PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MARC PEIGNE

Marche de Markov sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule 1
« Probabilités », , p. 91-114
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988___1_91_0>

MARCHE DE MARKOV SUR LE SEMI-GROUPE DES CONTRACTIONS DE $\mathbb{R}^d$

Marc PEIGNE
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Summary

Let E be a locally compact space with countable basis, $(X_n)_{n\geq 0}$ a positive Harris chain on E, $(X_n^*)_{n\geq 0}$ its reverse chain, and f an application from E to the space S of contractions of $\mathbb{R}^d$. We prove, under reasonnable conditions, that on a closed sub-set of $\mathbb{R}^d$, the sequence of contractions $(f(X_0)\circ \dots \circ f(X_n))_{n\geq 0}$ converge almost surely to a constant. We deduce that the semi-markovian chain $((f(X_{n-1}^*)\circ\dots\circ f(X_0^*)\, a)_{n\geq 0}$, $a\in\mathbb{R}^d$, is Harris recurrent on the open sets of $\mathbb{R}^d$.

Résumé

Soit E un espace localement compact à base dénombrable, $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur E récurrente positive au sens de Harris, $(X_n^*)_{n\geq 0}$ sa chaîne duale et f une application de E dans l'espace S des contractions de $\mathbb{R}^d$. Nous montrons, sous des hypothèses raisonnables, que sur un certain sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$, la suite de contractions $(f(X_0)\circ \dots \circ f(X_n))_{n\geq 0}$ converge presque sûrement vers une fonction constante. Nous en déduisons que la chaîne semi-markovienne $((f(X_{n-1}^*)\circ\dots\circ f(X_0^*)\, a)_{n\geq 0}$, $a\in\mathbb{R}^d$, est récurrente au sens de Harris sur les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Code A.M.S 60 J 10

I. NOTATIONS ET HYPOTHESES

1. Introduction et notations

* On munit $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ de la norme euclidienne $\| . \|$ et l'on note $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

* On considère les espaces

$$B = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \ : \ \|f\|_B < +\infty \}$$

avec $\displaystyle \|f\|_B = \operatorname{Sup}_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{\|f(x)\|}{1+\|x\|^2} \right)$

$$L = \{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \ : \ \|f\|_L = \|f\|_B + m(f) < +\infty \}$$

$(B, \| . \|_B)$ et $(L, \| . \|_L)$ sont des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.

* S désigne le semi-groupe (pour la composition des applications) des contractions de $\mathbb{R}^d$, i.e des applications lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, dont le coefficient de lipschitz est inférieur ou égal à 1.
On a $S \subset L$ et l'on désigne par $\mathscr{B}(S)$ la tribu des boréliens de S pour la topologie induite par celle de $(L, \| . \|_L)$.

* Soit Q un noyau markovien défini sur un espace localement compact à base dénombrable X ; $(X^{\otimes \mathbb{N}}, \mathscr{B}(X)^{\otimes \mathbb{N}}, (X_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in X})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q. On suppose que $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris ; on note π l'unique mesure de probabilité Q-invariante sur X, Q^* l'opérateur dual de Q vis à vis de π et $(X^{\otimes \mathbb{N}}, \mathscr{B}(X)^{\otimes \mathbb{N}}, (X_n^*)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in X})$ la chaîne de Markov canonique associée à Q^*.

* Soit f une application mesurable de $(X, \mathscr{B}(X))$ dans $(S, \mathscr{B}(S))$.

Dans un premier temps, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la suite aléatoire de contractions $M_n(\omega) = f(X_0(\omega)) \circ f(X_1(\omega)) \circ \ldots\ldots \circ f(X_n(\omega))$. Les images de ces contractions forment une suite décroissante (au sens de l'inclusion) et donc, pour presque tout ω, on peut espérer que la suite de fonctions $(M_n(\omega))_{n\geq 0}$ converge, sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, vers une fonction constante.
Lorsque la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ forme une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (v.a.i.i.d) on est ramené à l'étude d'une marche aléatoire sur S, et à son action sur $\mathbb{R}^d$ (cf [3]).
Dans le cadre plus général où nous nous plaçons, il nous faut introduire la chaîne semi-markovienne sur X x S, définie par son noyau R :

$$R\,\varphi(x,s) = \int \varphi(y, s \circ f(y))\, Q(x,dy)$$

pour toute fonction φ borélienne bornée de $X \times S$ dans $\mathbb{R}$.

Par contre, les images des contractions $f(X_n^*(\omega)) \circ f(X_{n-1}^*(\omega)) \circ \ldots\ldots \circ f(X_0^*(\omega))$ ne forment pas une suite décroissante, contrairement à celles de $(M_n(\omega))_{n\geq 0}$ et c'est pourquoi nous nous intéressons plutôt au comportement ératique dans $\mathbb{R}^d$, de la suite aléatoire $(f(X_n^*(\omega)) \circ f(X_{n-1}^*(\omega)) \circ \ldots\ldots \circ f(X_0^*(\omega))\, a)_{n\geq 0}$, pour $a \in \mathbb{R}^d$.

2. Hypothèses

Introduisons les hypothèses suivantes :

H1.Il existe $c \in]0;1[$ et ν une mesure de probabilité sur $X \times S$ tels que

$$\forall x \in X \quad U_c((x,I),.) \geq \delta(x)\, \nu(.) \quad (*)$$

où U_c désigne le noyau $\sum_{n=1}^{+\infty} (1-c)^{n-1} R^n$, I la fonction identité sur $\mathbb{R}^d$, et δ une fonction borélienne de X dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\pi(\delta) > 0$ et $\delta(x) > 0$ $\bar{\nu}(dx)$-ps, $\bar{\nu}$ étant la marginale de ν sur X.

Notons ν' la marginale de ν sur S, et $T_{\nu'}$ le semi-groupe engendré par le support de ν' dans S.

H2.Il existe $u \in \mathbb{R}^d$ et $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $T_{\nu'}$ tels que :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \qquad \lim_{n \to +\infty} \xi_n\, a = u$$

On dit que $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ est une "suite contractante" et u est appelé "point de contraction".

H3.Il existe une application mesurable de X dans $M_1(\mathbb{R}^d)$, l'espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$

$$X \to M_1(\mathbb{R}^d)$$

$$x \to \lambda_x$$

telle que, pour π-presque tout $x \in X$, on ait :

$$\lambda_x = \int f(y)\, \lambda_y\, Q(x,dy).$$

3 . Analyse des hypothèses

a) Sous H1, on a $\pi \geq c\, \pi(\delta)\, \bar{\nu}$ avec $c\, \pi(\delta) > 0$.

En effet par projection de $(*)$ sur X, on obtient :

$$\forall\, x \in X \qquad c\,\overline{U_c}(x,.) = c\sum_{n=1}^{+\infty}(1-c)^{n-1}\, Q^n(x,.) \geq \delta(x)\,\overline{\nu}(.)$$

et donc $\pi = \pi\, c\, \overline{U_c} \geq c\, \pi(\delta)\, \overline{\nu}$, d'où le résultat.

b) Lorsque l'hypothèse H1 est vérifiée, avec de plus $\forall\, x \in X\ \ \delta(x) \geq \delta > 0$, la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris.

Dans ce cas, on a en effet $\forall\, x \in X\ \ \overline{U_c}\,(x,.) \geq \delta\, \overline{\nu}(.)$ avec $\overline{U_c}\,(c) = 1$, i-e $(X_n)_{n\geq 0}$ est récurrente positive au sens de Harris (cf [4] théorème 2.9 page 76).

c) Dans l'énoncé de l'hypothèse H1, on peut remplacer ν par une mesure de probabilité ν_0 se désintégrant en :

$$\nu_0\,(dy,ds) = \int \tau * \nu_y\,(ds)\, \overline{\nu}(dy)$$

où τ est une mesure de probabilité sur S dont le support S_τ est le semi-groupe $T_{\nu'}$ et ν_y désigne une mesure de probabilité sur S.

En effet, décomposons ν en $\nu(dy,ds) = \int \nu_y(ds)\, \overline{\nu}(dy)$, et montrons par récurrence qu'il existe, pour tout réel d $\in\,]0;c[$ et tout entier n, une mesure de probabilité τ_n sur S de support $S_{\tau_n} = S_{\nu' * n}$, et un réel $\delta_n(d)$, $0 < \delta_n(d) < \overline{\nu}(\delta)^n$, tels que :

$$U_d((x,I)\,,\,(dy,ds)\,) \geq \delta_n(d)\,\delta(x) \int \tau_n * \nu_y(ds)\, \overline{\nu}(dy)$$

Cette inégalité est vérifiée pour $n = 0$, car $\forall\, d \leq c \quad U_d = U_c + (c-d)\, U_c\, U_d$ (équation aux résolvantes).

Supposons cette inégalité vérifiée au rang n ; pour φ fonction borélienne positive sur $X \times S$, on a donc :

$$\begin{aligned} U_d\, \varphi\,(x,I) &\geq (c-d)\ U_c\ U_d\, \varphi\,(x,I) \\ &\geq (c-d) \int U_d\, \varphi(y,s)\ U_c\,((x,I),(dy,ds)) \\ &\geq (c-d)\ \delta(x) \int U_d\,(\tau_s\, \varphi)\,(y,I)\ \nu(dy,ds) \quad \text{avec } \tau_s\, \varphi(x,t) = \varphi(x,s\circ t) \\ &\geq (c-d)\ \delta\,(x)\ \delta_n(d) \int \varphi\,(z,s\circ t)\, \tau_n * \nu_z(dt)\ \overline{\nu}(dz)\, \delta(y)\, \nu(dy,ds) \end{aligned}$$

$$\geq (c-d)\ \delta(x)\ \delta_n(d) \int \varphi(z,t)\ [\int \delta(y) v(dy,.)] * \tau_n * v_z(dt)\ \overline{v}(dz)$$

Comme $\delta(y) > 0$ $\overline{v}(dy)$-ps, on a $S_{\int \delta(y)\, v(dy,.)} = S_{v'}$, d'où

$$U_d\, \varphi\, (x,I) \geq \delta_{n+1}(d)\, \delta(x) \int \varphi(z,t)\, \tau_{n+1} * v_z(dt)\, \overline{v}(dz)$$

avec $\delta_{n+1}(d) = (c-d)\, \delta_n(d)\, \overline{v}(\delta)$ et $\tau_{n+1}(\,.\,) = \dfrac{1}{\overline{v}(\delta)} \int \delta(y)\, v(dy,.)$

L'inégalité annoncée est donc bien vérifiée au rang $n+1$.

Par sommation, pour $0 < \alpha < \dfrac{1}{\overline{v}(\delta)}$, on obtient :

$$U_d\,((x,I),(dy,ds)) \geq (1-\alpha)\, \delta(x) \int \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n\, \delta_n(d)\, \tau_n \Big) * v_y(ds)\ \overline{v}(dy)$$

$$\geq \delta_0(x) \int \tau * v_y(ds)\ \overline{v}(dy)$$

où δ_0 est une fonction borélienne de X dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\delta_0(x) > 0$ $\overline{v}(dx)$-ps, et τ une mesure de probabilité sur S dont le support est le semi-groupe $T_{v'}$.

d) L'hypothèse H2 est vérifiée, dès qu'il existe dans $T_{v'}$ une contraction s telle que $m(s) < 1$; la suite $(s^n)_{n\geq 1}$ est contractante (cf théorème du point fixe).

e) On note Q^* l'opérateur dual de Q dans $\mathbb{L}^2(X, \pi)$.

On définit l'opérateur $\tilde{Q}^*$ pour φ fonction borélienne bornée sur $X \times \mathbb{R}^d$ par :

$$\tilde{Q}^*\, \varphi(x,a) = \int \varphi\,(y, f(x)a)\, Q^*(x,dy)$$

L'hypothèse H3 équivaut à l'existence sur $X \times \mathbb{R}^d$ d'une mesure de probabilité $\tilde{Q}^*$-invariante λ. En effet, une telle mesure λ se désintègre en $\int \varepsilon_x \otimes \lambda_x\, \pi(dx)$ car sa marginale sur X est Q^*-invariante et donc égale à π (d'après H1, la chaîne associée à Q est récurrente au sens de Harris, de probabilité invariante π ; l'opérateur dual de Q par rapport à π admet donc une version Q^* dont la chaîne associée $(X_n^*)_{n\geq 0}$ est aussi récurrente au sens de Harris ; Q^* admet donc π comme unique mesure invariante - cf [4] chapitre 2,théorèmes 2.10 et 2.16 -). On a alors :

$\forall\, \varphi \in \mathbb{L}^2(X, \pi)$, $\forall\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$
\begin{aligned}
<\varphi(.)\,,\lambda_{.}(A)>_{\pi} &= \int \varphi(x)\,\lambda_x(A)\;\pi(dx) \\
&= <\lambda\,,\varphi\otimes 1_A> = <\lambda\,,\tilde{Q}^*(\varphi\otimes 1_A)> \\
&= \int \varphi(y)\;1_A(f(x)\,a)\;Q^*(x,dy)\,\lambda_x(da)\;\pi(dx) \\
&= <\,Q^*\varphi(.)\,,\int 1_A\,(f(.)\,a)\;\lambda_{.}(da)\,>_{\pi} \\
&= <\varphi(.)\,,\int 1_A(f(y)a)\,\lambda_y(da)\,Q(.\,,dy)>_{\pi} \\
&= <\varphi(.)\,,\,<\int f(y)\lambda_y\,Q(.\,,dy)\,,A>\;>_{\pi}
\end{aligned}
$$

d'où $\lambda_x = \int f(y)\lambda_y\,Q\,(x,dy)$ pour π-presque tout x.

Inversement, si la famille $(\lambda_x)_{x\in X}$ vérifie H3, la mesure λ sur $X\times\mathbb{R}^d$ définie par $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x \;\; \pi(dx)$ est $\tilde{Q}^*$-invariante.

II . PRESENTATION DES RESULTATS

Théorème 1

Sous les hypothéses H1, H2 *et* H3, *il existe sur* $\mathbb{R}^d$ *une variable aléatoire Z telle que :*

i) pour $\mathbb{P}_\pi$*-presque tout* ω, *la suite de mesures de probabilité* $(M_n(\omega)\ \lambda_{X_n(\omega)})_{n\geq 0}$ *converge étroitement vers la masse de Dirac* $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

ii) pour π*-presque tout* x, *la loi de Z sous* $\mathbb{P}_x$ *est* $f(x)\ \lambda_x$.

De plus, la famille $(\lambda_x)_{x\in X}$ *est unique modulo* π *à vérifier* H3, *i-e la mesure* $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x\ \pi(dx)$ *est l'unique mesure de probabilité* $\tilde{Q}^*$*-invariante sur* $X \times \mathbb{R}^d$.

Théorème 2

Sous les hypothéses H1, H2 *et* H3, *avec de plus* $\delta(x) \geq \delta > 0\ \pi(dx)$*-ps, on a :*

$$\forall a \in T_{v'}.u \qquad \lim_{n\to+\infty} M_n(\omega)\, a = \tilde{Z}(\omega) \quad \mathbb{P}_x\text{-ps} \quad \forall x \in X$$

la convergence étant uniforme sur tout compact de $T_{v'}.u$, *et* $\tilde{Z}$ *désignant une v.ariable aléatoire sur* $\mathbb{R}^d$ *dont la loi sous* $\mathbb{P}_x$, *notée* $f(x)\ \tilde{\lambda}_x$, *vérifie*

$$\forall x \in X \quad \tilde{\lambda}_x = \int f(y)\, \tilde{\lambda}_y\ Q(x,dy).$$

La mesure $\tilde{\lambda} = \int \varepsilon_x \otimes \tilde{\lambda}_x\ \pi(dx)$ *est l'unique mesure de probabilité* $\tilde{Q}^*$*-invariante sur* $X \times \mathbb{R}^d$.

Théorème 3

Sous les hypothéses H1, H2 *et* H3, *pour tout ouvert* V *de* $\mathbb{R}^d$ *tel que* $\int \lambda_x(V)\, \pi(dx) > 0$, *on a* :

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \qquad \mathbb{P}_\pi [\sum_{n=0}^{+\infty} 1_V (f(X^*_{n-1}) \circ \ldots \circ f(X^*_0)\, a) = +\infty] = 1.$$

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES

Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant :

Lemme 0

Tout sous-ensemble borné de $(L, \| . \|_L)$ *est relativement compact dans* $(B, \|.\|_B)$.

La preuve repose sur le théorème d'Ascoli (voir [3] appendice).
Vu que pour $s \in S$, on a $\| s \|_B \leq \underset{x \in \mathbb{R}^d}{Sup} \dfrac{\| s(0) \| + \|x\|}{1 + \|x\|^2} \leq \| s(0) \| + 1$, toute famille F de S telle que $\underset{s \in F}{\mathrm{Sup}} \| s(0) \| < +\infty$ forme donc un sous-ensemble relativement compact de S.

La démonstration du théorème 1 s'inspire de [1], [2] et [3]. Elle se fait via plusieurs lemmes.

Lemme 1

a) *Sous* H3, *pour* $\mathbb{P}_\pi$*-presque tout* ω, *la suite de mesures de probabilité* $(M_n(\omega)\lambda_{X_n}(\omega))_{n \geq 0}$ *converge étroitement vers une mesure de probabilité notée* $\theta(\omega)$.

b) *Sous* H1 *et* H3, *pour* $\mathbb{P}_\pi$*-presque tout* ω, *il existe une suite croissante d'entiers* $(\varphi(n,\omega))_{n \geq 0}$, *telle que pour* ν*-presque tout* (y,s), *on ait* :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)} = \lim_{n \to +\infty} M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) \circ s \ \lambda_y$$

Preuve :

On considère la fonction

$$F : (X, S) \to M_1(\mathbb{R}^d)$$

$$(x,s) \to s\,\lambda_x$$

Sous $\mathbb{P}_\pi$, la loi de X_n est π et donc, sous H3, on a

$$\lambda_{X_n} = \int f(y)\lambda_y\, Q\,(X_n,dy) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Pour $\Phi \in \mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, espace des fonctions continues à support compact de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, la propriété de Markov donne alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\pi\,[\, <F(X_{n+1},M_{n+1}), \Phi> / \mathscr{F}_n\,](\omega) &= \int \Phi(M_n(\omega)\circ f(y)\, u\,)\, \lambda_y(du)\, Q(X_n,dy) \\ &= \int \Phi(M_n(\omega)\, u)\, \lambda_{X_n(\omega)}(du) \\ &= <F(X_n(\omega),M_n(\omega))\,, \Phi> \qquad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la suite $(<F(X_n, M_n), \Phi>)_{n\geq 0}$ forme une martingale bornée sous $\mathbb{P}_\pi$; par conséquent, $<F(X_n, M_n), \Phi>$ converge $\mathbb{P}_\pi$-ps.

D'autre part, on a $\forall\, p \geq 1 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} J_{n,p}(\Phi) \leq 2\, \|\Phi\|_\infty^2\, p$

où $J_{n,p}(\Phi) = \mathbb{E}_\pi\,[\,(\, < F(X_n,M_n),\Phi > - < F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >)^2\,]$.

En effet $J_{n,p}(\Phi) = \mathbb{E}_\pi\,[\, < F(X_n,M_n),\Phi >^2\,] \;+\; \mathbb{E}_\pi\,[\, < F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >^2\,]$

$$- 2\,\mathbb{E}_\pi\,[\, < F(X_n,M_n),\Phi >< F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >\,]$$

$$= \mathbb{E}_\pi [< F(X_n,M_n),\Phi >^2] + \mathbb{E}_\pi [< F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >^2]$$

$$- 2\, \mathbb{E}_\pi [< F(X_n,M_n),\Phi > \mathbb{E}_\pi [< F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi > / \mathcal{F}_n]]$$

$$= \mathbb{E}_\pi [< F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >^2] - \mathbb{E}_\pi [< F(X_n,M_n),\Phi >^2]$$

(en utilisant le fait que $(<F(X_n,M_n),\Phi>)_{n\geq 0}$ est une martingale sous $\mathbb{P}_\pi$).

$J_{n,p}(\Phi)$ s'écrit donc $e_{n+p}(\Phi) - e_n(\Phi)$ avec $e_n(\Phi) = \mathbb{E}_\pi [<F(X_n,M_n),\Phi>^2]$;

par conséquent $\forall\ N > p \qquad \sum_{n=0}^{N} J_n(\Phi) = \sum_{n=N+1}^{N+p} e_n(\Phi) - \sum_{n=0}^{p-1} e_n(\Phi) \leq 2p\, \|\Phi\|_\infty^2 .$

Par ailleurs $J_{n,p}(\Phi) = \mathbb{E}_\pi [(< F(X_n,M_n),\Phi > - < F(X_{n+p},M_{n+p}),\Phi >)^2]$

$$= \mathbb{E}_\pi [\int (< F(X_n,M_n),\Phi > - < F(y_p,M_n\circ f(y_1)\circ\ldots\circ f(y_p)),\Phi >)^2\, Q(X_n,dy_1)\ldots\ldots Q(y_{p-1},dy_p)]$$

$$= \mathbb{E}_\pi [\int (< F(X_n,M_n),\Phi > - < F(y_p,M_n\circ s),\Phi >)^2\, R^p((X_n,I),(dy,ds))]$$

d'où

$$\mathbb{E}_\pi [\sum_{n=0}^{+\infty} \int (< F(X_n,M_n),\Phi > - < F(y,M_n\circ s),\Phi >)^2\, R^p((X_n,I),(dy,ds))] \leq 2p\, \|\Phi\|_\infty^2$$

En multipliant les 2 membres de cette inégalité par $(1-c)^{p-1}$, $c \in]0;1[$, et en sommant sur $p \geq 1$, on obtient :

$$\mathbb{E}_\pi [\sum_{n=0}^{+\infty} \int (<F(X_n,M_n),\Phi> - <F(y,M_n\circ s),\Phi>)^2\, U_c((X_n,I),(dy,ds))] \leq 2\, \|\Phi\|_\infty^2 \sum_{p=1}^{+\infty} p(1-c)^{p-1}$$

Sous H1, on a alors :

$$\mathbb{E}_\pi [\int \sum_{n=0}^{+\infty} (<F(X_n,M_n),\Phi> - <F(y,M_n\circ s),\Phi>)^2\, \delta(X_n)\, \nu(dy,ds)] < +\infty$$

d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int (<F(X_n,M_n),\Phi> - <F(y,M_n\circ s),\Phi>)^2\, \delta(X_n)\, \nu(dy,ds) < +\infty \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$

Comme $\pi(\delta) > 0$, il existe $c_0 > 0$ tel que $\pi[\, \delta \geq c_0 \,] > 0$; $(X_n)_{n\geq 0}$ étant récurrente au sens de Harris, on a alors

$$\forall x \in X \qquad \mathbb{P}_x[\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{[\delta(X_n)\geq c_0]}(\omega) = +\infty] = 1$$

Donc, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, il existe une suite croissante d'entiers $(\varphi(n,\omega))_{n\geq 0}$ telle que $\forall\, n \geq 0 \quad \delta(X_{\varphi(n,\omega)}) \geq c_0$, ce qui entraîne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int (<F(X_{\varphi(n,\omega)}, M_{\varphi(n,\omega)}),\Phi> - <F(y, M_{\varphi(n,\omega)}\circ s),\Phi>)^2\, \nu(dy,ds) \quad < +\infty \qquad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Par conséquent, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω et ν-presque tout (y,s)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (<F(X_{\varphi(n,\omega)}, M_{\varphi(n,\omega)}),\Phi> - <F(y, M_{\varphi(n,\omega)}\circ s),\Phi>)^2 < +\infty$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} <F(X_n(\omega), M_n(\omega),\Phi> = \lim_{n\to+\infty} <F(y, M_{\varphi(n,\omega)}(\omega)\circ s),\Phi> \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Sachant qu'une suite de mesures de probabilité $\{\nu_n\}_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^d$ converge vaguement si et seulement si $\{\nu_n(\Phi_i)\}_{n\geq 0}$ converge pour une suite dense de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, il existe donc, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, une mesure positive sur $\mathbb{R}^d$, $\theta(\omega)$, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n(\omega)\lambda_{X_n(\omega)} = \lim_{n\to+\infty} M_{\varphi(n,\omega)}(\omega)\circ s \;\; \lambda_y = \theta(\omega)$$

Pour $\Phi \in \mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, $(<F(X_n, M_n), \Phi>)_{n\geq 0}$ étant une martingale bornée sous $\mathbb{P}_\pi$, on a

$\mathbb{E}_\pi[<\theta(\omega),\Phi>] = \mathbb{E}_\pi[<F(X_0(\omega), M_0(\omega)),\Phi>] = \int \varphi(f(x)u)\,\lambda_x(du)\,\pi(dx)$.

En prenant une suite croissante $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, convergeant vers la fonction constante égale à 1, on obtient $\mathbb{E}_\pi[<\theta(\omega),1>] = 1$ d'où par convexité

$<\theta(\omega),1> = 1 \;\; \mathbb{P}_\pi$-ps ; $\theta(\omega)$ est donc une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$.

Lemme 2

Sous H1 *et* H3, *pour* $\mathbb{P}_\pi$ *-presque tout* ω, *on a* $\limsup_{n \to +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega)}(\omega)\, 0\| < +\infty$.

<u>Preuve</u> :

Soit $A = \{ \omega \in \Omega : \limsup_{n \to +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) 0\| = +\infty\}$.

Il nous faut montrer que A est de $\mathbb{P}_\pi$ mesure nulle. Raisonnons par l'absurde et supposons $\mathbb{P}_\pi(A) > 0$. Il existe donc $\omega_0 \in A$ et $(y,s) \in X \times S$ tels que $\lim_{n \to +\infty} M_{\varphi(n,\omega_0)}(\omega_0) \circ s\ \lambda_y = \theta(\omega_0)$, $\theta(\omega_0)$ étant une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ (cf lemme 1).

Considérons une sous-suite d'indices $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que la suite

$(\|M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0)\, 0\|)_{k \geq 0}$ tende vers $+\infty$. De l'inégalité $\|M_n(\omega)\, 0\| \leq \|M_n(\omega)\, x\| + \|x\|$ sastisfaite pour tout $n \geq 0$ et pour tout point x de $\mathbb{R}^d$, il résulte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{n \to +\infty} \|M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0)\, x\| = +\infty$$

Pour toute fonction Φ de $\mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$, on a donc $\lim_{k \to +\infty} \lambda_y\, (\, \Phi \circ M_{\varphi(n_k,\omega_0)}(\omega_0) \circ s\,) \quad = 0$ d'où $< \theta(\omega_0), \Phi > = 0$, ce qui contredit le fait que $\theta(\omega_0)$ soit une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. Par conséquent $\mathbb{P}_\pi(A) = 0$.

Conséquence immédiate des lemme 0 et 2, sous H1 et H3, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, la suite $(\, M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))_{n \geq 0}$ possède des valeurs d'adhérence dans $(B, \|.\|_B)$.

Démonstration du théorème 1:

D'après le lemme 1 b), il existe $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0) = 1$, $y_0 \in X$, et une suite $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dense dans le support de $\tau * \nu_{y_0}$ tels que, pour tout $\omega \in \Omega_0$, les suites de mesures de probabilité $M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) \circ \xi_i \lambda_{y_0}$ converge étroitement vers $\theta(\omega)$ pour tout entier i.

Soit ω un élément fixé de Ω_0 et $M(\omega)$ une valeur d'adhérence dans $(B, \|.\|_B)$ de $(M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))_{n \geq 0}$. On a donc $\theta(\omega) = M(\omega) \circ \xi_i \lambda_{y_0}$ $\forall i \in \mathbb{N}$; en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut passer à la fermeture en $\|.\|_B$, d'où :

$$\forall \xi \in S_{\tau * \nu_{y_0}} \qquad M(\omega) \circ \xi \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$$

Soit $(\xi_k)_{k \geq 0}$ une suite contractante de S_τ de point de contraction u, et s un élément de $S_{\nu_{y_0}}$. La suite $(\xi_k \circ s)_{k \geq 0}$ forme alors une suite contractante de $S_{\tau * \nu_{y_0}}$, de point de contraction u. Comme S_τ est un semi-groupe, on a :

$$\forall \xi \in S_\tau, \forall k \geq 0 \qquad \xi \circ \xi_k \circ s \in S_{\tau * \nu_{y_0}}$$

et donc $\forall \xi \in S_\tau, \forall k \geq 0 \qquad M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s \, \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$

ce qui donne, pour $\Phi \in \mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$:

$$\lim_{n \to +\infty} < M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s \, \lambda_{y_0}, \Phi > = \lim_{n \to +\infty} < \lambda_{y_0}, \Phi \circ M(\omega) \circ \xi \circ \xi_k \circ s >$$
$$= \Phi(M(\omega) \circ \xi \, u) = < \theta(\omega), \Phi > \quad \forall \xi \in S_\tau \ \text{ i-e } \forall \xi \in T_\nu.$$

Par conséquent, pour $\mathbb{P}_\pi$-presque tout ω, $\theta(\omega)$ est une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

$\forall\ \Phi \in \mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$, la suite $(< M_n \lambda_{X_n}, \Phi >)_{n\geq 0}$ forme une martingale bornée convergeant $\mathbb{P}_\pi$-ps vers $\Phi(Z(\omega))$; la variable aléatoire $\Phi(Z(\omega))$ ferme cette martingale, i-e :

$$\mathbb{E}_\pi [\Phi(Z) / \mathscr{F}_n] (\omega) = < M_n(\omega)\, \lambda_{X_n(\omega)} , \Phi > \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Donc, pour toute fonction Ψ borélienne bornée sur X :

$$\mathbb{E}_\pi [\Phi(Z)\, \Psi(X_0)] = \mathbb{E}_\pi [\, \Psi(X_0)\, E_\pi[\Phi(Z) / \mathscr{F}_0]] = \mathbb{E}_\pi [\, \Psi(X_0) < M_0\, \lambda_{X_0} >]$$
$$= \int \Psi(x) < f(x) \lambda_x, \Phi > \pi(dx)$$

Par ailleurs $\quad \mathbb{E}_\pi [\Phi(Z)\, \Psi(X_0)] = \int\ \Phi(Z(\omega))\, \Psi(X_0(\omega))\, \mathbb{P}_\pi(d\omega)$

$$= \int\ \left(\int \Phi(Z(\omega))\, \mathbb{P}_x(d\omega)\right)\, \Psi(x)\ \pi(dx)$$

d'où, pour π-presque tout x $\quad \int \Phi(Z(\omega))\, \mathbb{P}_x(d\omega) = < f(x) \lambda_x, \Phi >$; la loi de Z sous $\mathbb{P}_x$ est donc $f(x)\ \lambda_x$.

Enfin, s'il existe sur $X \times \mathbb{R}^d$ deux mesures de probabilité $\tilde{Q}^*$-invariantes $\mu = \int \varepsilon_x \otimes \mu_x\ \pi(dx)$ et $\lambda = \int \varepsilon_x \otimes \lambda_x\ \pi(dx)$, on a, d'après ce qui précède :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\, \lambda_{X_n(\omega)} = \varepsilon_{Z_1(\omega)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\, \mu_{X_n(\omega)} = \varepsilon_{Z_2(\omega)} \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps.}$$

Z_1 et Z_2 étant deux variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$.

La mesure de probabilité $\dfrac{\lambda + \mu}{2}$ étant aussi $\tilde{Q}^*$-invariante, il existe sur $\mathbb{R}^d$ une troisième variable aléatoire Z_3, telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\ \frac{\lambda_{X_n(\omega)} + \mu_{X_n(\omega)}}{2} = \varepsilon_{Z_3(\omega)} \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

d'où $\dfrac{1}{2}(\varepsilon_{Z_1} + \varepsilon_{Z_2}) = \varepsilon_{Z_3}$ soit $Z_1 = Z_2 = Z_3$ $\quad \mathbb{P}_\pi$-ps.

La loi de Z_1 sous $\mathbb{P}_x$ étant $f(x)\lambda_x$ pour π-presque tout x, λ est l'unique mesure de probabilité $\tilde{Q}^*$-invariante sur $X \times \mathbb{R}^d$.

<u>Démonstration du théorème 2</u> :

Sous H3, on a $\forall\, p \geq 1 \;\; \lambda\, \tilde{Q}^{*p} = \lambda$, ce qui donne :

$$\forall\, p \geq 1 \quad \lambda_x = \int f(y_1)\circ \dots\dots \circ f(y_p)\, \lambda_{y_p}\, Q(x,dy_1) \dots Q(y_{p-1},dy_p) \quad \pi(dx)\text{-ps}$$

i-e $\qquad \lambda_x = \int s\, \lambda_y\, R^p\, ((x,I),(dy,ds)) \quad \pi(dx)\text{-ps}$

$$\lambda_x = c \sum_{p=1}^{+\infty} (1-c)^{p-1}\, \lambda_x = c \int s \lambda_y\; U_c((x,I)\,,(dy,ds)) \quad \pi(dx)\text{-ps}$$

$$\geq\; c\, \delta(x) \int s\, \lambda_y\, \tau * \nu_y\, (ds)\, \overline{\nu}(dy) \quad \pi(dx)\text{-ps} \;\; \text{d'après H1}$$

$$\geq\; c\, \delta(x)\; \rho \quad \pi(dx)\text{-ps} \;\; \text{avec } \rho = \int s\, \lambda_y\, \tau * \nu_y\, (ds)\, \overline{\nu}(dy)$$

Le *i)* du théorème 1 donne, pour Φ fonction positive de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$:

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_{X_n(\omega)}\, (\Phi \circ M_n(\omega)) \;=\; \Phi(Z(\omega)) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

En particulier, si $\Phi(Z(\omega)) = 0$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda_{X_n(\omega)}\, (\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \;\; \text{et donc} \;\; \lim_{n \to +\infty} \delta(X_n(\omega))\, \rho(\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Comme $\delta(x) \geq \delta > 0$ $\pi(dx)$-ps, cette dernière égalité équivaut à :

$$\lim_{n \to +\infty} \rho(\Phi \circ M_n(\omega)) = 0 \qquad \mathbb{P}_\pi\text{-ps} \;\; (1)$$

En reprenant alors la preuve du lemme 2,on montre que

$$\limsup_{n \to +\infty} \| M_n(\omega) 0 \| < +\infty \qquad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

si bien que, pour $\mathbb{P}_\pi$–presque tout ω, la famille $(M_n(\omega))_{n\geq 0}$ est relativement compacte dans $(\mathrm{B}, \| \,.\, \|_{\mathrm{B}})$ (cf lemme 0).

D'après (1), toute valeur d'adhérence $M(\omega)$ de $(M_n(\omega))_{n\geq 0}$ dans $(\mathrm{B}, \| \,.\, \|_{\mathrm{B}})$ envoit $a \in \mathrm{S}_\rho$ sur $Z(\omega)$ i-e :

$$\forall\, a \in \mathrm{S}_\rho \qquad \lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\, a = Z(\omega).$$

Pour déterminer S_ρ, il suffit de remarquer que $\rho(dx) \geq \int s\, \rho(dx)\;\tau * \nu'(ds)$, si bien que pour Φ fonction positive de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$:

$< \rho, \Phi > = 0 \;\Leftrightarrow\; < s\, \rho, \Phi > = 0 \;\; \tau(ds)$-ps

$\Leftrightarrow \; < s_i\, \rho, \Phi > = 0 \;\forall\, i \geq 1$, $(s_i)_{i\geq 1}$étant une suite dnse de S_ρ.

Via le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on passe à la fermeture en $\| \,.\, \|_B$, on utilise une suite contractante de S_τ de point de contraction u, et on obtient :

$< \rho, \Phi > = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall\, \xi \in S_\tau \quad \Phi(\xi\, u) = 0$ c'est-à-dire $S_\rho = T_{v'}.u$.

Il existe donc $X' \subset X$, $\pi\,(X') = 1$ tel que :

$$\forall\, x \in X',\; \forall a \in T_{v'}.u \qquad \lim_{n \to +\infty} M_n(\omega)\, a = Z(\omega) \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

Introduisons le temps d'arrêt T par rapport à la filtration canonique :

$T = \inf\{\, n \geq 1 : X_n \in X' \,\}$

La chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ étant récurrente au sens de Harris, on a

$\forall\, x \in X \;\; \mathbb{P}_x\,[T < +\infty\,] = 1.$

On pose alors $M_T = f(X_0)\circ \ldots \circ f(X_{T-1})$.

Nous avons le

Lemme 3

$$\forall\, x \in X, \forall a \in T_{v'}.u \qquad \lim_{n \to +\infty} M_n\, a = M_T\; Z\circ\theta^T \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

<u>Preuve</u> :

On a $\forall\, x \in X',\; \forall\, a \in T_{v'}.u,\; \forall\, \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x\;[\; \liminf_{n \to +\infty}\; \|M_n\, a - Z\| < \varepsilon\,] = 1$$

et il nous faut montrer $\forall\, x \in X,\; \forall\, a \in T_{v'}.u,\; \forall\, \varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}_x\;[\; \liminf_{n \to +\infty}\; \|M_n\, a - M_T\, Z\circ\theta^T\| < \varepsilon\,] = 1$$

soit $$\mathbb{E}_x\,[\liminf_{n \to +\infty}\, \Phi_\varepsilon(M_n\, a - M_T\; Z\circ\theta^T)\,] = 1 \;\text{ avec }\; \Phi_\varepsilon = 1_{[-\varepsilon;+\varepsilon]}$$

On a

$$\mathbb{E}_x\,[\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n\,a - M_T\,Z\circ\theta^T)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\,[1_{[T=k]} \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n\,a - M_T\,Z\circ\theta^T)]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\,[1_{[T=k]} \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_{k-1}\circ M_n^k\,a - M_{k-1}\,Z\circ\theta^k)]$$

où $M_n^k = f(X_k)\circ f(X_{k+1})\circ\ldots\circ f(X_n)$

Comme $\Phi_\varepsilon(M_n^k\,a - Z\circ\theta^k) \le \Phi_\varepsilon(M_{k-1}\circ M_n^k\,a - M_{k-1}\,Z\circ\theta^k)$, on a :

$$\mathbb{E}_x[\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n\,a - M_T\,Z\circ\theta^T)] \ge \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\,[1_{[T=k]} \liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n^k\,a - Z\circ\theta^k)]$$

$$\ge \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\,[1_{[T=k]}\,\mathbb{E}\,[\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_{n-k}\circ\theta^k a - Z\circ\theta^k)\ /\ \mathcal{F}_k]]$$

$$\ge \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\,[1_{[T=k]}\,\mathbb{E}_{X_k}[\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n\,a - Z)]$$

$$\ge \mathbb{E}_x\,[\,\mathbb{E}_{X_T}[\liminf_{n\to+\infty} \Phi_\varepsilon(M_n\,a - Z)]]$$

Le lemme s'en déduit alors immédiatement, vu que $\forall\, x \in X\ \ \mathbb{P}_x\,[X_T \in X'] = 1$.

Par conséquent $\forall\, x \in X$, $\forall\, a \in T_{V'}.u$, la suite aléatoire $(M_n\,a)_{n\ge 0}$ converge $\mathbb{P}_x$-ps vers une variable $\tilde{Z}$, dont on note la loi sous $\mathbb{P}_x$ $f(x)\,\tilde{\lambda}_x$
($\tilde{\lambda}_x$ est donc la loi sous $\mathbb{P}_x$ de la variable aléatoire $Z_1 = \lim_{n\to+\infty} f(X_1)\circ\ldots\circ f(X_n)\,a$).

Si Φ désigne une fonction de $\mathcal{C}K(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\forall\, x \in X \qquad <\tilde{\lambda}_x, \Phi> = \mathbb{E}_x\,[\Phi(Z_1)] = \mathbb{E}_x\,[\Phi(f(X_1)\,Z_1\circ\theta)]$$

$= \mathbb{E}_x [\, \mathbb{E}[\Phi(f(X_0 \circ \theta)\, Z_1 \circ \theta) / \mathcal{F}_1] \,]$

$= \mathbb{E}_x [\, \mathbb{E}_{X_1}[\Phi(f(X_0) Z_1)] \,]$ d'après la propriété de Markov

$= \mathbb{E}_x [<f(X_1)\, \tilde{\lambda}_{X_1}, \Phi>] = \int <f(y)\, \tilde{\lambda}_y, \Phi> Q(x,dy)$

soit $\forall x \in X \;\; \tilde{\lambda}_x = \int f(y)\, \tilde{\lambda}_y \, Q(x,dy)$.

<u>Démonstration du théorème 3</u> :

Notons $((X \times \mathbb{R}^d)^{\otimes \mathbb{N}}, (\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{\otimes \mathbb{N}}, (X^*_n, Y^*_n)_{n \geq 0}, (\mathbb{P}_{(x,a)})_{(x,a) \in X \times \mathbb{R}^d}))$ la chaîne canonique associée à $\tilde{Q}^*$; pour tout $(x,a) \in X \times \mathbb{R}^d$, on a :

$Y^*_n = f(X^*_{n-1}) \circ \dots \circ f(X^*_0)\, a \;\; \mathbb{P}_{(x,a)}$-ps.

λ étant l'unique mesure de probabilité $\tilde{Q}^*$-invariante, pour toute fonction φ borélienne bornée sur $X \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(X^*_k, Y^*_k) = <\lambda, \varphi> \quad \mathbb{P}_\lambda\text{-ps}$$

Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille croissante de compacts de X tels que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = X$, et B_i la boule de $\mathbb{R}^d$, de centre O et de rayon i. Il existe donc Ω_0, $\mathbb{P}_\lambda(\Omega_0) = 1$, tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \forall \omega \in \Omega_0 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X^*_k)\, 1_{B_i}(Y^*_k) = \lambda(K_i \times B_i)$$

Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\omega \in \Omega_0$, on considère la mesure de probabilité sur $X \times \mathbb{R}^d$

$\lambda_{n,\omega,a} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X^*_k(\omega)} \otimes \delta_{f(X^*_{k-1}(\omega)) \circ \dots \circ f(X^*_0(\omega))\, a}$; soit $\lambda_{\omega,a}$ une valeur d'adhérence de la suite $(\lambda_{n,\omega,a})_{n \geq 1}$ pour la topologie de la convergence vague.

Comme pour tout entier n et i

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*)\, 1_{B_{i+\|a-Y_0^*\|}}(f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1_{K_i}(X_k^*)\, 1_{B_i}(Y_{k-1}^*)$$

on a en particulier pour $\omega \in \Omega_0$ $\lambda_{\omega,a}\,(K_i \times B_{i+\|a-Y_0^*\|}) \geq \lambda\,(K_i \times B_i)$; on en déduit alors, i étant quelconque, que $\lambda_{\omega,a}$ est une mesure de probabilité sur $X \times \mathbb{R}^d$.

Soit φ une fonction continue à support compact sur $X \times \mathbb{R}^d$; la suite

$(\ \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) - \tilde{Q}^*\, \varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a)\ )_{k\geq 1}$ forme un accroissement de martingale borné par $2\|\varphi\|_\infty$. Par conséquent, $\forall\, x \in X$ et $\forall\, a \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) - \tilde{Q}^*\varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) = 0 \quad \mathbb{P}_x\text{-ps}$$

$\mathscr{C}K(X\times\mathbb{R}^d)$ étant séparable, il existe Ω_1, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_1)=1$, tel que
$\forall\omega \in \Omega_1$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi(X_k^*, f(X_{k-1}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) - \tilde{Q}^*\varphi(X_{k-1}^*, f(X_{k-2}^*) \circ \dots \circ f(X_0^*)\, a) = 0$$

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{C}K(X\times\mathbb{R}^d)$$

On a donc $\lambda_{\omega,a}\,(\varphi) = \lambda_{\omega,a}\,(\tilde{Q}^*\varphi)$ $\quad\forall\, \omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ et pour toute fonction φ de $\mathscr{C}K(X\times\mathbb{R}^d)$, i-e $\forall\, \omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ $\tilde{\lambda}_{\omega,a}$ est $\tilde{Q}^*$-invariante.

λ étant l'unique mesure de probabilité $\tilde{Q}^*$-invariante sur $X\times\mathbb{R}^d$, on a donc prouvé l'existence de $\Omega' \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega') = 1$, tel que $\forall\, \omega \in \Omega'$ et $\forall\, a \in \mathbb{R}^d$ la suite

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{X_k^*(\omega)} \otimes \delta_{f(X_{k-1}^*(\omega)) \circ \dots \circ f(X_0^*(\omega))\, a}\Big)_{n\geq 1} \text{ converge étroitement vers } \lambda.$$

Pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite croissante $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions de

$\in K(X \times \mathbb{R}^d)$, convergeant vers $1_X \otimes 1_V$. Pour tout point a de $\mathbb{R}^d$, et pour tout $m \geq 1$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_m (f(X^*_{k-1}) \circ \ldots \circ f(X^*_0)\, a) \;) = < \lambda, \varphi_m > \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

Comme $\forall\, m \geq 1 \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varphi_m (X^*_k, f(X^*_{k-1}) \circ \ldots\ldots \circ f(X^*_0)\, a) \;\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_V (X^*_{k-1}) \circ \ldots\ldots \circ f(X^*_0)\, a)$

on en déduit $\forall\, m \geq 1 \quad < \lambda, \varphi_m > \;\leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_V (f(X^*_{k-1}) \circ \ldots \circ f(X^*_0)\, a) \quad \mathbb{P}_\pi$-ps.

Le théorème de convergence monotone donne alors :

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^d \qquad \int \lambda_x(V) \pi(dx) \;\leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_V (f(X^*_{k-1}) \circ \ldots \circ f(X^*_0)\, a) \quad \mathbb{P}_\pi\text{-ps}$$

d'où le résultat, lorsque $\int \lambda_x(V)\, \pi(dx) > 0$.

VI. CAS PARTICULIER

Nous supposons dans ce paragraphe que $d \geq 2$ et que pour tout $x \in X$, les contractions $f(x)$ sont de la forme $f_1(x) \otimes f_2(x) \otimes \ldots\ldots\ldots \otimes f_d(x)$ i-e :

$$\forall\, a = (a_i)_{1 \leq i \leq d} \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, x \in X \quad f(x)\, a = (f_1(x)\, a_1, f_2(x)\, a_2, \ldots\ldots, f_d(x)\, a_d)$$

où $f_i(x)$, $1 \leq i \leq d$, est une contraction sur $\mathbb{R}$.
L'hypothèse H2 peut être alors affaiblie en :

H'2.Pour tout entier $k \in \{1,2, \ldots\ldots, d\}$, il existe $u_k \in \mathbb{R}$ et $(\xi_n^{(k)})_{n\geq 0}$ une suite de $T_{v'}$, $\xi_n^{(k)} = \xi_{n,1}^{(k)} \otimes \xi_{n,2}^{(k)} \otimes \ldots \otimes \xi_{n,d}^{(k)}$, tels que :

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} \xi_{n,k}^{(k)}\, a = u_k$$

On dit que $(\xi_n^{(k)})_{n\geq 0}$ est une suite *k-contractante.*

Proposition

Sous H1,H'2 *et* H3, *les affirmations des théorèmes 1 et 3 sont vérifiées .*

Preuve :

Il suffit de prouver le *i)* du théorème 1, les autres assertions en découlant.
En reprenant la démonstration de ce théorème, on établit l'existence de $\Omega_0 \subset \Omega$, $\mathbb{P}_\pi(\Omega_0)=1$ et $y_0 \in X$ tels que

$$\forall\, \xi \in S_{\tau * v_{y_0}} \qquad M(\omega) \circ \xi\, \lambda_{y_0} = \theta(\omega)$$

$M(\omega)$ étant une valeur d'adhérence dans B de $(M_{\varphi(n,\omega)}(\omega))$.
Vu que l'on a $M_{\varphi(n,\omega)}(\omega) = M_{\varphi(n,\omega),1}(\omega) \otimes \ldots\ldots \otimes M_{\varphi(n,\omega),d}(\omega)$, et $\forall\, k \in \{1, \ldots, d\}$ $\limsup_{n \to +\infty} \|M_{\varphi(n,\omega),k}(\omega)\| < +\infty$, on peut, en vertu du lemme 0, prendre $M(\omega)$ de la forme $M(\omega) = M(\omega)_1 \otimes M(\omega)_2 \otimes \ldots\ldots \otimes M(\omega)_d$.

Si $(\xi_n^{(k)})_{n\geq 0}$ est une suite k-contractante de T_{ν}, avec $\forall a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_{n,k}^{(k)}\, a = u_k$,

alors, pour tout élément $s = s_1 \otimes s_2 \otimes \dots \otimes s_d$ de $S_{\nu_{y_0}}$, la suite $(\xi_n^{(k)} \circ s)_{n\geq 0}$ de $S_{\tau * \nu_{y_0}}$

est k-contractante et $\lim\limits_{n\to+\infty} \xi_{n,k}^{(k)} \circ s_k\, a = u_k$.

On a alors pour toute fonction Φ de $\mathscr{C}K(\mathbb{R}^d)$

$< M(\omega)\circ\xi_n^{(1)}\circ s\ \lambda_{y_0}, \Phi\otimes 1_{\mathbb{R}^d} \otimes \dots \otimes 1_{\mathbb{R}^d} > = < \theta(\omega), \Phi\otimes 1_{\mathbb{R}^d} \otimes \dots \otimes 1_{\mathbb{R}^d} > = <\theta_1(\omega), \Phi>$

(avec $\theta_1(\omega)$ marginale de $\theta(\omega)$ sur le premier axe de $\mathbb{R}^d$)

si bien qu'en passant à la limite en n, on obtient $<\theta_1(\omega),\Phi> = \Phi(M(\omega)_1\, u_1)$.

$\theta_1(\omega)$ est donc une masse de Dirac sur $\mathbb{R}$. De la même façon on montre que les autres marginales de $\theta(\omega)$ sont des masses de Dirac ; on en déduit alors l'existence sur $\mathbb{R}^d$ d'une variable aléatoire $Z(\omega)$ telle que $\theta(\omega) = \varepsilon_{Z(\omega)}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1]Ph.CHASSAING "Convergence d'un produit semi-markovien de matrices et simplicité du spectre de la limite", preprint.

[2]Y.GUIVARC'H - A.RAUGI "Frontière de Fustenberg, propriétés de contractions et théorèmes de convergence"
Zeit. für. Wahr. n°69, p.187-242 (1985).

[3]J.P. LEGUESDRON "Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}^+$ avec chocs élastiques en zéro"
Thèse de 3ème cycle, Université de Rennes I (1987).
(A paraître aux annales de l'I.H.P)

[4]D.REVUZ "Markov chains"
North-Holland/Mathematical Library