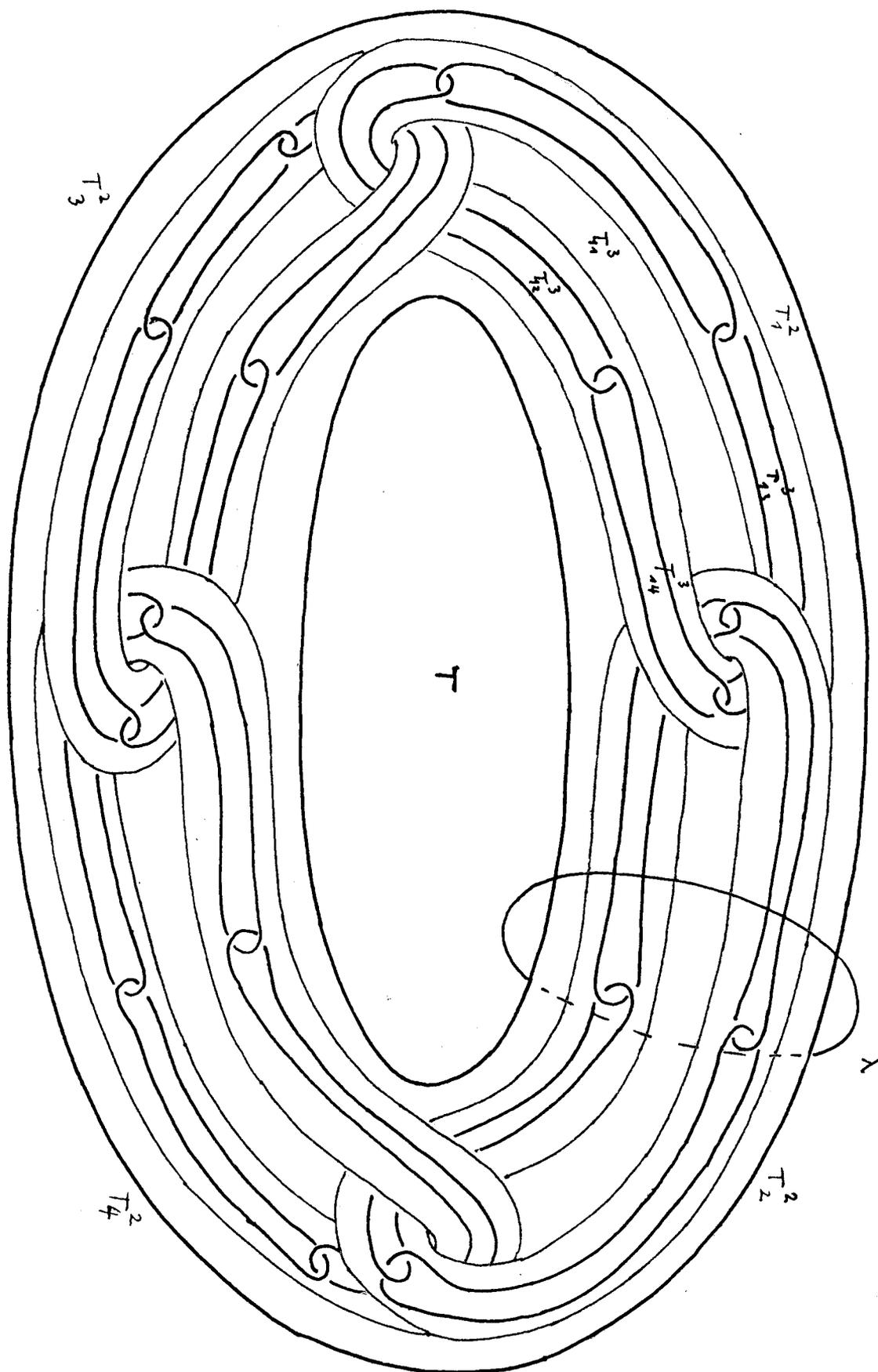


Fig. 5 Construction du Collier d'ANTOINE ( $k=4$ ) 3 générations de tores



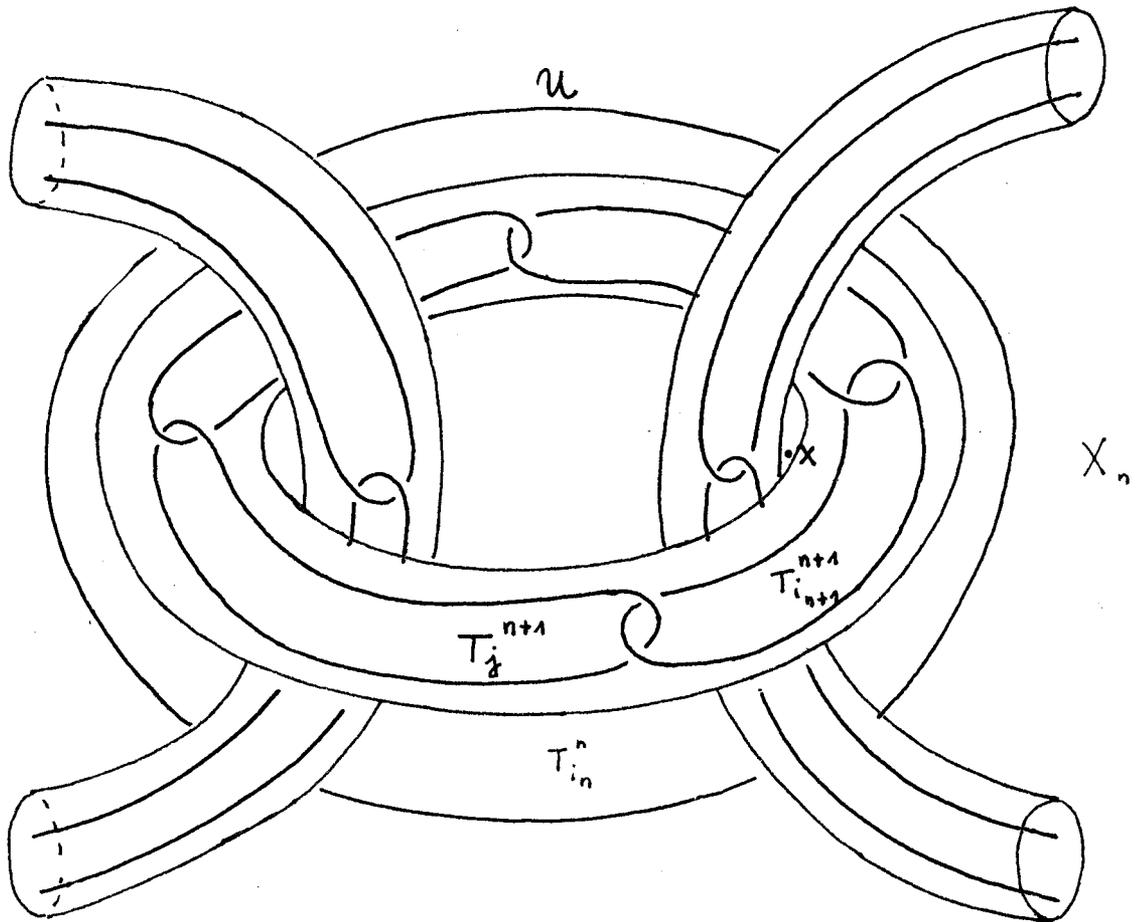


Fig. 6

A n'admet aucun point isolé (Fig. 6) :

Si  $x \in A$ , il existe une suite  $(T_i^n)_{n \geq 1}$  telle que  $x \in T_i^n$  pour tout  $n$ . Soit  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Pour  $n$  assez grand,  $T_i^n \subset U$ , car  $\text{diam } T_i^n \leq \frac{1}{2^n} \text{diam } T$ . Soit  $T_i^{n+1}$  une composante de  $X_{n+1} \cap T_i^n$  qui ne contient pas  $x$ . Alors  $\emptyset \neq T_i^{n+1} \cap A \subset U$ .

A est totalement discontinu :

Pour toute composante connexe  $C$  de  $A$ , il existe une suite  $T \supset T_i^2 \supset T_i^3 \supset \dots \supset T_i^n \supset \dots$  telle que  $C = \bigcap_{n \geq 1} T_i^n$ . Comme  $\text{diam } T_i^n \rightarrow 0$ , les composantes connexes se réduisent à des points.



Le lacet  $\lambda$  (Fig. 2.5) n'est pas contractile dans  $\mathbb{R}^3 - A$  ( $S^3 - A$ ) ;  $\mathbb{R}^3 - A$  n'est pas simplement connexe :

(a) On montre avec les méthodes de la topologie semi-linéaire :

si  $\lambda$  est contractile dans  $\mathbb{R}^3 - X_2$ , alors  $\lambda$  est contractile dans  $\mathbb{R}^3 - X_1$ .

(b) Si  $\lambda$  est contractile dans  $\mathbb{R}^3 - A$ , alors  $\lambda$  est contractile dans  $\mathbb{R}^3 - X_1$  :

en effet, si  $h : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 - A$  est une telle contraction, alors il existe  $n$  tel que

$\text{Im } h \cap X_n = \emptyset$ . Soit  $\tilde{T}_i^n = T_i^{n-1} \cap X_n$ . Si  $h$  est une homotopie entre  $\lambda$  et le lacet

constant dans  $\mathbb{R}^3 - \tilde{T}_i^n$ , il suit de (a) qu'il existe une homotopie entre  $\lambda$  et le

lacet constant dans  $\mathbb{R}^3 - T_i^{n-1}$ . Pour obtenir  $h^1$ , on ne modifie  $h$  que dans un

petit voisinage de  $T_i^{n-1}$  ; on peut ainsi supposer que  $\text{Im } h^1 \cap X_{n-1} = \emptyset$ . Par

réurrence il existe une contraction  $h^{n-1}$  de  $\lambda$  telle que  $\text{Im } h^{n-1} \cap X_1 = \emptyset$ .

(c) Comme  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - X_1) \neq 1$ , (b) entraîne que  $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - A) \neq 1$ .

COROLLAIRE : Soit  $C$  l'ensemble de CANTOR triadique dans  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^3 \cup \infty = S^3$ .

Soit  $h$  un homéomorphisme du COLLIER d'ANTOINE  $A$  sur  $C$ . Alors  $h$  n'admet pas de prolongement à  $\mathbb{R}^3$  ( $S^3$ ).

5. Construction d'une sphère sauvage à l'aide du COLLIER d'ANTOINE contre-exemple à la conjecture de SCHOENFLIES.

(Comparer ALEXANDER [1]).



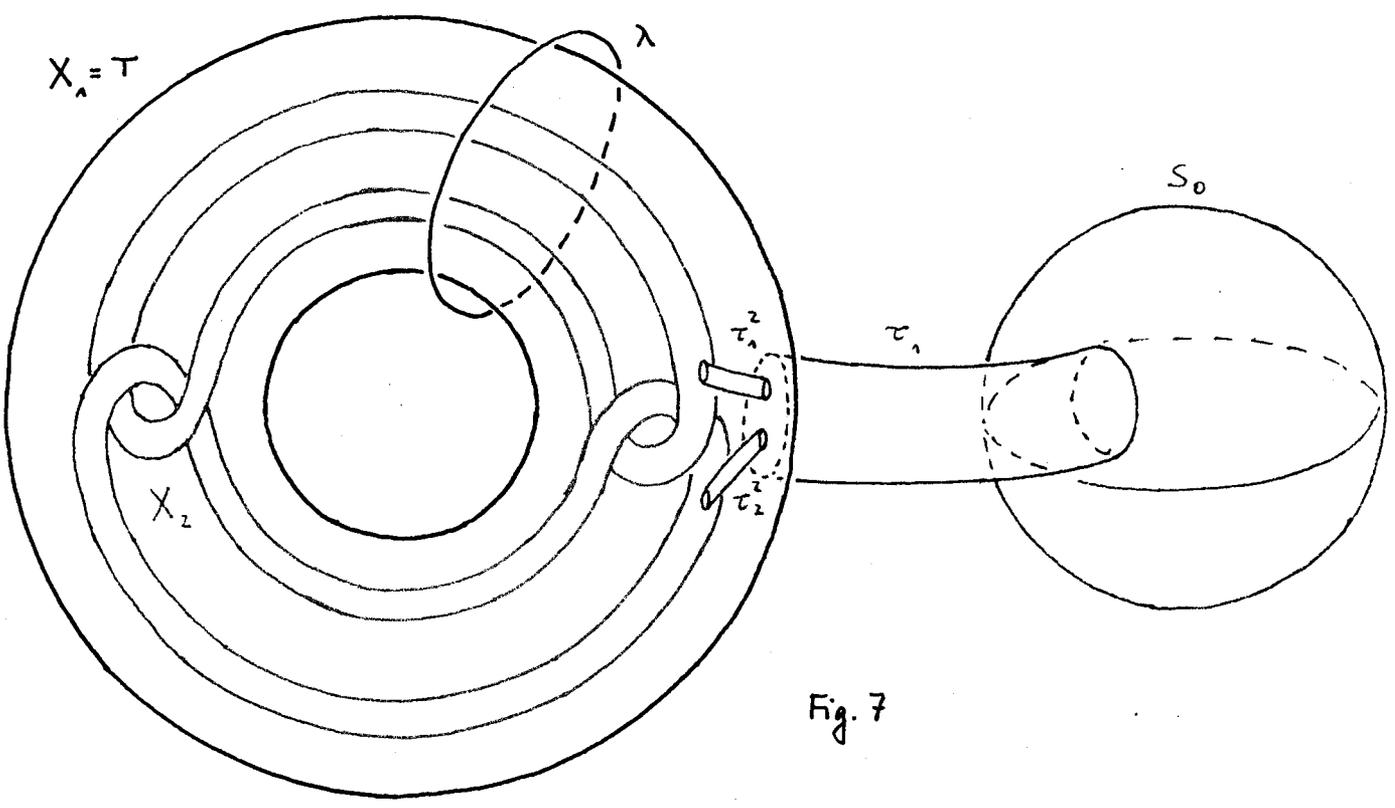


Fig. 7

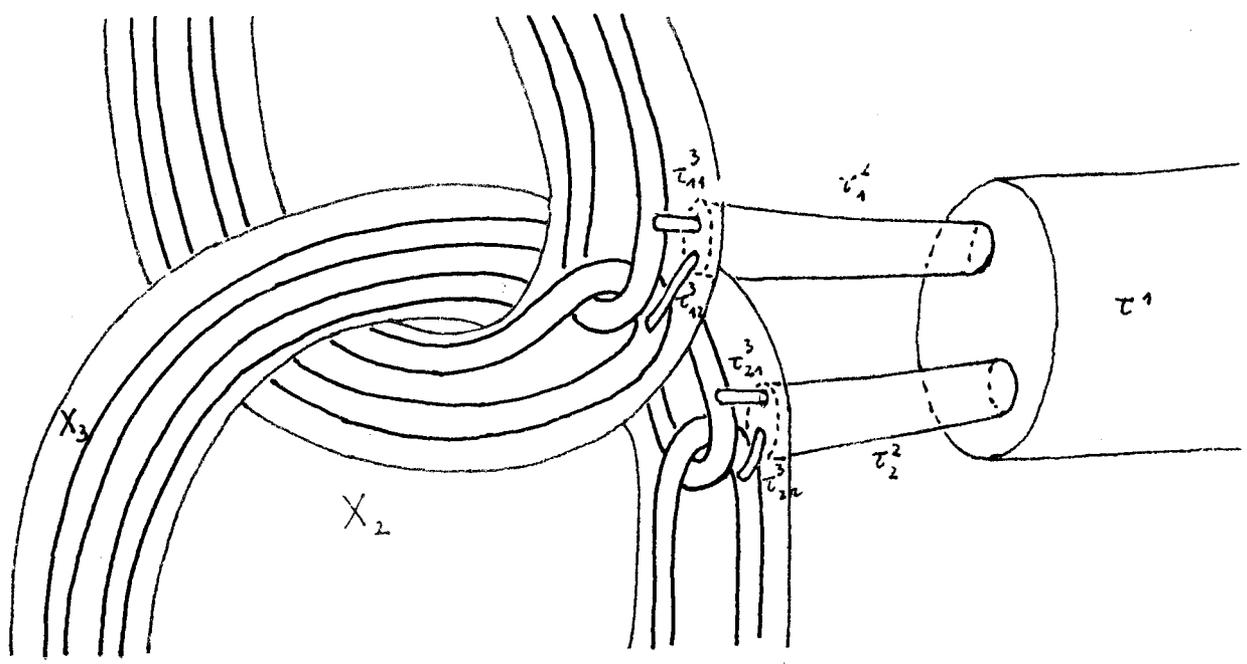


Fig. 8 Agrandissement



On enlève un disque de la sphère  $S_0$ . On le remplace (Fig. 7,8) par le tube  $\tau^1$  auquel on colle le tore  $X_1 = T$ . On obtient  $Y_1 = (S_0 - \text{disque}) \cup \text{tubet}^1 \cup X_1$ .

Similairement  $Y_2 = (S_0 - \text{disque}) \cup \tau^1 \cup (\tau_1^2 \cup \tau_2^2) \cup X_2$

$Y_3 = (S_0 - \text{disque}) \cup \tau^1 \cup (\tau_1^2 \cup \tau_2^2) \cup (\tau_{11}^3 \cup \tau_{12}^3 \cup \tau_{21}^3 \cup \tau_{22}^3) \cup X_3$

etc. On obtient une filtration  $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$ , et l'on pose  $\Sigma = \bigcap_{n \geq 1} Y_n \cong S^2$ .

$\Sigma$  est une sphère sauvage de  $\mathbb{R}^3$  qui contient le COLLIER d'ANTOINE A. La composante non relativement compacte de  $\mathbb{R}^3 - \Sigma$  n'est pas simplement connexe : si  $\lambda$  était un lacet contractile dans  $\mathbb{R}^3 - \Sigma$ , alors  $\lambda$  serait contractile dans  $\mathbb{R}^3 - A$ , ce qui est exclu comme nous l'avons vu. Cette sphère sauvage est un contre-exemple à la conjecture de SCHOENFLIES dans  $\mathbb{R}^3(S^3)$ . Appelons  $\Sigma$  la sphère d'ANTOINE-ALEXANDER.

## 6. Platitude locale d'un plongement.

Le phénomène des sphères sauvages obligeait les topologues à restreindre la classe des plongements pour lesquels on pouvait espérer démontrer la conjecture de SCHOENFLIES. On était ainsi amené à définir les plongements " localement plats " .

Définition : Soient  $V^n, W^m$  des variétés topologiques de dimension  $n$  et  $m > n$ . On suppose  $V$  sans bord. Un plongement  $f : V \rightarrow W$  est localement plat au point  $x \in V$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $f(x)$  dans  $W$  et un homéomorphisme relatif

$$h : (U, U \cap f(V)) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Exemples :

Si  $V, W$  sont des variétés différentiables, si  $f$  est un plongement topologique et une immersion différentiable alors  $f$  est partout localement

plat. De même si  $V, W$  sont des variétés PL et si  $f$  est un plongement PL.

$x$  est un point critique si  $f$  n'est pas localement plat en  $x$ . Le Collier d'ANTOINE  $A$  est l'image de l'ensemble des points critiques de la sphère sauvage  $\Sigma$ .  $\Sigma$  n'est pas localement plat en une infinité de points "singuliers".

### 7. Variantes et Simplifications.

On cherchait à simplifier la sphère sauvage contenant le Collier d'ANTOINE et à obtenir des contre-exemples plus simples à la Conjecture de SCHOENFLIES. Les constructions les plus célèbres sont la SPHERE A CORNES (THE HORNED SPHERE) d'ALEXANDER [2] mais qui ne diminuait pas l'ensemble des points critiques, et les boules et sphères sauvagement noués de R. FOX et E. ARTIN [13] en 1948.

Dans la première représentation de la sphère d'ALEXANDER (fig. 9), où on enlève à un cylindre plein l'intérieur des tubes de plus en plus petits, c'est l'adhérence de la composante relativement compacte du complément de la sphère plongée qui n'est pas une boule  $B^3$  : le lacet  $\lambda$  n'est pas contractile. L'ensemble image des points critiques est un ensemble de CANTOR, la sphère d'Alexander ne constitue donc pas vraiment un progrès par rapport à la sphère d'ANTOINE-ALEXANDER.

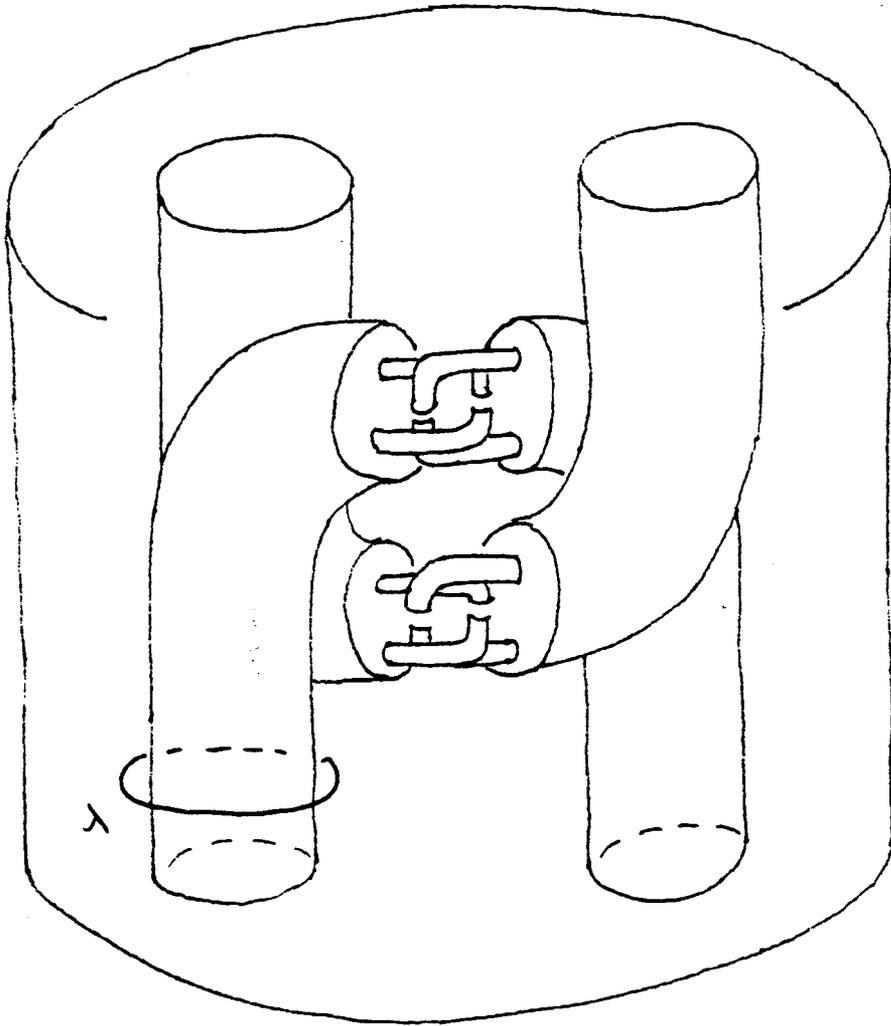


Fig. 9

On peut en donner une image où la composante extérieure n'est pas simplement connexe, mais où la composante intérieure est une boule, et qu'on a envie d'appeler la MEDUSE d'ALEXANDER (FIG. 10)

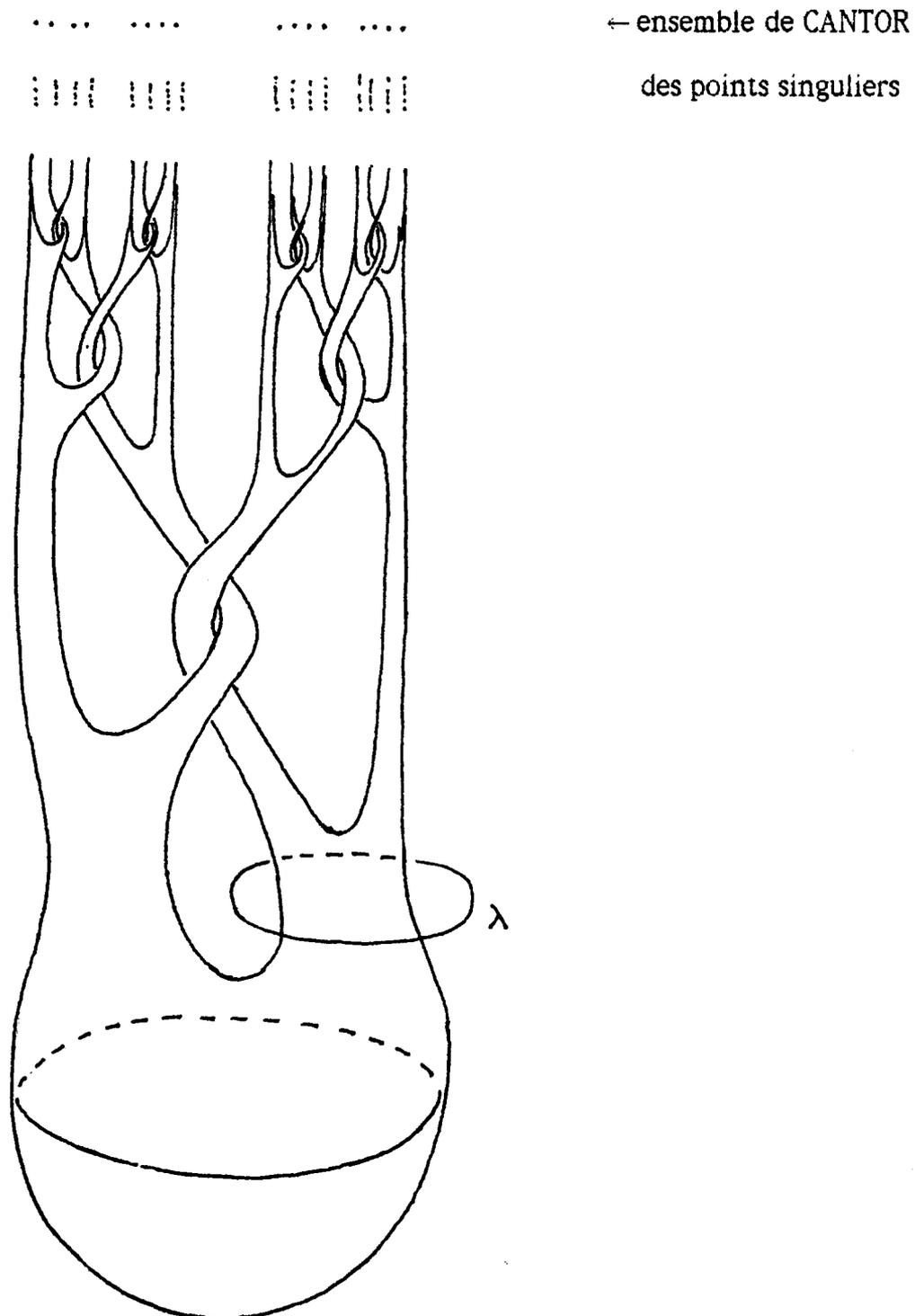


Fig. 10

Le noeud sauvage d'ARTIN-FOX par contre correspond à un plongement  $S^2 \rightarrow S^3$  qui n'a plus que deux points critiques ; il présente un progrès considérable. On suppose donné un tuyau mince qu'on noue une infini de fois de telle manière que les noeuds deviennent de plus en plus petits et convergent vers deux points  $p$  et  $q$ .

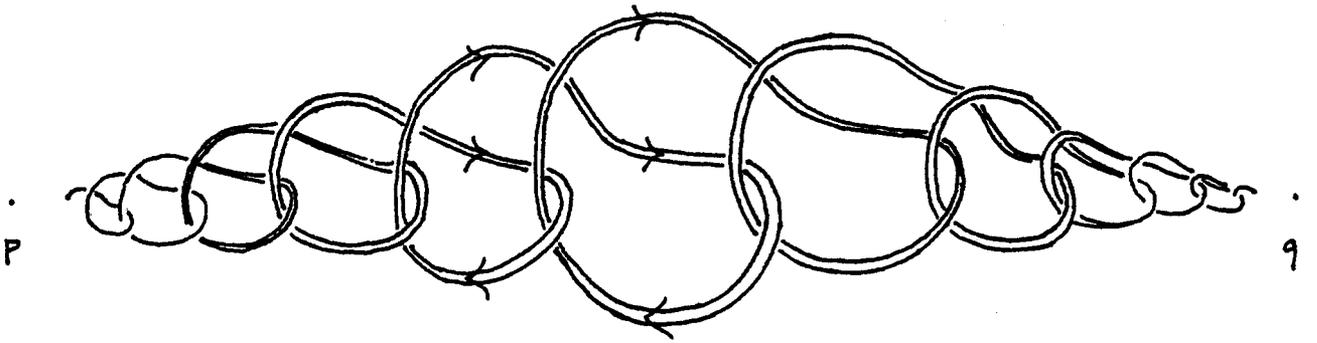


Fig. 10

Alors le complément relativement compact du noeud-tuyau est une boule ouverte, mais l'extérieur n'est pas simplement connexe, donc pas une boule.

On peut facilement donner une description plus détaillée de cette construction. On regarde un ellipsoïde  $\varepsilon = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4y^2 + 4z^2 \leq 4\}$  dont les apogées sont  $p$  et  $q$ . On coupe  $\varepsilon$  avec les plans  $x = \pm(2 - 2^{1-m})$  pour  $m=0,1,2,\dots$ . On obtient des tranches  $D_n$ .



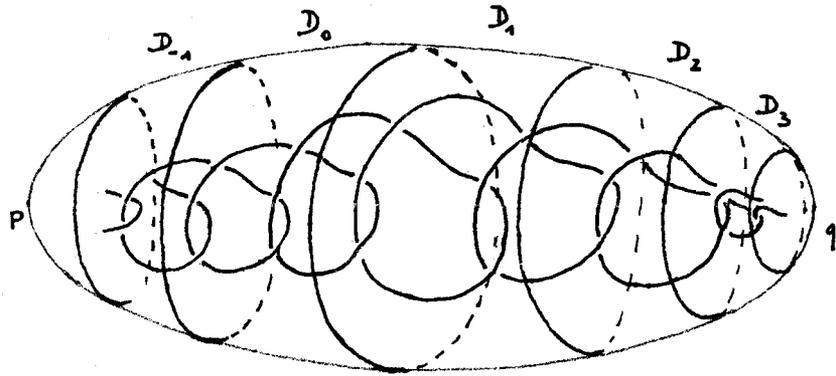


Fig. 11

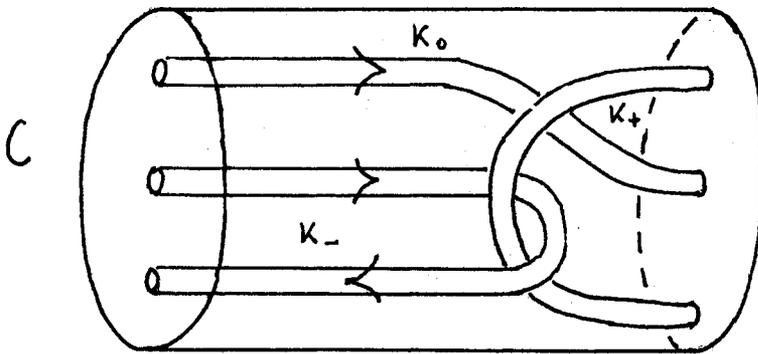


Fig. 12

On applique le cylindre  $C$  par des homéomorphismes  $f_n : C \xrightarrow{\sim} D_n$  sur les tranches  $D_n$  de l'ellipsoïde  $\varepsilon$ . Nous appelons  $X$  l'adhérence de l'intérieur du noeud-tuyau.  $f_n$  applique les cylindres minces  $K_0, K_+, K_-$  de  $C$  dans  $X$ .

$$X = p \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f_n(K_- \cup K_0 \cup K_+) \cup q \quad \cong B^3.$$

Il n'est pas difficile de calculer le groupe fondamental  $\Pi_1(S^3 - X)$ .

$$\text{Soit } T_m = S^3 - \left( X \cup \bigcup_{|n|, m, n} D_n \right).$$



Alors  $\Pi_1(S^3 - X) = \lim_{\rightarrow} \Pi_1(T_m)$ .

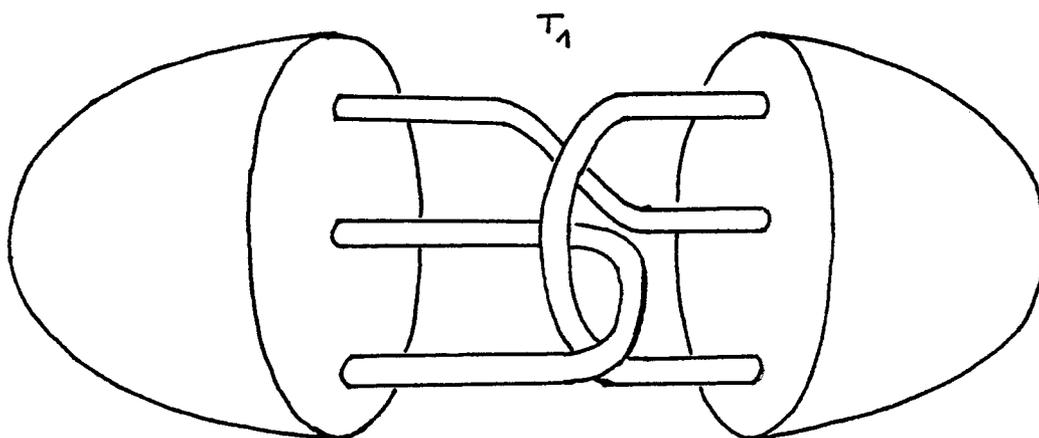


Fig. 13

On obtient que  $\Pi_1(T_m)$  est engendré par  $\{a_n, b_n, c_n : -m \leq n < m\}$  avec les relations

$$\left. \begin{array}{l} b_{-m}^{-1} a_{-m}^{-1} c_{-m}^{-1} = 1 \\ c_{m-1}^{-1} a_{m-1}^{-1} b_{m-1}^{-1} = 1 \\ a_{n+1} = c_{n+1}^{-1} c_n c_{n+1} \\ b_n = c_{n+1}^{-1} a_n c_{n+1} \\ c_{n+1} = b_n^{-1} b_{n+1} b_n \end{array} \right\} -m \leq n < m-1$$

En passant à la limite inductive, on obtient

$$\Pi_1(S^3 - X) = \lim_{\rightarrow} \Pi_1(T_m) = \langle c_n : n \in \mathbb{Z}; c_{n-1} c_n c_{n+1} = c_n c_{n+1} c_{n-1} c_n \rangle$$

Ce groupe est non-trivial, car il admet une représentation non-triviale dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_5$  :

$$h : \Pi_1(S^3 - X) \rightarrow \mathfrak{S}_5 \quad \text{est défini par}$$

$$h(c_n) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} & \text{pour } n \text{ impair} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

L'exemple de ARTIN-FOX constitue un progrès par rapport à la

sphère d'ANTOINE-ALEXANDER : la description géométrique est plus facile, on a une bonne prise sur le groupe fondamental du complément. Mais on voit surtout que le nombre des points critiques n'est plus infini mais réduit à deux. La platitude locale en tout point du plongement  $f : S^2 \rightarrow S^3$  devenait ainsi une condition nécessaire pour la conjecture de SCHOENFLIES.

8. Il fallait attendre 1960 pour obtenir la démonstration complète de la conjecture de SCHOENFLIES par Morton BROWN [9].

Théorème de M. BROWN : Soit  $f : S^{n-1} \rightarrow S^n$  ( $n > 1$ ) un plongement localement plat. Alors il existe un homéomorphisme  $h : S^n \rightarrow S^n$  tel que  $h(f(S^{n-1})) = S^{n-1} =$  équateur de  $S^n$ .

Pour le problème généralisé de deux sphères localement plates de dimension  $S^{n-1}$  dans  $S^n$ , la Conjecture Annulaire avait été formulée :

Soient  $f, g : S^{n-1} \rightarrow S^n$  deux plongements localement plats, disjoints. Alors la région fermée  $A$  dont le bord est  $f(S^{n-1}) \cup g(S^{n-1})$  est homéomorphe à  $S^{n-1} \times [0,1]$ .

La démonstration pour  $n \neq 4$  est due à R.C. KIRBY (1969) [17], pour  $n=4$  à F. QUINN [21].

La démonstration de la Conjecture Annulaire à son tour est une étape essentielle de la construction du célèbre contre-exemple à la HAUPTVERMUTUNG de R.C. KIRBY et L.C. SIEBENMANN [18], [19] qui montre l'existence de plusieurs structures PL sur une même variété topologique. Indirectement, par la reconnaissance des " bons " plongements, les idées d'ANTOINE continuent donc à être présents dans des résultats qui comptent parmi les plus fondamentaux des vingt dernières années concernant les variétés.

### 9. Involutions de $S^3$ . Travaux de R.H. BING.

Plus directement, les idées géométriques de L. ANTOINE furent reprises et développées par R.H. BING [6] en 1952 pour fournir des contre-exemples à deux conjectures célèbres de la théorie des groupes de transformation :

#### 1) Le 5<sup>ème</sup> problème de HILBERT pour les groupes de transformation :

Si  $G$  est un groupe compact, localement euclidien, qui opère continûment sur une variété topologique, cette action est-elle différentiable par rapport à des structures différentiables bien choisies ? A. GLEASON, D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN avaient démontré cette conjecture pour des opérations transitives.

#### 2) La conjecture de BROUWER sur l'équivalence topologique des homéomorphismes de $S^n$ à des transformations orthogonales.

Soit  $\mathcal{H}(S^n)$  le groupe des homéomorphismes de  $S^n$  ( $n \geq 1$ ),  $H \in \mathcal{H}(S^n)$ .

Conjecture : il existe  $K \in \mathcal{H}(S^n)$  tel que  $KHK^{-1} \in O(n)$  si et seulement si  $\overline{(H^k : k \in \mathbb{Z})}$  est compact dans  $\mathcal{H}(S^n)$ .

Pour  $n=2$ , la conjecture a été démontrée pour  $(H^k)$  fini par L.E.J. BROUWER en 1919, par KEREKJARTO en général (1923) [16].

Pour  $n=3$ , le contre-exemple de BING est basé sur les idées d'ANTOINE.

THEOREME de BING : Il existe une décomposition  $S^3 = U_1 \amalg \Sigma \amalg U_2$  telle que  $\Sigma$  est une sphère sauvage et  $U_i$  non-simplement connexe, et il existe un homéomorphisme  $t : S^3 \rightarrow S^3$  tel que  $t^2 = \text{id}$ ,  $t|\Sigma = \text{id}$ ,  $t(U_i) = U_2$ .



COROLLAIRE 1 :  $T$  n'est pas différentiable, car l'ensemble des points fixes de  $t$  n'est pas une sous-variété.

COROLLAIRE 2 : La conjecture de BROUWER est fausse pour  $n=3$  :

Si  $KHK^{-1} = A \in O(n)$ , l'ensemble des points fixes de  $A$  forme une sous-variété (localement plate) de  $S^n$ , donc l'ensemble des points fixes de  $H = K^{-1}AK$  serait la sous-variété (localement plate)  $K^{-1}(\text{Fix } A)$  de  $S^n$ , mais, si l'on prend  $H=t$ , l'ensemble des points fixes de  $H$  est la sphère sauvage  $\Sigma$  du Théorème de BING.

La première étape dans la démonstration du Théorème de BING est une construction inspirée par le COLLIER d'ANTOINE pour  $k=2$  : on construit une famille filtrante  $T = Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$ , où  $Y_n = \bigcup_{i=1}^n T_i^n$ , mais en respectant la symétrie des tores par rapport à un plan  $P$  (Fig. 14).

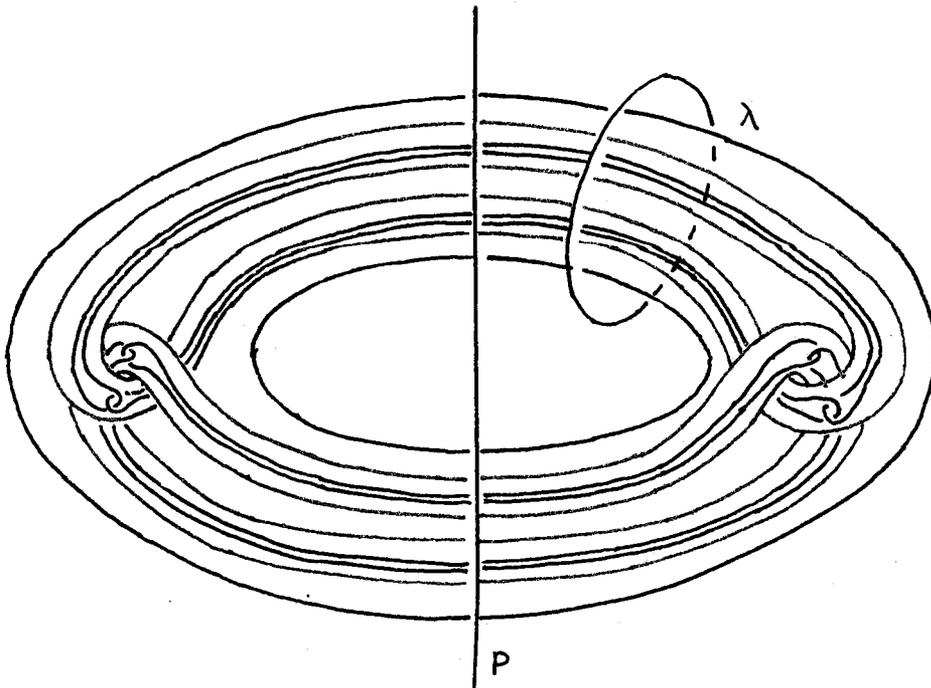


Fig. 14



$P$  coupe chaque tore  $T_i^n$  dans les parties médianes. On ne suppose plus que  $\text{diam } T_i^n \rightarrow 0$ , mais seulement que  $\text{diam}(T_i^n \cap P) \rightarrow 0$  pour  $n \rightarrow +\infty$ . On

pose  $Y = \bigcap_{n \geq 1} Y_n$ .  $\mathbb{R}^3 - Y$  n'est pas simplement connexe car  $\lambda$  n'est pas

contractile dans  $\mathbb{R}^3 - Y$ .  $(\mathbb{R}^3 - Y) \cap P$  divise  $\mathbb{R}^3 - Y$  en trois parties :

$\mathbb{R}^3 - Y = V_1 \amalg (\mathbb{R}^3 - Y) \cap P \amalg V_2$ , et  $V_i$  n'est pas simplement connexe. Chaque

composante connexe

$$C = \left\{ \bigcap_{n \geq 1} T_{i_n}^n : T \supset T_{i_2}^2 \supset T_{i_3}^3 \supset \dots \right\}$$

est un arc de courbe, homéomorphe à  $I$ .  $C \cap P$  se réduit à un point.  $Y$  est homéomorphe au produit de  $I$  avec un ensemble de CANTOR.

Dans la 2<sup>ème</sup> étape on construit une application continue  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle que  $f|_{\mathbb{R}^3 - T} = \text{id}$ ,  $f|_{\mathbb{R}^3 - Y}$  injective, et telle que l'image  $f(C)$  de chaque composante connexe  $C$  de  $Y$  se réduit à un point.

Lemme : Soit  $P_1, \dots, P_m$  une suite de plans parallèles à  $P$  coupant les parties médianes de  $T$ . Il existe un homéomorphisme  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $h|_{\mathbb{R}^3 - T} = \text{id}$  et tel que  $h(T_i^{m-1})$  ne coupe qu'un seul des plans  $P_j$ . ( $1 \leq i \leq 2^{m-1}$  ;  $1 \leq j \leq m$ ).

Regardons le Lemme explicitement. Pour  $m=3$  : il existe d'abord un homéomorphisme  $h_1 : T \rightarrow T$  tel que  $h_1|_{\partial T} = \text{id}$  et tel que  $h_1(T_1^1) \cap P_3 = \emptyset$  et  $h_1(T_2^1) \cap P_1 = \emptyset$ .

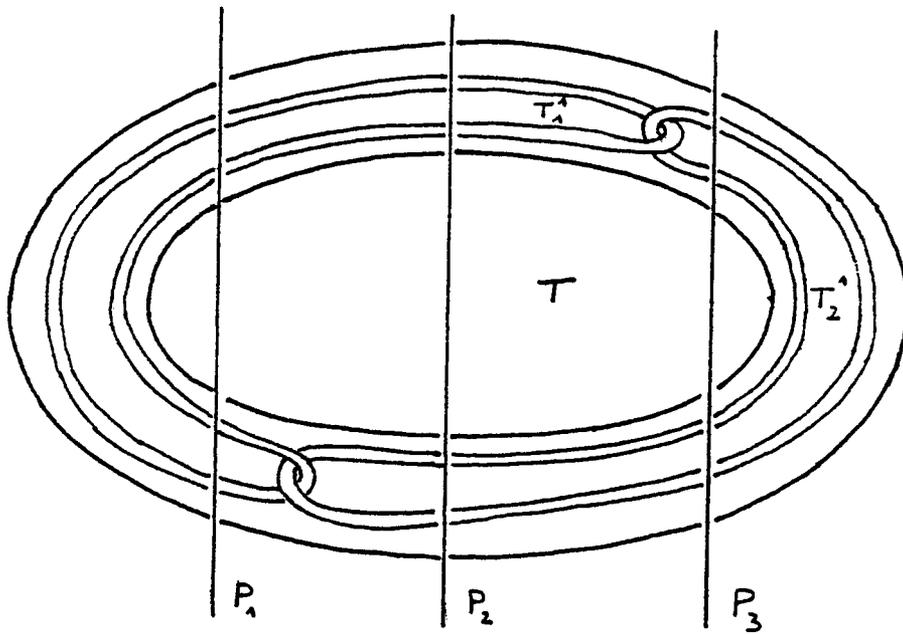


Fig. 15

Les images de  $T_i^1$  sous  $h_1$

Ensuite il existe un homéomorphisme  $h_2 : T \rightarrow T$  tel que  $f|_{(T_1^1 \cup T_2^1)} = \text{id}$

et tel que

$$h_2(T_{11}^2) \cap P_2 = h_2(T_{11}^2) \cap P_3 = \emptyset, \quad h_2(T_{12}^2) \cap P_1 = h_2(T_{13}^2) \cap P_3 = \emptyset$$

$$h_2(T_{21}^2) \cap P_1 = h_2(T_{21}^2) \cap P_3 = \emptyset, \quad h_2(T_{22}^2) \cap P_1 = h_2(T_{22}^2) \cap P_2 = \emptyset.$$

On pose ensuite  $h = h_2 \circ h_1$ .

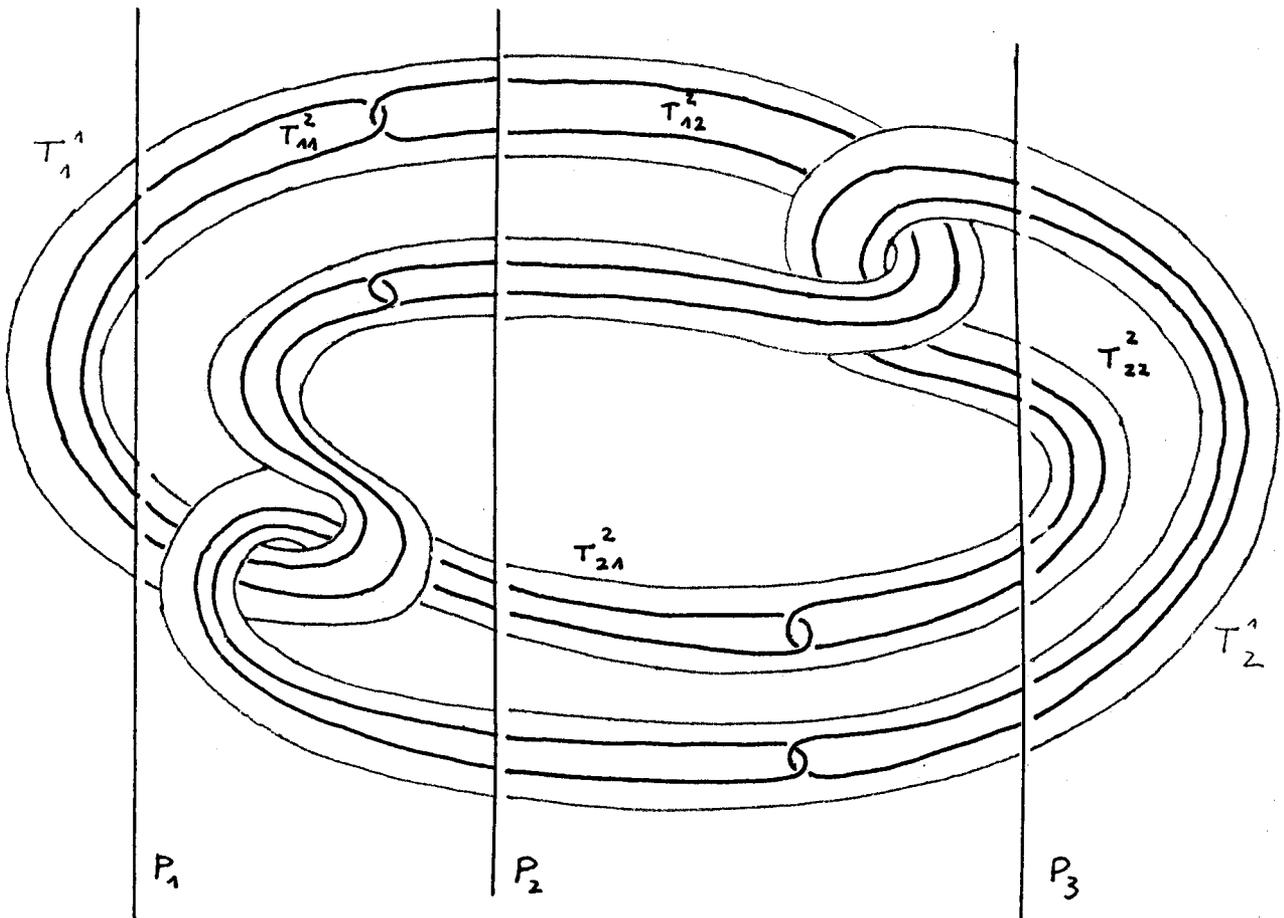


Fig. 16

Les images des  $T_j^i$  sous  $h$

Proposition : Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n, m \in \mathbf{N}$  et un homéomorphisme  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que le  $\text{diam } h(T_i^{n+m-1}) < \varepsilon$ .

Démonstration : Il suffit d'appliquer le Lemme à  $T_i^n$  pour  $n$  grand et un nombre suffisant de plans  $P_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ). (Fig. 16 pour  $n=2, m=3$ ).

Proposition : Il existe une suite d'entiers  $n_0=0, n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  et une suite d'homéomorphismes  $h_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tels que  $h_0 = \text{id}$ ,



$h_k|(\mathbb{R}^3 - Y_{n_{k-1}}) = h_{k-1}|(\mathbb{R}^3 - Y_{n_{k-1}})$  et tels que  $\text{diam } h_k(T_i^{n_k}) < \frac{1}{k}$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Démonstration : Si, par l'hypothèse de récurrence, les homéomorphismes  $h_0, \dots, h_{k-1}$  sont construits, il suit du Lemme qu'il existe un homéomorphisme  $g_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tel que  $g_k|_{\mathbb{R}^3 - Y_{n_{k-1}}} = \text{id}$ , et que  $\text{diam } g_k(T_i^{n_k}) < \delta_{k-1}$  = module de continuité de  $h_{k-1}$  : celui assure que  $d(x, y) < \delta_{k-1}$  entraîne que  $d(h_{k-1}(x), h_{k-1}(y)) < \frac{1}{k}$ . On pose alors  $h_k = h_{k-1} \circ g_k$ .







COROLLAIRE :

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} h_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est l'application continue cherchée avec les propriétés suivantes :

$f|_{\mathbb{R}^3 - Y_{n_k}} = h_k|_{\mathbb{R}^3 - Y_{n_k}} = h_{k+1}|_{\mathbb{R}^3 - Y_{n_k}} = \dots$  pour tout  $k$  ; et si  $n \geq n_k$ , alors le  
 $\text{diam } f(T_i^n) \leq \text{diam } f(T_i^{n_k}) = \text{diam } h_k(T_i^{n_k}) < \frac{1}{k} \rightarrow 0 \ (k \rightarrow +\infty)$ .

De plus  $f(Y) \subset f(P)$ .

La troisième étape permet alors la construction de l'involution  $t$  :

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Si  $s : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est la symétrie par rapport au plan  $P$ , on pose

$$t(x) = \begin{cases} f \circ s \circ f^{-1}(x) & \text{si } x \in f(\mathbb{R}^3 - Y) \\ x & \text{si } x \in f(Y) \end{cases}$$

Par construction  $t|_f(P)$  est l'identité ; et  $f(P) \cup \infty$  est homéomorphe à  $S^2$   
 donc une sphère sauvage dans  $S^3$ .

10. L'essentiel de la méthode de BING peut se résumer de la manière suivante : soit  $R$  la relation d'équivalence dans  $S^3$  qui identifie chaque arc  $C$  de  $Y \approx I \times \text{CANTOR}$  en un point. La projection  $\Pi : S^3 \rightarrow S^3/R$  admet alors des approximations par des homéomorphismes  $g : S^3 \rightarrow S^3/R$  arbitrairement proches.

Ceci constitue un cas particulier du célèbre critère de rétrécissement, formulé par R.D. EDWARDS [11] de la manière suivante :

BING SHRINKING CRITERION :

Soit  $\Pi : X \rightarrow Y$  une application continue surjective d'espaces compacts métriques. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout  $\delta > 0$  il existe un homéomorphisme  $g : X \rightarrow Y$  qui est



$\delta$ -proche à  $\Pi$  ( $d(g(x), \Pi(x)) < \delta$  pour tout  $x \in X$ ).

(2) BSC : Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un homéomorphisme  $h : X \rightarrow X$  tel que

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & X \\
 \Pi \searrow & & \nearrow \Pi \\
 & Y & 
 \end{array}$$

est  $\varepsilon$ -commutatif :

(a)  $d(h\Pi, \Pi) < \varepsilon$

(b)  $\text{diam } h \Pi^{-1}(y) < \varepsilon$  pour tout  $y \in Y$ .

En d'autres termes, pour que  $\Pi$  soit approximable par des homéomorphismes, il faut et il suffit que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des " $\varepsilon$ -rétrécissements"  $h$  pour  $\Pi$ .

11. La première application de ce Critère de rétrécissement concernait la solution du Problème de la Double Suspension d'une sphère homologique posé par J. MILNOR en 1961 parmi les cinq plus importants problèmes de la topologie.

#### Théorème de la Double Suspension (J. CANNON, R. EDWARDS [12])

Soit  $V^n$  une variété topologique compacte de dimension  $n$  qui est une sphère d'homologie (i.e. qui a la même homologie entière que la sphère de la même dimension). Alors la double suspension de  $V^n$  est homéomorphe à  $S^{n+2}$ .

12. Le BING SHRINKING CRITERION joue un rôle important dans la démonstration de la Conjecture de POINCARÉ en dimension 4 par Michael FREEDMAN [14] qui donne en même temps la classification des variétés simplement connexes en dimension 4.

Le chapitre VII de ce travail célèbre récompensé par une Médaille

FIELDS s'intitule " A short course in BING topology (from the teachings of Robert EDWARDS) ".

FREEDMAN explique dans son introduction que son chapitre VIII " expounds an explicit shrinking argument provided by Robert EDWARDS and serves as my final take home in BING topology ! My thanks to my teacher ! "

Il aurait pu ajouter : " Merci aussi à Louis ANTOINE, l'inspirateur de BING ".

13. On rencontre parfois l'avis que L. ANTOINE n'a pas vraiment et rigoureusement démontré les énoncés contenus dans sa thèse.

EDWIN E. MOISE, l'auteur du théorème sur la triangulation des variétés en dimension 3, y fait allusion dans son beau livre " Geometric topology in dimensions 2 and 3 " [20] à la page 256 : " In otherwise well informed circles one often encounters the notion that ANTOINE did not really prove that his examples work " .

Serait-ce un symptôme tardif d'une sorte de VERDRÄNGUNG de la part d'une opinion publique désireuse d'oublier les révisions, peut-être douloureuses pour certains, auxquelles les travaux d'ANTOINE les avaient obligés ? Mais MOISE ajoute aussitôt : " A pleasant way to learn the contrary is to read [5] with the careful attention that its brilliancy deserves " .

## REFERENCES

- [1] J.W. ALEXANDER, Remarks on a Point set constructed by ANTOINE, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol. 10 (1924), 10-12.
- [2] J.W. ALEXANDER, An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., vol. 10 (1924) 8-10.
- [3] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, TOPOLOGIE, Springer-Verlag Berlin 1935.
- [4] L. ANTOINE, Sur la possibilité d'étendre l'homéomorphie de deux figures à leurs voisinages, C.R. Acad. Sci. Paris t. 171 (1920), 661-633.
- [5] L. ANTOINE, Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. J. Math. Pures Appl., vol. 86 (1921), 221-325.
- [6] R.H. BING, A homéomorphism between the 3-sphere and the Sum of two solid horned spheres. Ann. of Math. vol. 56 (1952), 354-362.
- [7] L.E.J. BROUWER, Beweis des JORDANSCHEN Satzes für den n-dimensionalen Raum, Math. Ann. Bd. 71 (1912),314.
- [8] L.E.J. BROUWER, Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche, Math. Ann., vol. 80 (1919) 39-41.

- [9] M. BROWN, A proof of the generalized SCHOENFLIES theorem.  
Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 74-76.
- [10] A. DENJOY, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 149 (1909), 1048 ; et  
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 151 (1910), 138.
- [11] R.D. EDWARDS, The topology of manifolds and cell-like maps.  
Proceed. ICM, Helsinki (1978) vol. 1, 111-127.
- [12] R.D. EDWARDS, Approximating certain cell-like maps by  
homeomorphisms.  
Voir F. LATOUR Sem. BOURBAKI 30<sup>e</sup> année 1977/78 n° 515.
- [13] R.H. FOX and E. ARTIN, Some wild cells and spheres in three  
dimensional space. Ann. of Math. vol. 42 (1948), 979-990.
- [14] M.H. FREEDMAN, The topology of Four-dimensional Manifolds. J.  
Differential Geom. 17 (1982), 357-453.
- [15] G. JULIA, Notice nécrologique sur L. ANTOINE, C.R. Acad. Sci. Paris, t.  
272 (8 mars 1971), Vie Académique 71-74.
- [16] B. de KERÉKJARTO, Sur la structure des transformations topologiques  
des surfaces en elles-même. L'Ens. Math. 35 (1952), 297-316.

- [17] R.C. KIRBY, Stable homéomorphismes and the annulus conjecture. *Ann. of Math.* 89 (1969), 575-582.
- [18] R.C. KIRBY and L.C. SIEBENMANN, On the triangulation of manifolds and the HAUPTVERMUTUNG, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 742-749.
- [19] R.C. KIRBY and L.C. SIEBENMANN : Foundational Essays on topological manifolds, smoothings and triangulations. *Ann. of. Math. Studies*, Princeton U. Press n) 88 (1977).
- [20] E.E. MOISE, Geometric Topology in dimensions 2 and 3, Graduate texts in Mathematics. Springer Verlag N.Y. 1977.
- [21] F. QUINN, Ends of maps. III : Dimension 4 and 5. *J. Differential Geom.* 17 (1982), 503-521.
- [22] A. SCHOENFLIES, Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. *Jber. Dtsch. Math. Ver. Leipzig* 1908.
- [23] J.H.C. WHITEHEAD, A certain open manifold whose group is unity. *Quart. Jour. Math.* 2 (6) (1935), 268-279.