M. F. ALLAIN

Intégrales stochastiques et processus Fonctionnelles du brownien

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1988, fascicule 1
« Probabilités », , p. 1-48
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1988___1_1_0>

INTEGRALES STOCHASTIQUES ET PROCESSUS FONCTIONNELLES DU BROWNIEN

MF ALLAIN
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Résumé

Pour β mouvement Brownien standard et Φ fonction "smooth" de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, soit $\Phi(\beta, \beta)$ le processus : $(\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u,s) \in [0,1]^2}$. On donne une représentation de la variation de $\Phi(\beta, \beta)$ sur un rectangle, qui fait intervenir des intégrales stochastiques au sens de Itô et au sens de Skorohod.

Abstract

Let β be a standard Brownian motion and let Φ be a smooth fonction from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$. Let $\Phi(\beta, \beta)$ be the process : $(\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u,s) \in [0,1]^2}$. We give a representation of the variation of $\Phi(\beta, \beta)$on a rectangle, using stochastic integrals in the sense of Itô and of Skorohod.

Key Words : Brownian Motion, Stochastic integrals, Stochastic Calculus.

Code A.M.S. : 60 G - 60 H

INTRODUCTION

Soit $\mathscr{C}_{k,p}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions Φ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre k et telles que Φ et ses dérivées partielles soient dominées par un polynôme.

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t \in [0,1]}, (\beta_t)_{t \in [0,1]}, P)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles.

Pour Φ élément de $\mathscr{C}_{4,p}(\mathbb{R}^2)$ on note $\Phi(\beta, \beta)$ le processus :

$(\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u,s) \in [0,1]^2}$.

Le but de ce travail est de prouver les résultats suivants :

- Le processus $\Phi(\beta, \beta)$ définit une mesure vectorielle μ^Φ sur $(]0,1]^2, \mathscr{B}(]0,1]^2)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ telle que :

$\mu^\Phi(1_{]0,a] \times]0,b]}) = \Phi(\beta_a, \beta_b) - \Phi(\beta_a, 0) - \Phi(0, \beta_b) + \Phi(0,0)$

- Au processus $\Phi(\beta, \beta)$ on peut associer des mesures vectorielles $(\mu^{(k)})_{k=1\ldots4}$ sur $(]0,1]^2, \mathscr{B}(]0,1]^2))$ possédant les propriétés suivantes :

* pour Φ_1 appartenant à $\mathscr{C}_{4,p}(\mathbb{R}^2)$, $A =]a, b] \times]c, d]$ et $k \in \{1,\ldots4\}$ on peut définir une intégrale stochastique de $\Phi_1(\beta, \beta) 1_A$ par rapport à $\mu^{(k)}$ qui est la limite dans $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ de

$\left(\sum_{i,j} \Phi_1(\beta_{a^n_i}, \beta_{a^n_j}) \mu^{(k)}(1_A 1_{A^n_{ij}})\right)_{n \in \mathbb{N}}$ *où* $(\{]a^n_i, a^n_{i+1}]\ i = 1 \ldots i(n)\})_{n \in \mathbb{N}}$

est une suite de partitions de $]0,1]$ dont le pas tend vers zéro et

$A^n_{ij} =]a^n_i, a^n_{i+1}] \times]a^n_j, a^n_{j+1}]$

* pour toute fonction ψ appartenant à $\mathscr{C}_{4,p}(\mathbb{R})$:

$$\psi \circ \Phi(\beta_a, \beta_b) - \psi \circ \Phi(\beta_a, 0) - \psi \circ \Phi(0, \beta_b) + \psi \circ \Phi(0,0)$$

$$= \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k!} \mu^{(k)}(1_{]0,a] \times]0,b]}\ \psi^{(k)} \circ \Phi(\beta, \beta)).$$

On a en particulier $\mu^{(1)} = \mu^\Phi$, et, pour $A =]a, b] \times]c, d]$

$$\mu^{(4)}(1_A) = 6 \int_{[0,1]^2} 1_A(u,s) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 (\beta_u, \beta_s) \quad duds$$

La formule précédente est du type formule de Itô ; elle donne une représentation de $\psi \circ \Phi$ qui fait intervenir des intégrales stochastiques au sens de Itô et au sens de Skorohod, elle étend un résultat prouvé dans [2].

Dans le paragraphe II on considère deux semi-martingales $(X_k)_{k=1,2}$, indexées par [0,1] et telles que :

$$X_k(t) = \int_0^t h_k(s)\ d\beta_s + \int_0^t g_k(s)\,ds$$

où h_k *et* g_k sont des processus prévisibles appartenant à $L_4(\,]0,1] \times \Omega, \mathscr{B}(\,]0,1]^2) \otimes \mathscr{F}, \lambda \otimes P\,)$. On note $\mathscr{P}_\Lambda$ la tribu sur $]0,1]^2 \times \Omega$ engendrée par : $\{\,]a,b] \times]c,d] \times F : a,b,c,d \in [0,1], F \in \mathscr{F}_{a \wedge c}\}$.

On établit que le processus $X_1 \otimes X_2 = (X_1(u)\,X_2(s))_{(u,s) \in [0,1]^2}$ définit une mesure stochastique $\mu^{X_1 \otimes X_2}$ sur $(\,]0,1]^2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$ et on donne une représentation par des intégrales stochastiques au sens de Itô de $\mu^{X_1 \otimes X_2}(h)$ pour h processus élémentaire $\mathscr{P}_\Lambda$ - mesurable.

Dans le paragraphe III on considère des processus $(X_k)_{k=1,2}$ tels que $X_k = (\varphi_k(\beta_u))_{u \in [0,1]}$, $\varphi_k \in \mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$ et on prouve que les puissances de $X_1 \otimes X_2$ définissent des mesures stochastiques sur $(\,]0,1]^2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda)$, à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Le résultat démontré dans [2], n'est pas utilisable car $X_1 \otimes X_2$ n'est pas $\mathscr{P}_\Lambda$ - mesurable. Cependant, en utilisant l'intégrale de Skorohod il est possible de donner une autre représentation de $\mu^{X_1 \otimes X_2}(1_A)$ $(A =]a,b] \times]c,d]\,)$ qui permet d'établir les résultats annoncés (paragraphes V et VI).

Les paragraphes I et IV donnent les définitions et propriétés nécessaires concernant les mesures stochastiques et l'intégrale de Skorohod respectivement.

I - MESURES STOCHASTIQUES. GENERALITES

Les références sont : [1] , [5].

1 - Définitions

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace probabilisé, soit $T =]0,1]^d$ et soit

$$\mathscr{A} = \{A = \prod_{i=1}^{d}\,]a_i, b_i] : a_i, b_i \in [0,1]\}.$$

On note $\mathscr{B}(T)$ la tribu borélienne sur T.

1.1 - Tribu prévisible

Soit $(\mathscr{G}(A))_{A \in \mathscr{A}}$ une famille de sous tribus de $\mathscr{F}$ telle que :

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{G}(B) \subseteq \mathscr{G}(A).$$

On appelle tribu prévisible, la tribu $\mathscr{P}$ sur $T \times \Omega$ engendrée par la semi-algèbre :

$$\mathscr{R} = \{ A \times F : A \in \mathscr{A}, F \in \mathscr{G}(A) \}.$$

1.2 - Différents espaces de processus prévisibles

On note $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ l'espace vectoriel des processus prévisibles, à valeurs réelles et bornés.

On note $\mathscr{H}_b^1(\mathscr{P})$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ tel que :

$$h \in \mathscr{H}_b^1(\mathscr{P}) \Leftrightarrow h = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{A_k}$$

où $A_k \in \mathscr{A}$ et α_k est une variable aléatoire $\mathscr{G}(A_k)$ - mesurable et bornée.

1.3 - Mesure stochastique

Une mesure stochastique sur $(T \times \Omega, \mathscr{P})$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, est une application μ de $\mathscr{P}$ dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$, σ-additive et vérifiant :

$\forall A \times F \in \mathscr{R}$: $\mu(A \times F) = 1_F \mu(A \times \Omega)$.

2 - Propriétés

Dans ce paragraphe intervient une seule tribu prévisible $\mathscr{P}$, pour simplifier les notations on utilisera $\mathscr{H}_b$ et $\mathscr{H}_b^1$ au lieu de $\mathscr{H}_b(\mathscr{P})$ et $\mathscr{H}_b^1(\mathscr{P})$.

Pour $p \geq 0$ $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ est l'espace $L_p^{\mathbb{R}}(\Omega, \mathscr{F}, P)$; pour $p = 0$ $\| f \|_0 = E(|f| \wedge 1)$, pour $0 < p < 1$ $\| f \|_p = E(|f|^p)$, pour $p \geq 1$ $\| f \|_p$ est la norme usuelle.

2.1 - Théorème

Soit $\mathscr{R}'$ l'agèbre engendrée par $\mathscr{R}$, soit μ une application additive de $\mathscr{R}'$ dans $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ vérifiant :

i) $\forall A \times F \in \mathscr{R}$ $\mu(A \times F) = 1_F \, \mu(A \times \Omega)$.

ii) $\mu(\mathscr{R}')$ est une partie bornée de $L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

iii) Pour toute suite décroissante $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{R}'$ telle que $\bigcap_n D_n = \emptyset$ on a : $\lim_n \| \mu(D_n) \|_p = 0$.

2.1.1 - Alors μ admet une extension sur $\mathcal{P}$ qui est une mesure stochastique, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2.1.2 - L'application μ définie sur $\mathcal{H}_b^1$ par :

$$\mu(h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \mu(A_k \times \Omega) \qquad si \;\; h = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{A_k}$$

admet une extension, notée également μ, sur $\mathcal{H}_b$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, linéaire et telle que : pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{H}_b$ qui converge vers h élément de $\mathcal{H}_b$ et qui est uniformément bornée, la suite $(\mu(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu(h)$ dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dans certains cas on peut prouver l'existence d'une extension linéaire de μ, définie sur un espace $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_b$, à valeurs dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et telle que le théorème de convergence dominée reste valable. Les éléments de $\mathcal{H}$ sont alors dits : μ-intégrables. Le corollaire suivant en donne un exemple.

2.2 - Corollaire

Soit μ une application additive de $\mathcal{R}'$ dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vérifiant :

$$\forall A \times F \in \mathcal{R} \; : \; \mu(A \times F) = 1_F \, \mu(A \times \Omega).$$

Pour h élément de $\mathcal{H}_b^1$ on définit μ (h) comme en 2.1.2.

Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de processus prévisibles, stable par V et Λ et tel que :

- $\mathcal{H}_b \subseteq \mathcal{H}$
- $\forall h \in \mathcal{H}, \forall g \in \mathcal{H}_b \quad hg \in \mathcal{H}$.

Soit θ une application de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

i) $\forall h \in \mathcal{H}_b^1 : \| \mu(h) \|_p \leq \theta(h)$

ii) $|h| \leq |g| \Rightarrow \theta(h) \leq \theta(g)$

iii) Pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ qui converge simplement vers 0 et qui est dominée par un élément de $\mathcal{H}$, la suite $(\theta(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors μ satisfait aux hypothèses du théorème I.2.1 et admet une extension linéaire de $\mathcal{H}$ dans $L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. De plus, si on note μ cette extension on a :

2.2.1 - $\forall\, h \in \mathcal{H} \quad \|\mu(h)\|_p \leq \theta(h)$

2.2.2 - $\forall\, h \in \mathcal{H}, \forall\, A \times F \in \mathcal{R} : \mu(h\, 1_{A \times F}) = 1_F\, \mu\,(h\, 1_{A \times \Omega})$

Remarque. 2.2.1 implique que le théorème de convergence dominée est valable pour μ, sur $\mathcal{H}$. Le résultat est évident quand $\mathcal{H} = L_2\,(T \times \Omega, \mathcal{P}, v\,)$ où v est une probabilité et $\|\, \mu\,(h\,)\,\|_2 = \|\, h\, \|_2\, \forall\, h \in \mathcal{H}_b^1$

3 - Mesure stochastique associée à un processus

Soit X un processus sur $(T \times \Omega, \mathcal{B}\,(T) \otimes \mathcal{F}\,)$, à valeurs réelles et tel que : $\forall\, t \in T, X_t \in L_p\,(\Omega, \mathcal{F}, P\,)$.

Pour A élément de $\mathcal{A}$, on note $\Delta_A\, X$ la variation de X sur A.

Soit $\mathcal{P}$ une tribu prévisible sur $T \times \Omega$.

Tout élément D de $\mathcal{R}'$ peut se mettre sous la forme :

$\bigcup\limits_{i=1}^{k} (\,A_i \times F_i\,)$ où $A_i \times F_i \in \mathcal{R}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

L'expression $\sum\limits_{i=1}^{k} 1_{F_i}\ \Delta_{A_i} X$ ne dépendant pas de l'écriture de D,on peut définir sur $\mathcal{R}'$ une application additive μ^X, à valeurs dans $L_p\,(\Omega, \mathcal{F}, P\,)$ par :

$$\mu^X\,(D) = \sum_{i=1}^{k} 1_{F_i}\, \Delta_{A_i} X.$$

Si μ^X satisfait aux hypothèses du corollaire I.2.2, son extension à $\mathcal{P}$ est appelée : mesure stochastique associée à X, son extension à $\mathcal{H}$: intégrale stochastique par rapport à X.

II - PRODUIT DE MESURES STOCHASTIQUES

1 - Hypothèses et notations

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t\,)_{t\, \in\, [0,1]}, (\beta_t\,)_{t\, \in\, [0,1]}, P\,)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles. Soit $T_1 =]0,1]$, soit $\mathcal{A}_1 = \{A =]a, b] : a, b \in [0,1]\,\}$ et, pour $A =]a, b]$ soit $\mathcal{G}\,(A) = \mathcal{F}_a$; on note $\mathcal{P}_1$ la tribu prévisible sur $T_1 \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R} = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_1, F \in \mathcal{G}(A)\}$ (c'est la tribu prévisible usuelle).

Il est bien connu que dans ce cas, pour p = 2, les hypothèses du corollaire I - 2.2 sont satisfaites par μ^β quand :

$\mathcal{H} = L_2\,(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P\,)$

$\theta(h) = \|h\|_2 \; (= \| \mu(h)\|_2)$

Il résulte de l'inégalité de Burkholder qu'elles sont également satisfaites par μ^β quand p = 4 et :

$\mathcal{H} = L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$

$\theta(h) = 16\, \|h\|_4$

Dans la suite on écrira $\int_0^1 h(s)\, d\beta_s$ au lieu de $\mu^\beta(h)$ et on utilisera les propriétés de cette intégrale et en particulier le calcul stochastique, sans justification lorsqu'il s'agira d'utilisation classique.

Soit $T_2 =]0,1]^2$, soit $\mathcal{A}_2 = \{A = \prod_{i=1}^{2}]a_i, b_i] : a_i, b_i \in [0,1]\}$ et, pour A $\in \mathcal{A}_2$, soit $\mathcal{G}_\Lambda(A) = \mathcal{F}_{a_1 \wedge a_2}$ et $\mathcal{G}_V(A) = \mathcal{F}_{a_1 \vee a_2}$; on note $\mathcal{P}_\Lambda$ la tribu prévisible sur $T_2 \times \Omega$ engendrée par $\mathcal{R}_\Lambda = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_2, F \in \mathcal{G}_\Lambda(A)\}$ et $\mathcal{P}_V$ celle engendrée par $\mathcal{R}_V = \{A \times F : A \in \mathcal{A}_2, F \in \mathcal{G}_V(A)\}$, on note $\mathcal{B}$ la tribu prévisible sur $T_2 \times \Omega$ engendrée par les processus déterministes indexés par T_2. Soient X et Y deux processus sur ($[0,1] \times \Omega$, $\mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{F}$), adaptés à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}$; on note $X \otimes Y$ le processus sur ($[0,1]^2 \times \Omega$, $\mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F}$) tel que : $X \otimes Y(s,t) = X(s)\,Y(t)$. Si X est constant et égal à α on utilisera la notation $\alpha \otimes Y$.

Soit $A \in \mathcal{A}_2$, alors $\Delta_A(X \otimes Y) = (X_{b_1} - X_{a_1})(Y_{b_2} - Y_{a_2})$.

Dans le cas particulier où X = Y = β on a :

$$E(\Delta_A(\beta \otimes \beta) \mid \mathcal{G}_V(A)) = E(\Delta_A(\beta \otimes \beta) \mid \mathcal{G}_\Lambda(A)) = \int_0^1 1_A(u,u)\, du.$$

Soit V le processus sur ($[0,1]^2 \times \Omega$, $\mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F}$) tel que $V(s,t) = s \wedge t$, alors $\Delta_A V = \int_0^1 1_A(u,u)\, du$ et V définit une probabilité sur $\mathcal{B}([0,1]^2) \otimes \mathcal{F}$) notée ν.

La famille de tribus $(\mathcal{F}^V_{(s,t)})_{(s,t) \in T_2}$ telle que $\mathcal{F}^V_{(s,t)} = \mathcal{F}_{s \vee t}$ ne satisfait pas à la condition F_4, par contre la famille de tribus $(\mathcal{F}^\Lambda_{(s,t)})_{(s,t) \in T_2}$ telle que $\mathcal{F}^\Lambda_{(s,t)} = \mathcal{F}_{s \wedge t}$ satisfait à la condition F_4 et on a : $\mathcal{F}^*_{(s,t)} = \mathcal{F}_{s \vee t}$. Le processus

$\beta \otimes \beta - V$ est une martingale faible relativement à la famille $(\mathcal{F}^V_{(s,t)})_{(s,t) \in T_2}$.

Afin d'alléger les notations on écrira parfois dans la suite $L_p(P)$, $L_p(\lambda \otimes P)$,

$L_p(\lambda \otimes \lambda \otimes P)$, $L_p(v \otimes P)$ au lieu de $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $L_p(T_1 \times \Omega, \mathbb{B}(T_1) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$, $L_p(T_2 \times \Omega, \mathbb{B}(T_2) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes \lambda \otimes P)$, $L_p(T_2 \times \Omega, \mathbb{B}(T_2) \otimes \mathcal{F}, v \otimes P)$ respectivement.

2 - Proposition

Soient h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. Pour $i \in \{1,2\}$ soit M_i la martingale telle que :

$$M_i(s) = \int_0^s h_i(u)\, d\beta_u .$$

Alors :

i) Le processus $M_1 \otimes M_2$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{K}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\, \theta(h, h_1, h_2)$$

où C est une constante

et
$$\theta(h, h_1, h_2) = (\|h_1\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(1 \otimes h_2)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h_2\|_{L_4(\lambda \otimes P)} \|h(h_1 \otimes 1)\|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \|h(h_1 \otimes h_2)\|_{L_2(v)}).$$

iii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ on a :

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}(h) = \int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h(s,u)\, h_2(u)\, d\beta_u \right) d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 h_2(s) \left(\int_0^1 h(u,s)\, h_1(u)\, d\beta_u \right) d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u,s)\, h_1(u)\, h_2(s)\, v(du, ds).$$

Démonstration.

Soit h un élément de $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ il existe alors une partition de $]0,1]$ de la forme $\{A_i =]a_{i-1}, a_i], i = 1 \dots n\}$ telle que :

$$h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\, 1_{A_i \times A_j}$$

α_{ij} étant $\mathcal{F}_{a_{i-1} \wedge a_{j-1}}$ − mesurable et borné.

Pour s fixé le processus $(h(u,s))_{u \in]0,1]}$ est $\mathcal{P}_1$ − mesurable et :

$$\int_0^s h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u \underset{L_2(P)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,1_{A_j}(s)\int_0^s 1_{A_i}(u)\,h_1(u)\,d\beta_u .$$

Soit $H_1(s) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,1_{A_j}(s)\int_0^s 1_{A_i}(u)\,h_1(u)\,d\beta_u$

H_1 appartient à $L_4(T\times\Omega, \mathcal{P}_1, \lambda\otimes P)$.

Par conséquent on peut définir :

$$\int_0^1 H_1(s)\,h_2(s)\,d\beta_s \underset{L_2(P)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\int_{a_{j-1}}^{a_j} h_2(s)\left(\int_0^s 1_{A_i}(u)\,h_1(u)\,d\beta u\right)d\beta_s.$$

Le même raisonnement est valable pour h(s, u) et

$$H_2(s) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\,1_{A_i}(s)\int_0^s 1_{A_j}(u)\,h_2(u)\,d\beta_u.$$

Or si $A =]a_1, b_1]\times]a_2, b_2] = A_1\times A_2$

$$\begin{aligned}\Delta_A(M_1\otimes M_2) &= \int_{a_1}^{b_1} h_1(u)\,d\beta_u \int_{a_2}^{b_2} h_2(u)\,d\beta_u\\ &= \int_0^1 1_{A_1}(s)\,h_1(s)\left(\int_0^s 1_{A_2}(u)\,h_2(u)\,d\beta_u\right)d\beta_s\\ &+ \int_0^1 1_{A_2}(s)\,h_2(s)\left(\int_0^s 1_{A_1}(u)\,h_1(u)\,d\beta_u\right)d\beta_s\\ &+ \int_0^1 1_{A_1}(s)\,1_{A_2}(s)\,h_1(s)\,h_2(s)\,ds.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mu^{M_1\otimes M_2}(h) = \sum_{ij} \alpha_{ij}\,\Delta_{A_i\times A_j}(M_1\otimes M_2) = \sum_{ij}\alpha_{ij}\left\{\int_{a_{i-1}}^{a_i} h_1(s)\left(\int_0^s 1_{A_j}(u)h_2(u)d\beta_u\right)d\beta_s\right.$$

$$+ \int_{a_{j-1}}^{a_j} h_2(s)\left(\int_0^s 1_{A_i}(u)\,h_1(u)\,d\beta_u\right)d\beta_s + \int_0^1 1_{A_i}(s)\,1_{A_j}(s)\,h_1(s)\,h_2(s)\,ds\,\}$$

$$= \int_0^1 h_1(s)\,H_2(s)\,d\beta_s + \int_0^1 h_2(s)\,H_1(s)\,d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u,s)\,(h_1 \otimes h_2)(u,s)\,\nu\,(du,ds).$$

et $\| \mu^{M_1 \otimes M_2}(h) \|_{L_2(P)} \leq \left[\int_0^1 E\left((h_1(s)\,H_2(s))^2\right)ds\right]^{\frac{1}{2}}$

$$+ \left[\int_0^1 E\left((h_2(s)\,H_1(s))^2\,ds\right.\right]^{\frac{1}{2}} + \| h\,(h_1 \otimes h_2) \|_{L_2(\nu \otimes P)}.$$

or $E([h_i(s)\,H_j(s)]^2) \leq (E([h_i(s)]^4))^{\frac{1}{2}}\,E([H_j(s)]^4)^{\frac{1}{2}}$

mais $H_1(s) \underset{Pps}{=} \int_0^1 h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u$

et $E((H_1(s))^4) \leq C \int_0^1 E([h(u,s)\,h_1(u)]^4)\,du$

d'où $\| \mu^{M_1 \otimes M_2}(h) \|_{L_2(P)} \leq C\,\{ \| h_2 \|_{L_4(\lambda \otimes P)} \| h\,(h_1 \otimes 1) \|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}$

$$+ \| h_1 \|_{L_4(\lambda \otimes P)} \| h\,(1 \otimes h_2) \|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}$$

$$+ \| h\,(h_1 \otimes h_2) \|_{L_2(\nu \otimes P)}$$

Pour tout h, $\mathcal{P}_\Lambda$ – mesurable on peut définir :
$\theta(h, h_1, h_2) = \| h_2 \|_{L_4(\lambda \otimes P)} \| h\,(h_1 \otimes 1) \|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)}$
$+ \| h_1 \|_{L_4(\lambda \otimes P)} \| h\,(1 \otimes h_2) \|_{L_4(\lambda \otimes \lambda \otimes P)} + \| h\,(h_1 \otimes h_2) \|_{L_2(\nu \otimes P)}$

Soit $\mathcal{H}(h_1, h_2) = \{ h : h\ \mathcal{P}_\Lambda$ – mesurable et $\theta(h, h_1, h_2) < +\infty \}$.

Alors les hypothèses du corollaire I.2.2 sont satisfaites d'où i) et ii).

3 - Corollaire

Soit h appartenant à $\mathcal{K}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$ et tel que : pour s fixé les processus $(h(s,u))_{u\in]0,1]}$ et $(h(u,s))_{u\in]0,1]}$ sont $\mathcal{P}_1$ – mesurables. Alors il existe des processus $(H_i)_{i=1,2}$ appartenant à $L_4(T\times\Omega, \mathcal{P}_1, \lambda\otimes P)$ tels que :

$$\lambda\ p.p\quad H_2(s)=\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u \qquad H_1(s)=\int_0^s h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u$$

$$\text{et}\ \mu^{M_1\otimes M_2}(h)=\int_0^1 h_1(s)\,H_2(s)\,d\beta_s+\int_0^1 h_2(s)\,H_1(s)\,d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u,s)\,(h_1\otimes h_2)(u,s)\,\nu(du,ds).$$

Démonstration

Si $h\in\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$, h satisfait aux hypothèses du corollaire et :

$$\mu^{M_1\otimes M_2}(h)=\int_0^1 h_1(s)\,H_2(s)\,d\beta_s+\int_0^1 h_2(s)\,H_1(s)\,d\beta_s + \int_{[0,1]^2} h(u,s)\,(h_1\otimes h_2)(u,s)\,\nu(du,ds)$$

$$\text{où}\ H_1(s)=\int_0^s h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u\ \ \text{et}\ \ H_2(s)=\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u$$

Les processus $\left(\int_0^s h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u\right)_{s\in[0,1]}$ et $\left(\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u\right)_{s\in[0,1]}$ admettant une modification qui est $\mathcal{P}_1$– mesurable, c'est celle que l'on utilise.

Soit h satisfaisant aux hypothèses du corollaire et soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite uniformément bornée de $\mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ qui converge simplement vers h :

Alors $(\mu^{M_1\otimes M_2}(h_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers $\mu^{M_1\otimes M_2}(h)$.

Il est évident que :

$$\left(\int_{[0,1]^2} h_n(u,s)(h_1\otimes h_2)(u,s)\,\nu(du,ds)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{converge}$$

dans $L_2(P)$ vers $\displaystyle\int_{[0,1]^2} h(u,s)(h_1\otimes h_2)(u,s)\,\nu(du,ds)$.

Intéressons-nous à $\displaystyle\left(\int_0^1 h_1(s)\left(\int_0^s h_n(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u\right)d\beta_s\right)_{n\in\mathbb{N}}$

On pose $\displaystyle H_2^n(s)=\int_0^s h_n(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u$.

On a : $(H_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de $L_4(T\times\Omega,\mathcal{P}_1,\lambda\otimes P)$

et $\displaystyle\int_0^1 E[(H_2^n(s)-H_2^m(s))^4]ds \le C\int_0^1\int_0^1 E[(h_n(s,u)-h_m(s,u))^4(h_2(u))^4]\,du\,ds.$

$$\le C\,\|(h_n-h_m)(h_2\otimes 1)\|^4_{L_4(\lambda\otimes\lambda\otimes P)}.$$

Par conséquent la suite $(H_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L_4(T_1\times\Omega,\mathcal{P}_1,\lambda\otimes P)$ soit H_2 la limite . D'autre part , pour chaque s :

$$\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,d\beta_u$$

est bien définie et $\mathcal{F}_s$ – mesurable, soit $H(s)$ ce processus, on a :

$$E[(H(s)-H_2^n(s))^2]=E\left(\int_0^s (h(s,u)-h_n(s,u))\,h_2(u)\,d\beta_u\right)^2$$

$$=\int_0^s E[(h(s,u)-h_n(s,u))^2(h_2(u))^2]\,du.$$

Par conséquent $(H_2^n(s))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $H(s)$ dans $L_2(P)$. Or il existe une sous suite $(H^{n(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\lambda \ p.p \qquad \lim_k E\left((H_2^{n(k)}(s) - H_2(s))^2\right) = 0.$$

Par conséquent pour presque tout s :

$$H_2(s) = H(s) = \int_0^s h(s,u)\, h_2(u)\, d\beta_u \quad (Pps)$$

Enfin

$$[E((\int_0^1 h_1(s) H_2^n(s)\, d\beta_s - \int_0^1 h_1(s) H_2(s)\, d\beta_s)^2)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \| h_1 \|_{L_4(\lambda \otimes P)} \| H_2^n - H_2 \|_{L_4(\lambda \otimes P)}$$

d'où le corollaire.

4 - Proposition

Soient h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$.
Soit $\mathcal{K}(h_1, h_2) = \{g_1 \otimes g_2 : g_i$ est $\mathcal{P}_1$ mesurable, $g_i h_i \in L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)\}$.
Soit $\mathcal{K}^2(h_1, h_2) = \{g h : h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda), g \in \mathcal{K}(h_1, h_2)\}$.

Soit $(M_i)_{i=1,2}$ les martingales telles que :

$$M_i(t) = \int_0^t h_i(s)\, d\beta_s .$$

Alors $\mu^{M_1 \otimes M_2}$ admet une extension sur $\mathcal{K}^2(h_1, h_2)$ notée également $\mu^{M_1 \otimes M_2}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

i) pour $g h \in \mathcal{K}^2(h_1, h_2)$:

$$\| \mu^{M_1 \otimes M_2}(g h) \|_{L_2(P)} \leq C\, \theta(h, g_1 h_1, g_2 h_2)$$

ii) Pour $g = g_1 \otimes g_2$ appartenant à $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ l'application qui à $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{M_1 \otimes M_2}(gh)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$ vérifiant :

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h)$$

où N_i est la martingale telle que : $N_i(t) = \int_0^t g_i(s)\, h_i(s)\, d\beta_s$.

iii) Pour h appartenant à $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ l'application qui à $g_1 \otimes g_2$ associe

$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)\, h)$ est additive au sens suivant :

• si $g_i = \sum_{k=1}^{r} g_{i,k}$ avec : $g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathcal{H}(h_1, h_2)$.

Alors : $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)\, h) = \sum_{k,k'} \mu^{M_1 \otimes M_2}((g_{1,k} \otimes g_{2,k'})\, h)$

et possède la propriété de convergence dominée suivante :

• Pour toute suite $(g_1^n \otimes g_2^n)_{n \in N}$ d'éléments de $\mathcal{H}(h_1, h_2)$ telle que : pour chaque i la suite $(g_i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i en étant dominée par f_i et $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{H}(h_1, h_2)$; la suite $(\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1^n \otimes g_2^n)\, h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)\, h)$ dans $L_2(P)$.

<u>Démonstration</u>

Soient $(g_i)_{i=1,2}$ des éléments de $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_1)$ (alors $g_1 \otimes g_2$ appartient à $\mathcal{H}(h_1, h_2)$)
Soit h appartenant à $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$.

Il existe alors une partition $\{\,]a_{i-1}, a_i]\ i = 1 \ldots n \}$ de $]0, 1]$ telle que :

$$g_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^k\, 1_{]a_{i-1}, a_i]} \quad k = 1, 2$$

$$h = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, 1_{A_{ij}} \quad (A_{ij} =]a_{i-1}, a_i] \times]a_{j-1}, a_j]).$$

Le processus $(g_1 \otimes g_2)\, h$ s'écrit alors :

$$\sum_{ij} \gamma_i^1\, \gamma_j^2\, \alpha_{ij}\, 1_{A_{ij}}$$

On définit alors $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)\, h)$ par :

$$\sum_{ij} \gamma_i^1 \gamma_j^2 \alpha_{ij} \Delta_{A_{ij}}(M_1 \otimes M_2) = \sum_{ij} \alpha_{ij} (\gamma_i^1 \int_{a_{i-1}}^{a_i} h_1(s)\, d\beta_s)(\gamma_j^2 \int_{a_{j-1}}^{a_j} h_2(s)\, d\beta_s)$$

$$= \sum_{ij} \alpha_{ij} \left(\int_{a_{i-1}}^{a_i} g_1(s) h_1(s)\, d\beta_s \right) \left(\int_{a_{j-1}}^{a_j} g_2(s) h_2(s)\, d\beta_s \right)$$

Les martingales N_1 et N_2 définies par :

$$N_i(t) = \int_0^t g_i(s) h_i(s)\, d\beta_s$$

satisfont aux hypothèses de la proposition II - 2 et on a :
$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h)$ par conséquent
$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)\|_{L_2(P)} = \|\mu^{M_1 \otimes M_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1 g_1, h_2 g_2)$.
Soit $g_1 \otimes g_2 \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$ et soit, pour $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h).$$

Pour suite des hypothèses et de la proposition II- 2 on a également :

$$\|\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1 g_1, h_2 g_2).$$

et pour $h = \alpha 1_A \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$
$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2 h) = \mu^{N_1 \otimes N_2}(h) = \alpha \mu^{N_1 \otimes N_2}(1_{A \times \Omega}) = \alpha\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) 1_{A \times \Omega})$
Par conséquent l'application qui à $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2) h)$

définit une mesure stochastique sur $( ]0,1]^2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$. D'où i) et ii) :

Soit pour i = 1, 2 $g_i = \sum_{k=1}^{r} g_{i,k}$ avec $g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathcal{K}(h_1, h_2)$

on a alors : $\forall (s,t) \in T_2$:

$$\left(\int_0^s g_1(u) h_1(u)\, d\beta_u \right) \left(\int_0^t g_2(u) h_2(u)\, d\beta_u \right)$$

$$= \sum_{k,k'} \left(\int_0^s g_{1,k}(u) h_1(u)\, d\beta_u \right) \left(\int_0^t g_{2,k'}(u) h_2(u)\, d\beta_u \right)$$

d'où la première assertion de iii).

Pour la seconde assertion de iii) il suffit de vérifier que pour i = 1, 2 et pour chaque t de] 0 , 1] la suite ($\int_0^t h_i(u) g_i^n(u)\, d\beta_u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_4(P)$ vers $\int_0^t h_i(u) g_i(u)\, d\beta_u$. Ce qui résulte immédiatement des hypothèses.

5 - Corollaire.

Sous les hypothèses de la proposition II - 4 on a : $\forall\, h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}(h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((h_1 \otimes h_2)\, h)$$

$$\mu^{M_1 \otimes M_2}((g_1 \otimes g_2)\, h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((h_1 g_1 \otimes h_2 g_2)\, h) = \mu^{\beta \otimes \beta}((g_1 \otimes g_2)(h_1 \otimes h_2)\, h).$$

6 - Proposition.

Soit h_1 et h_2 appartenant à $L_4(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$.

Soit M et V les processus tels que :

$$M(t) = \int_0^t h_1(s)\, d\beta_s, \quad V(t) = \int_0^t h_2(s)\, ds.$$

Alors :

i) Le processus $M \otimes V$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

ii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{H}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$

$$\| \mu^{M \otimes V}(h) \|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1, h_2)$$

où C est une constante et θ la fonction introduite dans l'énoncé de la proposition II - 2.

iii) Pour tout h appartenant à $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ on a :

$$\mu^{M \otimes V}(h) = \int_0^1 h_1(s) \left(\int_0^s h(s, u)\, h_2(u)\, du \right) d\beta_s + \int_0^1 h_2(s) \left(\int_0^s h(u, s)\, h_1(u)\, d\beta_u \right) ds.$$

Démonstration.

Cette démonstration diffère peu de celle de la proposition II - 2. La différence provient de la représentaiton de $\Delta_A(M \otimes V)$.

Soit $A =]\, a_1, b_1\,] \times]\, a_2, b_2\,] = A_1 \times A_2$ alors

$$\Delta_A(M\otimes V)=\int_0^1 h_1(s)\,1_{A_1}(s)\,(\int_0^s h_2(u)\,1_{A_2}(u)\,du)\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 h_2(s)\,1_{A_2}(s)\,(\int_0^s h_1(u)\,1_{A_1}(u)\,d\beta_u)\,ds.$$

Soit h un élément de $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ tel que :

$$h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,1_{A_i\times A_j}.$$

On introduit le même processus H_1 qu' en II - 2 et le processus H_2 :

$$H_2(s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\,1_{A_i}(s)\int_0^s 1_{A_j}(u)\,h_2(u)\,du=\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,du.$$

H_1 et H_2 appartiennent à $L_4(T\times\Omega\,,\mathcal{P}_1\,,\lambda\otimes P)$. Alors

$$\mu^{M\otimes V}(h)=\int_0^1 h_1(s)\,H_2(s)\,d\beta_s+\int_0^1 h_2(s)\,H_1(s)\,ds$$

et $\|\mu^{M\otimes V}(h)\|_{L_2(P)}\ \le\ C\ [\theta(h,h_1,h_2)-\|h\ (h_1\otimes h_2)\|_{L_2(\nu\otimes P)}]$

d'où la proposition.

7 - Remarques.

7 . 1 - En fait $M\otimes V$ définit une mesure stochastique sur une tribu prévisible plus grande que $\mathcal{P}_\Lambda$.

Soit pour $A=]a_1,b_1]\times]a_2,b_2]$ $\mathcal{G}_\Lambda^1(A)=\mathcal{F}_{a_1}$ et soit $\mathcal{P}_\Lambda^1$ la tribu prévisible engendrée par $\{A\times F\,,A\in\mathcal{A}_2\,,F\in\mathcal{G}_\Lambda^1(A)\}$.

Soit $h\in\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda^1)$. Alors, pour s fixé le processus $(h(u,s))_{u\in]0,1]}$ est $\mathcal{P}_1$ – mesurable et

$$H_1(s)=\int_0^s h(u,s)\,h_1(u)\,d\beta_u.$$

est bien défini

D'autre part le processus : $H_2(s)=\displaystyle\int_0^s h(s,u)\,h_2(u)\,du$ appartient à

$L_4 (T \times \Omega , \mathscr{P}_1 , \lambda \otimes P)$. On vérifie facilement que le résultat de la proposition II.6 reste valable si l'on remplace $\mathscr{P}_\Lambda$ par $\mathscr{P}^1_\Lambda$.

7 . 2 - On peut énoncer un corollaire analogue au corollaire II - 3.

8 - Proposition.

Soit h_1 et h_2 appartenant à $L_4 ( ]\,0,1\,] \times \Omega , \mathscr{P}_1 , \lambda \otimes P)$. Soit $\mathscr{K} (h_1 , h_2)$ et $\mathscr{K}^2 (h_1 , h_2)$ les espaces introduits en II - 4.

Soit M et V les processus tels que :

$$M(t) = \int_0^t h_1 (s)\, d\beta_s , \; V(t) = \int_0^t h_2 (s)\, ds.$$

Alors $\mu^{M \otimes V}$ admet une extension sur $\mathscr{K}^2 (h_1 , h_2)$ notée également $\mu^{M \otimes V}$, à valeurs dans $L_2 (P)$ et telle que :

i) Pour $g\,h \in \mathscr{K}^2 (h_1 , h_2)$:

$$\| \mu^{M \otimes V} (g\,h) \|_{L_2 (P)} \leq C\, \theta (h , g_1 h_1 , g_2 h_2)$$

ii) Pour $g = g_1 \otimes g_2$ appartenant à $\mathscr{K} (h_1 , h_2)$ l'application qui à $h \in \mathscr{K}^1_b (\mathscr{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{M \otimes V} (g\,h)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega , \mathscr{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2 (P)$ vérifiant :

$$\mu^{M \otimes V} (g\,h) = \mu^{N \otimes W} (h)$$

où N et W sont les processus tels que :

$$N(t) = \int_0^t g_1 (s)\, h_1 (s)\, d\beta_s , \; W(t) = \int_0^t g_2 (s)\, h_2 (s)\, ds.$$

iii) Pour h appartenant à $\mathscr{K}^1_b (\mathscr{P}_\Lambda)$ l'application qui à $g = g_1 \otimes g_2$ associe $\mu^{M \otimes V} (g\,h)$ est additive au sens suivant :

* si $g_i = \sum_{k=1}^{r} g_{i,k}$ avec $g_{1,k} \otimes g_{2,k'} \in \mathscr{K} (h_1 , h_2)$

alors $\mu^{M \otimes V} ((g_1 \otimes g_2)\, h) = \sum_{k\,k'} \mu^{M \otimes V} ((g_{1,k} \otimes g_{2,k'})\, h)$

et possède la propriété de convergence dominée suivante :

* Pour toute suite $(g^n_1 \otimes g^n_2)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{K} (h_1 , h_2)$ telle que : pour chaque i la suite $(g^n_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g_i en étant dominée par f_i et $f_1 \otimes f_2 \in \mathscr{K} (h_1 , h_2)$, la suite $\mu^{M \otimes V} ((g^n_1 \otimes g^n_2)\, h)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers

$\mu^{M\otimes V}((g_1 \otimes g_2)\,h)$ dans $L_2(P)$.

Démonstration.

Il suffit d'utiliser les mêmes arguments que dans la démonstration de II - 4.

9 - Corollaire.

Sous les hypothèses de la proposition II - 6 et en notant λ le processus tel que $\lambda(t) = \lambda(\,]0\,,t\,]\,)$ on a :

$\forall\ h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$\mu^{M\otimes V}(h) = \mu^{\beta\otimes\lambda}((h_1 \otimes h_2)\,h)$

$\mu^{M\otimes V}((g_1 \otimes g_2)\,h) = \mu^{\beta\otimes\lambda}((h_1 g_1 \otimes h_2 g_2)\,h) = \mu^{\beta\otimes\lambda}((g_1 \otimes g_2)(h_1 \otimes h_2)\,h)$.

10 - Remarque.

Soient M et V les processus introduits en II.6. Le processus $V \otimes M$ vérifie :

$\forall A \in \mathcal{A}_2 : A = A_1 \times A_2 \quad \Delta_A(V \otimes M) = \Delta_{A_2\times A_1}(M \otimes V)$.

Soit $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ et soit h^* tel que : $h^*(u\,,s) = h(s\,,u)$.

Alors $h^* \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ et : $\mu^{V\otimes M}(h) = \mu^{M\otimes V}(h^*)$.

Compte tenu du fait que $\theta(h\,,h_2,h_1) = \theta(h^*\,,\ h_1,h_2)$ $\mu^{V\otimes M}$ jouit des mêmes propriétés que $\mu^{M\otimes V}$ (pour la remarque 3-7-1 il faut considérer $\mathcal{G}_\Lambda^2(A) = \mathcal{F}_{a_2}$) et en particulier pour $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$

$$\mu^{V\otimes M}(h) = \int_0^1 h_1(s)\left(\int_0^s h(u\,,s)\,h_2(u)\,du\right)d\beta_s + \int_0^1 h_2(s)\left(\int_0^s h(s\,,u)\,h_1(u)\,d\beta_u\right)ds.$$

La proposition suivante est évidente.

11 - Proposition.

Soient h_1 et h_2 deux processus appartenant à

$L_4([0,1]\times\Omega\,,\mathbb{B}(T)\otimes\mathcal{F}\,,\lambda\otimes P)$.

Soit $(V_i)_{i=1,2}$ les processus tels que :

$$V_i(t) = \int_0^t h_i(s)\,ds.$$

Alors

i) Le processus $V_1 \otimes V_2$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega\,,\mathbb{B}(T_2)\otimes\mathcal{F})$ à valeurs dans $L_2(P)$.

ii) Pour tout $h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$:

$$\|\mu^{V_1 \otimes V_2}(h)\|_{L_2(P)} \leq C\theta(h, h_1, h_2)$$

iii) Pour tout $h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{P}_\Lambda)$

$$\mu^{V_1 \otimes V_2}(h) = \int_{[0,1]^2} h_1(u)\, h_2(s)\, h(u, s)\, du\, ds.$$

III - MESURES STOCHASTIQUES SUR $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ ENGENDREES PAR $\beta \otimes \beta$.

1 - Mesures stochastiques engendrées par un processus X

La notion de mesures stochastiques engendrées par un processus $X = (X_t)_{t \in [0,1]^d}$ a été introduite en [1] et [2], pour établir sous certaines hypothèses une formule de Itô.

Plus précisément :

Soit $T = [0,1]^d$ muni de l'ordre partiel :

$$s = (s_i)_{i=1 \dots d} \leq t = (t_i)_{i=1 \dots d} \Leftrightarrow \forall\, i = 1 \dots d \;\; s_i \leq t_i$$

on note] s, t] le pavé : $\prod_{i=1}^{d}]\, s_i, t_i\,]$.

Soit $\mathcal{P}$ une tribu prévisible sur $(T \times \Omega)$ et soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]^d}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs réelles tel que :

i) Les trajectoires de X sont continues

ii) $\forall\, t, \forall\, b \in T$: $t < b$, la tribu engendrée par $\{(X_s)\ s \leq t\}$ est une sous tribu de $\mathcal{G}(]t, b])$.

iii) $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$: $\forall\, k = 1 \dots m$ le processus X^k définit une mesure stochastique, notée μ^k, sur $(T \times \Omega, \mathcal{P})$ à valeurs dans $L_p(P)$.

iv) $\forall\, k = 1 \dots m$ le processus $(\sup_{s \leq t} |X_s|^{k-m})_{t \in [0,1]^d}$ est μ^k–intégrable.

Un processus X de ce type est appelé $L_p(P)$ semi-martingale d'ordre m. Il existe alors des mesures stochastiques $(\mu^{(k)})_{k=1 \dots m}$ sur $(T \times \Omega, \mathcal{P})$, à valeurs dans $L_p(P)$ et telles que, $\forall\, h \in \mathcal{H}_b(\mathcal{P})$:

1 - 1 $\mu^{(k)}(h) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r \mu^r(h X^{k-r})$

1 - 2 $\mu^k(h) = \sum_{r=1}^{k} C_k^r \mu^{(r)}(h X^{k-r})$

Les mesures stochastiques $(\mu^{(k)})_{k=1\,...\,m}$ sont appelées mesures stochastiques engendrées par X $(\mu^{(1)} = \mu^1 = \mu^X)$. Le processus $\beta \otimes \beta$ ne satisfait pas à la condition ii) quand $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\Lambda$ et ne satisfait pas à iii) quand $\mathcal{P} = \mathcal{P}_V$. Cependant les résultats établis en II vont permettre d'établir l'existence de mesures $(\mu^{(k)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que : $\mu^{(k)} = 0$ si $k \geq 5$ et vérifiant 1.1 et 1.2.

2 - Notations.

On note : $\mathscr{C}_p$ l'espace vectoriel des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues et dominées par un polynôme. On note $\mathscr{C}_{2,p}$ l'espace vectoriel des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C_2 et telles que : $\forall\, r \in \{0, 1, 2\}$ $\varphi^{(r)} \in \mathscr{C}_p$.
Par conséquent, si $\varphi \in \mathscr{C}_{2,p}$, $\forall\, r \in \{0,1,2\}$ le processus $\varphi^{(r)}(\beta)$ appartient à $L_4(T_1, \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$. D'autre part si $(\varphi_i)_{i=1,2}$ et $(\psi_i)_{i=1,2}$ appartiennent à $\mathscr{C}_p$, le processus $\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta)$ appartient à $\mathcal{K}(\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta))$.
Pour Φ fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on notera $\partial_{i,j}\Phi$ la dérivée partielle : $\dfrac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial x^i \partial y^j}$ quand elle existe.

3 - Propriété.

Soit $(X_k)_{k=1,2}$ des processus tels que :

$$\forall\, t \in [0,1]\, X_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\beta_s)\, d\beta_s \quad \text{ou} \quad \forall\, t \in [0,1]\, X_k(t) = \int_0^t \varphi_k(\beta_s)\, ds.$$

Le processus $X_1 \otimes X_2$ est de l'un des types considérés en II, pour $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ l'application de $\mathscr{C}_p \times \mathscr{C}_p$ dans $L_2(P)$ qui à (ψ_1, ψ_2) associe $\mu^{X_1 \otimes X_2}((\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta))\, h)$ est bilinéaire ; il existe alors une application linéaire unique L de $\mathscr{C}_p \underline{\otimes} \mathscr{C}_p$ (produit tensoriel algébrique) dans $L_2(P)$ telle que :
$L(\psi_1 \otimes \psi_2) = \mu^{X_1 \otimes X_2}(\psi_1(\beta) \otimes \psi_2(\beta)\, h)$. Par conséquent $\forall\, \Psi = \sum_{k=1}^{n} (\psi_{1,k} \otimes \psi_{2,k})$ on peut définir $\mu^{X_1 \otimes X_2}(\Psi(\beta, \beta)\, h)$ par : $\sum_{k=1}^{n} \mu^{X_1 \otimes X_2}((\psi_{1,k}(\beta) \otimes \psi_{2,k}(\beta))\, h)$ et l'application qui à $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)$ associe $\mu^{X_1 \otimes X_2}(\Psi(\beta, \beta)\, h)$ définit une mesure stochastique sur $(T_2 \times \Omega, \mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

4 - Proposition.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ où $\varphi_{i,k} \in \mathscr{C}_{2,p}$.

Alors le processus $\Phi(\beta, \beta)$ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

$\forall\, h \in \mathscr{H}_b^1(\mathscr{P}_\Lambda)$

$$\mu(h) = \mu^{\beta\otimes\beta}(h\, \partial_{11}\Phi(\beta, \beta)) + \frac{1}{2}[\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\, \partial_{12}\Phi(\beta, \beta)) + \mu^{\lambda\otimes\beta}(h\, \partial_{21}\Phi(\beta, \beta))]$$
$$+ \frac{1}{4}\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\, \partial_{22}\Phi(\beta, \beta)).$$

Démonstration.

La formule de Itô donne, pour i = 1, 2 et k = 1 ... n

$$\varphi_{i,k}(\beta_t) = \int_0^t \varphi'_{i,k}(\beta_s)\, d\beta_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''_{i,k}(\beta_s)\, ds$$

soit $M_{i,k}(t) = \int_0^t \varphi'_{i,k}(\beta_s)\, d\beta_s$, $V_{i,k}(t) = \int_0^t \varphi''_{i,k}(\beta_s)\, ds.$

Alors $\Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{1,k}(\beta) \otimes \varphi_{2,k}(\beta)$

$$= \sum_{k=1}^{n} [(M_{1,k} \otimes M_{2,k}) + \frac{1}{2}[(M_{1,k} \otimes V_{2,k}) + (V_{1,k} \otimes M_{2,k})] + \frac{1}{4}(V_{1,k} \otimes V_{2,k})]$$

les propositions II - 2, II- 6, II- 11 et la remarque II-10 impliquent que Φ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

Les corollaires II-5, II-9, la proposition II-11 et la remarque II-10 impliquent que

$\forall\, h \in \mathscr{H}_b^1(\mathscr{P}_\Lambda)$

$$\mu(h) = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\beta\otimes\beta}(h(\varphi'_{1,k}(\beta) \otimes \varphi'_{2,k}(\beta)))$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} [\mu^{\beta\otimes\lambda}(h(\varphi'_{1,k}(\beta) \otimes \varphi''_{2,k}(\beta))) + \mu^{\lambda\otimes\beta}(h(\varphi''_{1,k}(\beta) \otimes \varphi'_{2,k}(\beta)))]$$
$$+ \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\varphi''_{1,k}(\beta) \otimes \varphi''_{2,k}(\beta))).$$

La propriété III - 3 implique l'expression annoncée pour $\mu(h)$.

5 - <u>Théorème.</u>

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$ où $\varphi_{i,k} \in \mathscr{C}_{2,p}$.

Alors

5 - 1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ le processus $(\Phi(\beta, \beta))^n$ définit une mesure stochastique μ^n sur $(T_2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$.

5 - 2. On peut définir des mesures stochastiques $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ par la formule III - 1.1 et la formule III 1.2 reste valide.

5 - 3 On a $\mu^{(1)} = \mu^1$, $\mu^{(n)} = 0 \quad \forall\, n \geq 5$ et :

$\forall\, h \in \mathscr{H}_b^1(\mathscr{P}_\Lambda)$

$$\mu^{(2)}(h) = 2\,\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\partial_{1,0}\Phi(\beta,\beta)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta,\beta)) + \mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,[2\partial_{1,1}\Phi\,\partial_{0,1}\Phi + \partial_{1,0}\Phi\,\partial_{0,2}\Phi](\beta,\beta))$$
$$+ \mu^{\lambda\otimes\beta}(h\,[2\,\partial_{1,1}\Phi\,\partial_{1,0}\Phi + \partial_{0,1}\Phi\,\partial_{2,0}\Phi\,](\beta,\beta)) + \frac{1}{2}\,\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\,[2\,\partial_{0,1}\Phi\,\partial_{2,1}\Phi + 2\partial_{1,0}\Phi\,\partial_{1,2}\Phi$$
$$+ 2\,(\partial_{1,1}\Phi)^2 + \partial_{2,0}\Phi\,\partial_{0,2}\Phi\,](\beta,\beta)).$$

$$\mu^{(3)}(h) = 3\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,(\partial_{0,1}\Phi)^2\,\partial_{1,0}\Phi)(\beta,\beta)) + 3\mu^{\lambda\otimes\beta}(h\,(\partial_{1,0}\Phi)^2\partial_{0,1}\Phi)(\beta,\beta))$$
$$+ \frac{3}{2}\,\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\,[4\partial_{1,1}\Phi\,\partial_{0,1}\Phi\,\partial_{1,0}\Phi + (\partial_{0,1}\Phi)^2\,\partial_{2,0}\Phi + (\partial_{1,0}\Phi)^2\,\partial_{0,2}\Phi](\beta,\beta))$$
$$\mu^{(4)}(h) = 6\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\,[(\partial_{1,0}\Phi)^2\,(\partial_{0,1}\Phi)^2\,](\beta,\beta)).$$

En particulier si $\Phi(x, y) = xy$, $\Phi(\beta, \beta) = \beta \otimes \beta$

et $\mu^{(2)}(h) = 2\mu^{\beta\otimes\beta}(h(\beta\otimes\beta)) + 2\,\mu^{\beta\otimes\lambda}(h(\beta\otimes 1)) + 2\mu^{\lambda\otimes\beta}(h(1\otimes\beta))$
$+ \mu^{\lambda\otimes\lambda}(h)$.

$\mu^{(3)}(h) = 3\mu^{\beta\otimes\lambda}(h(\beta^2\otimes\beta)) + 3\mu^{\lambda\otimes\beta}(h(\beta\otimes\beta^2)) + 6\,\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\beta\otimes\beta))$

$\mu^{(4)}(h) = 6\,\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\beta^2\otimes\beta^2))$.

<u>Démonstration.</u>

Φ^n est du même type que Φ, 5 - 1 alors de la proposition III - 4. La propriété III - 3 et la définition de μ^n impliquent que :

$\forall\, p \in \mathbb{N}^*$ $\mu^n(h\,\Phi^p)$ est bien défini, que l'application qui à $h \in \mathscr{H}_b^1(\mathscr{P}_\Lambda)$ associe $\mu^n(h\,\Phi^p)$ définit une mesure stochastique et que :

$$\mu^n(h\,\Phi^p(\beta,\beta)) = \mu^{\beta\otimes\beta}(h\,(\Phi^p\,\partial_{1,1}\Phi^n)(\beta,\beta)) + \frac{1}{2}\,\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,(\Phi^p\,\partial_{1,2}\Phi^n)(\beta,\beta))$$

$$+\frac{1}{2}\mu^{\lambda\otimes\beta}(h(\Phi^p\partial_{2,1}\Phi^n)(\beta,\beta))+\frac{1}{4}\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\Phi^p\partial_{2,2}\Phi^n)(\beta,\beta)).$$

Par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on peut définir une mesure stochastique $\mu^{(k)}$ sur $(T_2\times\Omega,\mathcal{P}_\Lambda)$ telle que :

$$\forall h\in\mathcal{H}_b^1(\mathcal{P}_\Lambda)\qquad \mu^{(k)}(h)=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}C_k^n\mu^n(h\,\Phi^{k-n}(\beta,\beta)).$$

On vérifie facilement que la formule III - 1.2 reste valide.

Si $k=1$ on a évidemment $\mu^{(1)}=\mu^1$.

Pour $k\geq 2$

$$\begin{aligned}\mu^{(k)}(h)=&\,\mu^{\beta\otimes\beta}(h\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}C_k^n(\Phi^{k-n}\partial_{1,1}\Phi^n)(\beta,\beta))\\&+\frac{1}{2}\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}C_k^n(\Phi^{k-n}\partial_{1,2}\Phi^n)(\beta,\beta))\\&+\frac{1}{2}\mu^{\lambda\otimes\beta}(h\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}C_k^n(\Phi^{k-n}\partial_{2,1}\Phi^n)(\beta,\beta))\\&+\frac{1}{4}\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\sum_{n=1}^{k}(-1)^{k-n}C_k^n(\Phi^{k-n}\partial_{2,2}\Phi^n)(\beta,\beta))\end{aligned}$$

d'où, après simplification 5.3.

6 - Remarque

Soit $(N_k)_{k=1,2}$, deux semi martingales telles que :

$$N_k(t)=\int_0^t h_k(s)\,d\beta_s+\int_0^t g_k(s)\,ds$$

où h_k et g_k appartiennent à $L_p(T_1\times\Omega,\mathcal{P}_1,\lambda\otimes P)$, $(\forall p\geq 1)$.

Alors $\forall\varphi\in\mathcal{C}_p$, $\varphi(N_k)$, $\varphi(N_k)h_k$, $\varphi(N_k)g_k$ appartiennent à $L_4(T_1\times\Omega,\mathcal{P}_1,\lambda\otimes P)$.

Soit $\Phi=\sum_{k=1}^{n}\varphi_{1,k}\otimes\varphi_{2,k}$, $\varphi_{i,k}\in\mathcal{C}_{2,p}$.

En utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 4 et le théorème 5, on vérifie facilement que le processus $\Phi(N_1,N_2)$ définit une mesure stochastique μ sur $(T_2\times\Omega,\mathcal{P}_\Lambda)$ à valeurs dans $L_2(P)$, que 5 - 2 reste valide, que $\mu^{(n)}=0$ pour $n\geq 5$ et que $\mu^{(n)}$ pour $n=1,2,3,4$, s'exprime à l'aide des mesures $\mu^{\beta\otimes\beta}$, $\mu^{\beta\otimes\lambda}$, $\mu^{\lambda\otimes\beta}$, $\mu^{\lambda\otimes\lambda}$, ou des mesures $\mu^{N_1\otimes N_2}$, $\mu^{N_1\otimes\langle N_2\rangle}$, $\mu^{\langle N_1\rangle\otimes N_2}$

$\mu^{<N_1>\otimes<N_2>}$ $(<N_k>_t = \int_0^t h_k^2(s)\,ds)$ et dans ce cas l'expression de $\mu^{(n)}$ est

du type des expressions écrites en 5 - 3 en remplaçant $\beta \otimes \beta$ par $N_1 \otimes N_2$, $\beta \otimes \lambda$ par $N_1 \otimes <N_2>$, $\lambda \otimes \beta$ par $<N_1> \otimes N_2$, $\lambda \otimes \lambda$ par $<N_1> \otimes <N_2>$, (β , β) par (N_1 , N_2).

IV INTEGRALE DE SKOROHOD

Les références sont [7], [8], [9] , [12].

1 - Définitions et Notations.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,1]}, (\beta_t)_{t \in [0,1]}, P)$ un mouvement Brownien standard à valeurs réelles.

1.1 - Intégrale stochastique multiple.

Si $m \in \mathbb{N}^*$ on sait définir l'intégrale stochastique multiple de $f_m \in L_2([0,1]^m, \lambda^{\otimes m})$, cette intégrale notée $I_m(f_m)$ appartient à $L_2(\mathrm{P})$ et est égale à $m!\, J_m(f_m)$ où $J_m(f_m)$ est l'intégrale stochastique itérée de f_m sur $C_m = \{ t = (t_i)_{i=1 \dots m} : t_1 < t_2 < \dots < t_m < 1\}$.

Pour $m = 0$ I_0 est l'application identité de l'ensemble des fonctions constantes de $[0 , 1]$ dans $\mathbb{R}$. On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} I_m \text{ est linéaire} \\ E(I_m(f_m)\, I_n(g_n)) = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \\ m!\, <f_m , g_m>_{L_2(\lambda \otimes m)} \text{ si } m = n \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Si $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $X = \sum_m I_m(f_m)$ où $I_0(f_0) = f_0 = E(X)$ et on a :

$$\| X \|^2_{L_2(P)} = (E(X))^2 + \sum_{m \geq 1} m!\ \|f_m\|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m})}.$$

1.2 - Intégrale de Skorohod.

Soit $X = (X_t)_{t \in [0,1]}$ un processus appartenant à $L_2([0,1] \times \Omega , B([0,1]) \otimes \mathcal{F}, \lambda \otimes P)$. Alors il existe une famille de fonctions $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que :

i) $f_m \in L_2([0,1]^{m+1}, \lambda^{\otimes m+1})$

ii) $\forall\, t \in [0,1]$, $f_m(t_1 \dots t_m , t)$ est une fonction symétrique en $(t_1 \dots t_m)$

iii) $X_t = \sum_m I_m (f_m(.\,,t))$.

On note $\overset{o}{f}_m$ la symétrisée de f_m en tant que fonction de $m+1$ variables.

Si $\left(\sum_{m=0}^{n} (I_{m+1}(\overset{o}{f}_m))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ on définit $\delta(X)$: intégrale de

Skorohod de X par :

$$\delta(X) = \sum_{m \geq 0} I_{m+1}(\overset{o}{f}_m).$$

δ est linéaire, le domaine de δ est l'ensemble des processus X tels que :

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)!\, \| \overset{o}{f}_m \|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})} < +\infty ;$$

il contient en particulier l'ensemble des processus X tels que

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)!\, \|f_m\|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})} < +\infty$$

et l'espace $L_2(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$, de plus dans ce cas :

$$\delta(X) = \int_0^1 X_s \, d\beta_s.$$

1.3 - Opérateur de dérivation.

On note $\mathcal{D}_{2,1}$ l'espace vectoriel des éléments X de $L_2(P)$ tels que : $X = \sum_{m \geq 0} I_m(f_m)$ et $\sum_{m \geq 0} (m+1)!\, \|f_m\|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m})} < +\infty$.

Pour $X \in \mathcal{D}_{2,1}$ soit :

$$D_t X = \sum_{m \geq 1} m\, I_{m-1}(f_m(.,t))$$

on a :

$$E\left(\int_0^1 (D_t X)^2 \, dt\right) = \sum_{m \geq 1} m\, m!\, \|f_m\|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m})}$$

D est un opérateur de dérivation.

1.4 - Fonctionnelles "smooth".

Soit $\mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions Φ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}_\infty$ et telles que la croissance de Φ et de ses dérivées partielles soit au plus polynomiale. La $k^{\text{ième}}$ différentielle de Φ sera notée $D^k\,\Phi$. Une fonctionnelle smooth est une variable aléatoire de la forme :

$$\Phi\,(\beta_{t_1}, \ldots \beta_{t_n}) \text{ où } \Phi \in \mathscr{C}_{\infty,p}\,(\mathbb{R}^n).$$

La classe $\mathscr{S}$ des fonctionnelles "smooth" est contenue dans $L_2\,(P)$ et dans $\mathscr{D}_{2,1}$ et on a

$$D_t\,(\Phi\,(\beta_{t_1}, \ldots, \beta_{t_n})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\,\Phi\,(\beta_{t_1} \ldots \beta_{t_n})\,1_{[0,t_i]}(t).$$

Soit $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et Φ des éléments de $\mathscr{C}_{\infty,p}\,(\mathbb{R}^d)$ on dira que la suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers Φ dans $\mathscr{C}_{\infty,p}\,(\mathbb{R}^d)$ si $\forall\, k \in \mathbb{N}$ la suite $(D^k\,\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $D^k\,\Phi$.

2 - Propriétés.

On note $\mathscr{L}_2$ l'ensemble des processus X appartenant à $L_2\,([0,1] \times \Omega, \mathscr{B}\,([0,1]) \otimes \mathscr{F}, \lambda \otimes P)$ tels que :

- $X_t \in \mathscr{D}_{2,1}$ $\lambda p.p$
- il existe une version mesurable de $D_s X_t$ telle que

$$E\,\left(\int_{[0,1]^2} (D_s X_t)^2\,dsdt\right) < +\infty$$

$\mathscr{L}_2$ est un sous espace vectoriel du domaine de δ qui s'identifie à :

$$\{X \in L_2\,([0,1] \times \Omega, \mathscr{B}\,([0,1]) \otimes \mathscr{F}, \lambda \otimes P) : X_t = \sum_m I_m\,(f_m\,(.\,,t))$$

et on a la propriété :

$$\text{et } \sum_{m \geq 0} (m+1)!\,\|f_m\|^2_{L_2(\lambda^{\otimes m+1})} < +\infty\}$$

2.1 - si $X \in \mathscr{L}_2$ alors :

$$E\,((\delta\,(X))^2) = \int_0^1 E\,(X_t^2)\,dt + \int_{[0,1]^2} E\,(D_s X_t\, D_t X_s)\,dsdt.$$

Les propriétés suivantes seront utilisées par la suite

2.2 - Si X appartient au domaine de δ et Y appartient à $\mathcal{D}_{2.1}$ alors :

$$\delta(YX) = Y\delta(X) - \int_0^1 (D_t Y) X_t \, dt$$

en ce sens que YX appartiennent au domaine de δ si et seulement si le membre de droite de l'égalité appartient à $L_2(P)$.

2.3 - Si X appartient à $\mathcal{L}_2$ et f est $\mathbb{B}([0,1])$ – mesurable et bornée alors Xf appartient à $\mathcal{L}_2$ et $D_t[(Xf)(s)] = f(s) D_t X(s)$.

2.4 - Si X appartient à $\mathcal{L}_2$, alors pour tout $p \geq 2$ il existe une constante C_p telle que :

$$\|\delta(X)\|_p \leq C_p \left\{ \left[\int_0^1 [E(X_t)]^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \left\| \left(\int_{[0,1]^2} (D_s X_t)^2 ds dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p \right\}.$$

V UNE AUTRE REPRESENTATION DE PRODUITS DE MESURES STOCHASTIQUES.

Dans ce paragraphe, on donne une autre repésentation de certaines mesures du type $M_1 \otimes M_2$, $M \otimes V$ et $V \otimes M$ (notations du paragraphe II) en utilisant l'intégrale de Skorohod, ce qui introduit une restriction de l'ensemble des processus intégrables considérés en II, mais permet de définir $\mu^{\beta \otimes \beta}$ $(h \, \Phi(\beta, \beta))$ pour $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{B})$, $\Phi \in \mathcal{C}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$.

1 - <u>Lemme.</u>

Si $h \in \mathcal{K}_b^1(\mathcal{B})$ et $\Phi \in \mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$.

Alors

1.1 - $\forall \, s \in [0,1]$ le processus $(h(u,s)\, \Phi(\beta_u, \beta_s)\, 1_{]0,s]}(u))_{u \in]0,1]}$ appartient à $\mathcal{L}_2$.

1.2 - Le processus $(\delta(h(.\,,s)\,\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{]0,s]}(.)))_{s\in]0,1]}$ admet une modification appartenant à $L_2(T_1\times\Omega\,,\mathcal{P}_1,\lambda\otimes P)$.

__Démonstration.__

Soit $X(.\,,s)=(h(u,s)\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{]0,s]}(u))_{u\in]0,1]}$ h étant déterministe et borné $X(u,s)\in\mathcal{D}_{2,1}$.

$D_v X(u\,,s)=h(u\,,s)\,1_{]0,s]}(u)\,(\partial_{1,0}\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{[0,u]}(v)+\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,1_{[0,s]}(v))$

d'où 1.1.

Soit $h=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\,1_{A_i\times A_j}$ $A_i\,,A_j\in\mathcal{A}_1$, $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$.

δ étant linéaire on a :

$$\delta(X(.\,,s))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\,1_{A_j}(s)\;\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{A_i\cap]0,s]}(.)).$$

Pour prouver 1.2 il suffit alors de prouver que : si $A\in\mathcal{A}_1$ le processus $(\delta(\Phi(\beta\,,\beta_s)\,1_{A\cap]0,s]}(.)))_{s\in]0,1]}$ est adapté à $(\mathcal{F}_s)_{s\in[0,1]}$ et admet une modification continue.

L'adaptation est évidente. Pour montrer l'existence d'une modification continue on va prouver l'existence d'une constante K telle que :

$$E([\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_t)\,1_{A\cap]0,t]}(.))-\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{A\cap]0,s]}(.)]^4)\le K(t-s)^2.$$

Le critère de Kolmogorov permet alors de conclure. Soit $s<t$

$$\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_t)\,1_{A\cap]0,t]}(.))-\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{A\cap]0,s]}(.))$$
$$=\delta([\Phi(\beta_.\,,\beta_t)-\Phi(\beta_.\,,\beta_s)]\,1_{A\cap]0,t]}(.))+\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{A\cap]s,t]}(.)).$$

Les hypothèses faites sur Φ impliquent que :

$$E(\sup_{u,s}(\Phi(\beta_u\,,\beta_s))^{2p})<+\infty\qquad\forall p\ge 0$$
$$E(\sup_{u,v,s}|D_v\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s)|^{2p})<+\infty\qquad\forall p\ge 0$$

La propriété IV - 2.4 donne pour p = 4

$$E((\delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,1_{A\cap]s,t]}(.))^4)\le K_1\{(\int_0^1[E(\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{A\cap]s,t]}(u))]^2du)^2$$

$$+E(\int_{[0,1]^2}(D_v\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s))^2\,1_{A\cap]s,t]}(u)\;du\,dt)^2\}\le K'_1(t-s)^2.$$

Pour l'autre terme, on note que Φ appartenant à $\mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ il existe $q\in\mathbb{N}^*$ et une constante C

$$|\Phi(x,y)-\Phi(x\,,y_0)|\le C\,|y-y_0|\,(1+x^{2q}+y^{2q}+y_0^{2q}).$$

Par conséquent
$\left|\Phi(\beta_u,\beta_t)-\Phi(\beta_u,\beta_s)\right| \le C\,\left|\beta_t-\beta_s\right|(1+3\,\underset{v}{Sup}\,|\beta_v|^{2q})$

$\partial_{0,1}\Phi$ appartiennent également à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ d'où en appliquant la propriété IV - 2.4 avec p = 4.

$$E\,[\,(\delta\,(\,[\,\Phi(\beta_.,\beta_t)-\Phi(\beta_.,\beta_s)]\;1_{A\cap]0,t]}(.)))^4]$$

$$\le K_1\,\{\,(\,[\int_0^1 (E\,(\,[\,\Phi(\beta_u,\beta_t)-\Phi(\beta_u,\beta_s)\,]\,1_{A\cap]0,t]}(u)\,))^2\,du\,]^2$$

$$+E\,[\int_{[0,1]^2} (D_v\,(\Phi(\beta_u,\beta_t)-\Phi(\beta_u,\beta_s)))^2\,1_{A\cap]0,t]}(u)\,du\,dv\,]^2$$

$$\le K'_1\,\{\,(E\,[\,(\beta_t-\beta_s)^2\,(1+\underset{v}{Sup}\,(\beta_v)^{4q})\,]\,)^2$$

$$+E\,(\,[\int_{[0,1]^2} [\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_t)\,1_{[0,t]}(v)-\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,1_{[0,s]}(v)\,]^2\,du\,dt\,]^2)$$

$$\le K''_1\,(t-s)^2.$$

2 - Proposition.

Soit $\mathscr{K}=\{\Phi(\beta,\beta)=(\Phi(\beta_u,\beta_s))_{(u,s)\in T_2},\ \Phi\in\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)\}$

Soit $\mathscr{K}^2=\{\,h\,\Phi(\beta,\beta):h\in\mathscr{K}_b^1(B),\ \Phi(\beta,\beta)\in\mathscr{K}\,\}$.

Alors $\mu^{\beta\otimes\beta}$ admet une extension sur $\mathscr{K}^2$ notée également $\mu^{\beta\otimes\beta}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

2.1 - Pour $\Phi(\beta,\beta)=\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{1,k}\otimes\varphi_{2,k})(\beta,\beta)$, $\varphi_{ik}\in\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$, $h\in\mathscr{K}_b^1(\mathscr{B})$

$$\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s)\,(\int_0^s h\,(s,u)\,\varphi_{2,k}(\beta_u)\,d\beta_u)\,d\beta_s$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s)\,(\int_0^s h\,(u,s)\,\varphi_{1,k}(\beta_u)\,d\beta_u)\,d\beta_s$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{[0,1]^2} \varphi_{1,k}(\beta_u)\,\varphi_{2,k}(\beta_s)\,h\,(u,s)\,v\,(du,ds).$$

2 . 2 - Pour $h\,\Phi(\beta,\beta)\in\mathcal{H}^2$:

i) $\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))=\displaystyle\int_0^1 \delta\left([\Phi(\beta_{.},\beta_s)\,h(.,s)+\Phi(\beta_s,\beta_{.})\,h(s,.)]\,1_{]0,s]}(.)\right)d\beta_s$

$$+\int_0^1\left(\int_0^s \partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)+\partial_{1,0}\Phi(\beta_s,\beta_u)\,h(s,u)\,du\right)d\beta_s$$

$$+\int_{[0,1]^2}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,\nu(du,ds)$$

et

ii) $\|\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))\|_{L_2(P)}\le C\theta^*(\Phi,h)$

où C est une constante et :

$\theta^*(\Phi,h)=\|h\,\Phi(\beta,\beta)\|_{L_2(\lambda\otimes\lambda\otimes P)}+\|h\,\Phi(\beta,\beta)\|_{L_2(\nu\otimes P)}$
$\qquad+\|\,h\,\|D^1\Phi(\beta,\beta)\|_{\mathbb{R}^2}\|_{L_2(\lambda\otimes\lambda\otimes P)}.$

2 . 3 - Pour $\Phi(\beta,\beta)\in\mathcal{H}$ l'application qui à h appartenant à $\mathcal{H}_b^1(\mathcal{B})$ associe $\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))$ définit une mesure stochastique sur $(T_2\times\Omega,\mathcal{B})$ à valeurs dans $L_2(P)$ (c'est-à-dire une mesure vectorielle sur $(T_2,\mathcal{B}(T_2))$.

2 . 4 - Pour $h\in\mathcal{H}_b^1(B)$ l'application qui à $\Phi(\beta,\beta)$ associe $\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))$ est linéaire et vérifie la propriété suivante :

Pour toute suite $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers Φ dans $\mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\|D^1\Phi_n\|_{\mathbb{R}^2})_{n\in\mathbb{N}}$ étant dominées par un polynôme, la suite $(\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi_n(\beta,\beta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))$ dans $L_2(P)$.

Démonstration.

2 . 3 et 2 . 4 résultent immédiatement de la linéarité de δ et de μ^β ainsi que de 2 . 2 - ii).

Soit $\Phi(x,y)=\sum_{k=1}^{n}(\varphi_{1,k}\otimes\varphi_{2,k})(x,y)$, $\varphi_{i,k}\in\mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$

alors $\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\Phi(\beta,\beta))=\sum_{k=1}^{n}\mu^{\beta\otimes\beta}(h\,(\varphi_{1k}\otimes\varphi_{2k})(\beta,\beta))$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s)(\int_0^s h(s,u)\varphi_{2,k}(\beta_u)\, d\beta_u)\, d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s)(\int_0^s h(u,s)\varphi_{1,k}(\beta_u)\, d\beta_u)\, d\beta_s]$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{[0,1]^2} h(u,s)\varphi_{1,k}(\beta_u)\varphi_{2,k}(\beta_s)\, \nu(du,ds)$$

d'après II . 2, II . 5 et III . 3.

Or le processus $(h(s,u)\varphi_{2,k}(\beta_u)1_{]0,s]}(u))_{u\in]0,1]}$ appartient à $L_4(]0,1]\times\Omega, \mathcal{P}_1, \lambda\otimes P)$, par conséquent ce processus appartient au domaine de δ d'où :

$$\delta(h(s,.)\varphi_{2,k}(\beta_.)1_{]0,s]}(.)) = \int_0^1 h(s,u)\varphi_{2,k}(\beta_u)1_{]0,s]}(u)\, d\beta_u$$

appartient à $L_4(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$\varphi_{1,k}(\beta_s)$ appartient à $\mathcal{D}_{2,1}$ et $D_u\varphi_{1,k}(\beta_s) = \varphi'_{1,k}(\beta_s)1_{]0,s]}(u)$ or $\varphi_{1,k}(\beta_s)$ appartient à $L_4(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et

$$\int_0^1 E([[D_u\varphi_{1,k}(\beta_s)]\varphi_{2,k}(\beta_u)]^2)\, du < +\infty.$$

La propriété IV . 2 . 2 implique alors que :

le processus $(h(s,u)\varphi_{1,k}(\beta_s)\varphi_{2,k}(\beta_u)1_{]0,s]}(u))_{u\in]0,1]}$ appartient au domaine de δ et :

$$\varphi_{1,k}(\beta_s)\int_0^1 h(s,u)\varphi_{2,k}(\beta_u)1_{]0,s]}(u)\, d\beta_u$$

$$= \delta(h(s,.)(\varphi_{1,k}\otimes\varphi_{2,k})(\beta_s,\beta)1_{]0,s]}(.)) + \int_0^s (\varphi'_{1,k}\otimes\varphi_{2,k})(\beta_s,\beta_u)h(s,u)\, du$$

h et $\varphi_{1,k}\otimes\varphi_{2,k}$ satisfont aux hypothèses du lemme V . 1 par conséquent

$$\int_0^1 \delta\,(h\,(s,.\,)\,(\varphi_{1\,,\,k} \otimes \varphi_{2\,,\,k}\,)\,(\beta_s\,,\beta_.\,)\,1_{]\,0,\,s\,]}(.\,))\,d\beta_s$$

est bien définie et appartient à $L_2\,(P\,)$.

Le processus $(\int_0^s (\varphi'_{1\,,\,k} \otimes \varphi_{2,\,k}\,)\,(\beta_s\,,\beta_u\,)\,h\,(s\,,u\,)\,du\,)_{s\,\in\,]\,0,1\,]}$ appartient à $L_2\,(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P\,)$ par conséquent

$$\int_0^1 (\int_0^s (\varphi'_{1k} \otimes \varphi_{2k}\,)\,(\beta_s\,,\beta_u\,)\,h\,(s\,,u\,)\,du\,)\,d\beta_s$$

est bien définie et appartient à L_2 (P).

Le même raisonnement s'applique à :

$$\varphi_{2,\,k}\,(\beta_s\,) \int_0^1 h\,(s\,,u\,)\,\varphi_{1,\,k}\,(\beta_u\,)\,1_{]\,0,\,s\,]}\,(u\,)\,d\beta_u$$

d'où

$$\begin{aligned}\mu^{\beta\otimes\beta}\,(h\,\Phi\,(\beta\;\;,\beta\,)) = &\int_0^1 \delta\,([\Phi\,(\beta_.,\beta_s\,)\,h\,(.\,,s\,) + \Phi\,(\beta_s\,,\beta_.\,)\,h\,(s,.\,)\,]\,1_{]\,0\,,\,s\,]}(.\,)\,]\,d\beta_s \\ &+ \int_0^1 (\int_0^s (\partial_{0,\,1}\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s\,)\,h\,(u,s\,) + \partial_{1,\,0}\Phi\,(\beta_s\,,\beta_u\,)\,h\,(u,s\,))\,du\,)\,d\beta_s \\ &+ \int_{[\,0,\,1\,]^2} h\,(u\,,s\,)\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s\,)\,\nu\,(du\,,ds\,)\end{aligned}$$

d'où 2 . 2 - i) dans ce cas.

Si $h\,\Phi\,(\beta\,,\beta\,) \in \mathcal{H}^2$ d'après le lemme V . 1 le premier terme de 2 . 2 - i) a bien un sens. On vérifie facilement que le processus

$$(\int_0^s (\partial_{0,1}\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s\,)\,h\,(u,s\,) + \partial_{0,1}\Phi\,(\beta_s\,,\beta_u\,)\,h\,(s,u\,))\,du\,)_{s\,\in\,]\,0,1\,]}$$

appartient à $L_2\,(T_1 \times \Omega, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P\,)$ par conséquent le deuxième terme est bien défini également. Le troisième ne pose pas de problème.

Pour 2 . 2 - ii) on a :

$$E\left(\left[\int_0^1 \partial\left(\left[\Phi(\beta_. , \beta_s)\, h(.,s) + \Phi(\beta_s , \beta_.)\, h(s,.)\right] 1_{]0,s]}(.)\right) d\beta_s\right]^2\right)$$

$$= \int_0^1 E\left(\left(\delta\left(\left[\Phi(\beta_. , \beta_s)\, h(.,s) + \Phi(\beta_s , \beta_.)\, h(s,.)\right] 1_{]0,s]}(.)\right)\right)^2\right) ds.$$

Soit $X(.,s) = [\Phi(\beta_. , \beta_S)\, h(.,s) + \Phi(\beta_S , \beta_.)\, h(s,.)]\, 1_{]0,s]}(.)$.

La propriété IV - 2 . 1 et le lemme V - 1 impliquent que :

$$E\left((\delta(X(.,s)))^2\right) \le \int_0^1 E\left((X(u,s))^2\right) du + \int_{[0,1]^2} E\left((D_v X(u,s))^2\right) du\, dv$$

or

$$D_v X(u,s) = \left(\partial_{1,0}\Phi(\beta_u, \beta_s)\, 1_{[0,u]}(v) + \partial_{0,1}\Phi(\beta_u , \beta_s)\, 1_{[0,s]}(v)\right) h(u,s)\, 1_{]0,s]}(u)$$

$$+ \left(\partial_{1,0}\Phi(\beta_s , \beta_u)\, 1_{[0,s]}(v) + \partial_{0,1}\Phi(\beta_s , \beta_u)\, 1_{[0,u]}(v)\right) h(s,u)\, 1_{]0,s]}(u)$$

d'où

$$E\left(\left(\int_0^1 \delta(X(.,s))\, d\beta_s\right)^2\right) \le K\left\{\int_{[0,1]^2} E\left((\Phi(\beta_u , \beta_s)\, h(u,s))^2\right) du\, ds\right.$$

$$\left. + \int_{[0,1]^2} E\left[\left([\partial_{1,0}\Phi(\beta_u , \beta_s)]^2 + [\partial_{0,1}\Phi(\beta_u , \beta_s)]^2\right)(h(u,s))^2\right] du\, ds\right\}$$

on a également :

$$E\left(\left(\int_0^1 \left(\int_0^s [\partial_{0,1}\Phi(\beta_u , \beta_s)\, h(u,s) + \partial_{1,0}\Phi(\beta_s , \beta_u)\, h(s,u)]\, du\right) d\beta_s\right)^2\right)$$

$$= \int_0^1 E\left(\left(\int_0^s [\partial_{0,1}\Phi(\beta_u , \beta_s)\, h(u,s) + \partial_{1,0}\Phi(\beta_s , \beta_u)\, h(s,u)\, du\right)^2\right) ds$$

$$\le K' \int_{[0,1]^2} E\left(\left([\partial_{0,1}\Phi(\beta_u, \beta_s)]^2 + [\partial_{1,0}\Phi(\beta_u , \beta_s)]^2\right)(h(u,s))^2\right) du\, ds$$

d'où 2.2 - ii).

3 - Proposition.

$\mu^{\beta \otimes \lambda}$ admet une extension sur $\mathcal{H}^2$ notée également $\mu^{\beta \otimes \lambda}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

3 - 1 Pour $\Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta, \beta)$, $\varphi_{i,k} \in C_{\infty,p}(\mathbb{R})$ $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{B})$

$$\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,\Phi(\beta\,,\beta)) = \sum_k \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s)\left(\int_0^s h(s\,,u)\,\varphi_{2,k}(\beta_u)\,du\right)d\beta_s$$
$$+\sum_k \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s)\left(\int_0^s h(u,s)\,\varphi_{1,k}(\beta_u)\,d\beta_u\right)ds.$$

3 - 2 Pour $h\,\Phi(\beta\,,\beta) \in \mathcal{H}^2$:

i) $$\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,\Phi(\beta\,,\beta)) = \int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s\,,\beta_u)\,h(s,u)\,du\right)d\beta_s$$

$$+\int_0^1 \delta(\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,h(.\,,s)\,1_{]0\,,s\,]}(.))\,ds + \int_0^1\left(\int_0^s \partial_{0,1}\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,h(u\,,s)\,du\right)ds$$

ii) $$\|\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,\Phi(\beta\,,\beta))\|_{L_2(P)} \leq C\,[\theta^*(\Phi, h) - \|h\,\Phi(\beta, \beta)\|_{L_2(\nu\otimes P)}]$$

3 - 3 $\mu^{\beta\otimes\lambda}$ jouit des propriétés 2.3 et 2.4.

Démonstration.

Les arguments utilisés sont les mêmes que pour la proposition V - 2.
3 - 3 résulte immédiatement de 3 - 2.

Si $\Phi \in \mathcal{H}$ et $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{B})$ le processus $\left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u)\,h(s\,,u)\,du\right)_{s\,\in\,]0,1\,]}$ appartient à

$L_2(T_1 \times \Omega\,, \mathcal{P}_1, \lambda \otimes P)$, par conséquent $\int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u)\,h(s,u)\,du\right)d\beta_s$ est bien définie et $E((\int_0^1 (\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s, u) du) d\beta_s)^2)$

$$= \int_0^1 E((\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s,u) du)^2) ds \leq \int_{[0,1]^2} E((\Phi(\beta_s, \beta_u) h(s,u))^2) du\, ds.$$

De plus si $\Phi = \sum_{k=1}^n \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k}$

$$\int_0^1 (\int_0^s \Phi(\beta_s, \beta_u) h(s,u) du) d\beta_u = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s) (\int_0^s \varphi_{2,k}(\beta_u) h(s,u) du) d\beta_s.$$

Les mêmes arguments que dans la proposition précédentes permettent d'affirmer que :

$\forall\, h\, \Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{H}^2$

$\int_0^1 \delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(., s) 1_{]u, s]}(.)) ds$ est bien définie et :

$$E([\int_0^1 \delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(., s) 1_{]0, s]}.) ds]^2) \leq \int_0^1 E([\delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(., s) 1_{]0, s]}.]^2) ds$$
$$\leq K\, \theta^*(\Phi, h).$$

De plus si $\Phi_k = \varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k} \qquad \varphi_{ik} \in \mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$

$$\int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s) (\int_0^s h(u,s) \varphi_{1,k}(\beta_u) d\beta_u) ds = \int_0^1 \delta(\Phi_k(\beta_., \beta_s) h(., s) 1_{]0, s]}(.)) ds$$
$$+ \int_0^1 (\int_0^s \partial_{0,1} \Phi_k(\beta_u, \beta_s) h(u,s) du) ds.$$

Enfin

$$E([\int_0^1 (\int_0^s \partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u,s) du) ds]^2 \leq \int_{[0,1]^2} E((\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s) h(u,s))^2) du\, ds$$

d'où 3.1 et 3.2.
On a évidemment une proposition analogue pour $\mu^{\lambda \otimes \beta}$.

4 - Corollaire.

$\mu^{\lambda \otimes \beta}$ admet une extension sur $\mathcal{H}^2$ notée également $\mu^{\lambda \otimes \beta}$, à valeurs dans $L_2(P)$ et telle que :

4 - 1 Pour $\Phi(\beta, \beta) = \sum_{k=1}^{n} (\varphi_{1,k} \otimes \varphi_{2,k})(\beta, \beta)$ $\varphi_{i,k} \in \mathcal{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$, et $h \in \mathcal{H}_b^1(\mathcal{B})$

$$\mu^{\lambda \otimes \beta}(h\Phi(\beta, \beta)) = \sum_k \int_0^1 \varphi_{1,k}(\beta_s)\left(\int_0^s \varphi_{2,k}(\beta_u)\, h(s,u)\, d\beta_u\right) ds$$
$$+ \sum_k \int_0^1 \varphi_{2,k}(\beta_s)\left(\int_0^s \varphi_{1,k}(\beta_u)\, h(u,s)\, du\right) d\beta_s.$$

4 - 2 Pour $h\,\Phi(\beta, \beta) \in \mathcal{H}^2$:

i) $$\mu^{\lambda \otimes \beta}(h\,\Phi(\beta, \beta)) = \int_0^1 \left(\int_0^s \Phi(\beta_u, \beta_s)\, h(u,s)\, du\right) d\beta_s$$
$$+ \int_0^1 \delta\left(\Phi(\beta_s, \beta_.)\, h(s, .)\, 1_{]0,s]}(.)\right) ds + \int_0^1 \int_0^s \partial_{1,0}\Phi(\beta_s, \beta_u)\, h(s,u)\, du\, ds.$$

ii) $\|\mu^{\lambda \otimes \beta}(h\Phi(\beta, \beta))\|_{L_2(P)} \leq C\, \theta^*(\Phi, h)$

4 - 3 $\mu^{\lambda \otimes \beta}$ jouit des propriétés 2.3 et 2.4.

Remarque.

On a prouvé que si $\Phi \in \mathcal{C}_{\infty, p}(\mathbb{R}^2)$ alors les processus $(\mu^{\beta \otimes \beta}(1_{]0,a] \times]0,b]}\, \Phi(\beta_., \beta_.)))_{(a,b) \in T_2}$, $\mu^{\beta \otimes \lambda}(1_{]0,a] \times]0,b]}\, \Phi(\beta_., \beta_.))_{(a,b) \in T_2}$ et $\mu^{\lambda \otimes \beta}(1_{]0,a] \times]0,b]}\, \Phi(\beta_., \beta_.))_{(a,b) \in T_2}$ définissent une mesure vectorielle sur $(T_2, \mathcal{B}(T_2))$. Les propositions 5 et 7 suivantes montrent que l'on peut définir l'intégrale stochastique de certains processus par rapport à ces processus.

5 - Proposition.

Soient ψ et Φ appartenant à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de $]0,1]$ dont le pas tend vers zéro et telles que
$\tau_n = \{A_i^n =]a_i^n, a_{i+1}^n], i = 0, \dots i(n)\}$.

Soit $\psi^n(u,s) = \sum_i \sum_j \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{A_i^n \times A_j^n}(u,s)$, soit $h = 1_A$, $A \in \mathscr{A}_2$; et soit
$\mu(\psi^n h) = \sum_{ij} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \mu^{\beta \otimes \beta}(1_{A_i^n \times A_j^n} h \Phi(\beta, \beta))$.
Alors la suite $(\mu(\psi^n h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers
$\mu^{\beta \otimes \beta}(\psi(\beta, \beta) \Phi(\beta, \beta) h)$.

6 - Remarques.

6 - 1 La proposition V - 5 prouve que l'intégrale stochastique $\mu^{\beta \otimes \beta}$ $(h \Phi(\beta, \beta))$ est l'extension naturelle au sens de Itô de l'intégrale stochastique définie sur
$L_2(T_2 \times \Omega, \mathscr{P}_\Lambda, \lambda \otimes \lambda \otimes P)$.

6 - 2 La proposition V - 5 prouve également que cette intégrale stochastique possède la propriété d'itération.

Démonstration de la proposition.

On note que :

$$1_{A_i^n \times A_j^n}(u,s) \quad 1_{]0,s]}(u) = \begin{cases} 1_{A_i^n \times A_j^n}(u,s) & si\ i<j \\ 0 & si\ i>j \end{cases}$$

et qu' il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que : $|\psi^n(u,s)| \le C(1 + \operatorname{Sup}_v |\beta_v|^{2q})$.

On a :

$$\mu(\psi^n h) = \sum_i \sum_j \psi(\beta_{a_j^n}, \beta_{a_j^n}) [\int_0^1 1_{A_j^n}(s) \delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) 1_{]0,s]}(.)) d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 1_{A_i^n}(s) \delta(\Phi(\beta_s, \beta) h(s,.) 1_{A_j^n}(.) 1_{]0,s]}(.)) d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 1_{A_j^n}(s) (\int_0^s \partial_{0,1}\Phi(\beta_u, \beta_s) h(u,s) 1_{A_i^n}(u) du) d\beta_s$$

$$+\int_0^1 1_{A_i^n}(s)\left(\int_0^s \partial_{1,0}\Phi(\beta_s,\beta_u)\,h(s,u)\,1_{A_j^n}(u)\,du\right)d\beta_s\,]$$

$$+\int_{[0,1]^2} h(u,s)\,\psi^n(u,s)\,\Phi(\beta_u,\beta_s)\,\nu(du,ds).$$

Le dernier terme ne pose pas de problème.
Pour les autres termes, en raison de la symétrie il suffit d'en examiner deux :

$$\begin{cases} A_1^n = \sum_j \sum_{i\le j} \psi(\beta_{a_i^n},\beta_{a_j^n}) \int_0^1 1_{A_j^n}(s)\,\delta(\Phi(\beta_.,\beta_s)\,h(.,s)\,1_{A_i^n}(.)\,1_{]0,s]}(.))\,d\beta_s \\ A_2^n = \sum_j \sum_{i\le j} \psi(\beta_{a_i^n},\beta_{a_j^n}) \int_0^1 1_{A_j^n}(s)\left(\int_0^s \partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,1_{A_i^n}(u)\,du\right)d\beta_s \\ \quad = \int_0^1 \int_0^s (\psi^n(u,s)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du)\,d\beta_s. \end{cases}$$

On a :

$$E\left(\left(A_2^n - \int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_u,\beta_s)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\right)d\beta_s\right)^2\right)$$

$$=\int_0^1 E\left(\left[\int_0^s [\psi^n(u,s)-\psi(\beta_u,\beta_s)]\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\right]^2\right)ds$$

$$\le \int_{[0,1]^2} E\left([\psi^n(u,s)-\psi(\beta_u,\beta_s)]^2\,(\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s))^2\right)du\,ds$$

par conséquent $(A_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers

$$\int_0^1 \left(\int_0^s \psi(\beta_u,\beta_s)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\right)d\beta_s.$$

Pour A_1^n

$$A_1^n = \int_0^1 \sum_j \sum_{i \le j} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{A_j^n}(s)\, \delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) 1_{]0,s]}(.))\, d\beta_s$$

or $\psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \in \mathscr{D}_{2,1}$ et :

$$D_v \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) = \partial_{1,0} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{[0, a_i^n]}(v) + \partial_{0,1} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{[0, a_j^n]}(v).$$

La propriété IV -2 - 4 implique pour p = 4 :

$$E((\delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) 1_{]0,s]}(.))^4) \le C_4 \int_0^1 E((\Phi(\beta_u, \beta_s) h(u,s) 1_{A_i^n}(u))^4)\, du$$

$$+ \int_0^1 E([(\partial_{1,0} \Phi(\beta_u, \beta_s))^4 + (\partial_{0,1} \Phi(\beta_u, \beta_s))^4](h(u,s))^4 1_{A_i^n \cap]0,s]}(u)]\, du.$$

De plus $\psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \in L_4(P)$, $D_v \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \in L_4(\lambda \otimes P)$
et $\Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) \in L_4(\lambda \otimes P)$.

La propriété IV - 2 - 2 implique alors que :

$$\begin{aligned}
\psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n})\, \delta(\Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) 1_{]0,s]}(.))
&= \delta(\psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) \Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{A_i^n}(.) 1_{]0,s]}(.)) \\
&+ \int_0^1 \partial_{0,1} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{[0, a_j^n]}(v) 1_{A_i^n}(v) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v,s)\, 1_{]0,s]}(.))\, dv
\end{aligned}$$

d'où $A_1^n = \int_0^1 \delta(\psi^n(.,s) \Phi(\beta_., \beta_s) h(.,s) 1_{]0,s]}(.))\, d\beta_s$

$$+ \int_0^1 \left(\int_0^s \sum_{i<j} \partial_{0,1} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{A_i^n}(v) 1_{A_j^n}(s) \Phi(\beta_v, \beta_s) h(v,s)\, dv \right) d\beta_s$$

on vérifie facilement que les processus intégrés sont bien $\mathscr{P}_1$ – mesurables.
Soit, $\Gamma^n(v,s) = \sum_{i \ne j} \partial_{0,1} \psi(\beta_{a_i^n}, \beta_{a_j^n}) 1_{A_i^n \times A_j^n}(v,s)$ la suite $(\Gamma^n(v,s))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\partial_{0,1} \psi(\beta_v, \beta_s)$ sur l'ensemble : $\{(v, s, \omega) : v \ne s\}$ et il existe $C \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que :

$$|\Gamma^n(v,s)| \le C(1 + \sup_v |\beta_v|^{2q}).$$

$$\text{Alors } A_1^n = \int_0^1 \delta\,(\psi^n(.\,,s)\,\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,h(.\,,s)\,1_{]0,s]}(.))\,d\beta_s$$

$$+ \int_0^1 (\int_0^s \Gamma^n(v,s)\,\Phi(\beta_v\,,\beta_s)\,h(v\,,s)\,dv\,)\,d\beta_s.$$

Les propriétés de Γ^n impliquent que la suite

$$\int_0^1 (\int_0^s \Gamma^n(v,s)\,\Phi(\beta_v\,,\beta_s)\,h(v\,,s)\,dv\,)\,d\beta_s)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge dans $L_2(P)$ vers $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^s \partial_{0,1}\psi(\beta_v\,,\beta_s)\Phi(\beta_v\,,\beta_s)\,h(v,s)\,dv\,)\,d\beta_s$.

Pour l'autre terme $\psi^n(.\,,s)\,\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,h(\,.\,,s)\,1_{]0,s]}(.)$ appartient à $\mathcal{L}_2$ alors

(IV - 2 - 1)

$$E\,(\delta\,((\psi^n(.\,,s) - \psi\,(\beta_.\,,\beta_s)\,)\Phi\,(\beta_.\,,\beta_s)\,h\,(\theta,s)\,1_{]0,s]}(.)))^2\,)$$

$$\leq \int_0^1 E\,((\psi^n(u\,,s) - \psi\,(\beta_u\,,\beta_s))^2\,(\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,h\,(u,s))^2\,)\,du$$

$$+ \int_{[0,1]^2} E\,[\,[\,D_v\,((\psi^n(u,s) - \psi\,(\beta_u\,,\beta_s))\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s))\,h\,(u,s\,)\,1_{]0,s]}(u\,)\,]^2\,]\,du\,dv$$

et on a $D_v\,[\,(\,\psi^n(u,s) - \psi\,(\beta_u\,,\beta_s))\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,]$

$$= \sum_{i\,j} 1_{A_i^n\times A_j^n}(u,s)\,[\partial_{1,0}\,\psi\,(\beta_{a_i^n}\,,\beta_{a_j^n})\,1_{[0,\,a_i^n]}(v\,) + \partial_{0,1}\,\psi\,(\beta_{a_i^n}\,,\beta_{a_j^n})\,1_{[0,a_j^n]}\,]\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)$$

$$-\,(\partial_{1,0}\,\psi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{[0,u]}(v) + \partial_{0,1}\,\psi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{[0,s]}(v\,)\,)\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)$$

$$+\,(\psi^n(u\,,s) - \psi\,(\beta_u\,,\beta_s))\,[\partial_{1,0}\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{[0,u]}(v\,) + \partial_{0,1}\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,1_{[0,s]}(v\,))$$

d'où on déduit que la suite :

$(\displaystyle\int_0^1 \delta\,(\psi^n(.\,,s)\,\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,h\,(.\,,s)\,1_{]0,s]}(.\,)\,)\,d\beta_s\,)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers

$$\int_0^1 \delta\,(\psi\,(.\,,s)\,\Phi(\beta_.\,,\beta_s)\,h\,(.\,,s)\,1_{]0,s]}(.\,)\,)\,d\beta_s\,).$$

Par conséquent la suite $(\mu\,(\psi^n h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers :

$$\int_0^1 \delta\,(\psi\,(\beta_{.}\,,\beta_s)\,\Phi(\beta_{.}\,,\beta_s)\,h\,(.\,,s)\,1_{]0,s]}(.))\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 \delta\,(\psi\,(\beta_s\,,\beta_{.}\,)\,\Phi(\beta_s\,,\beta_{.}\,)\,h\,(s,.\,)\,1_{]0,s]}(.))\,d\beta_s\ ,$$

$$+\int_0^1 (\int_0^s (\,\partial_{0,1}\,\psi\,(\beta_u\,,\beta_s))\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,h\,(u\,,s)\,du\,)\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 (\int_0^s \psi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,\partial_{0,1}\,\Phi(\beta_u\,,\beta_s)\,h\,(u\,,s)\,du\,)\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 (\int_0^s (\partial_{1,0}\,\psi\,(\beta_s\,,\beta_u))\,\Phi(\beta_s\,,\beta_u)\,h\,(s\,,u)\,du\ \ d\beta_s$$

$$+\int_0^1 (\int_0^s \psi\,(\beta_s\,,\beta_u)\,\partial_{1,0}\,\Phi(\beta_s\,,\beta_u)\,h\,(u\,,s)\,du\,)\,d\beta_s$$

$$+\int_{[0,1]^2} \psi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,\Phi\,(\beta_u\,,\beta_s)\,h\,(u,s)\,\nu\,(du\,,ds) = \mu^{\beta\otimes\beta}((\psi\,\Phi)\,(\beta\,,\beta)\,h\,).$$

7 - <u>Proposition.</u>

Sous les mêmes hypothèses que pour la proposition 5.

Soit $\mu\,(h\,\psi^n) = \sum_i \sum_j \psi\,(\beta_{a_i^n}\,,\beta_{a_j^n})\,\mu^{\beta\otimes\lambda}\,(1_{A_i^n\times A_j^n}\Phi\,(\beta\,,\beta)\,h\,).$

Alors la suite $(\mu\,(h\,\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers $\mu^{\beta\otimes\lambda}\,(\psi\,(\beta\,,\beta\,)\Phi(\beta\,,\beta\,)$ $h)$.

On a un résultat analogue pour $\mu^{\lambda\otimes\beta}$.

<u>**Démonstration.**</u>

$$\mu\,(h\,\psi^n) = \sum_i \sum_{j\le i} \psi\,(\beta_{a_i^n}\,,\beta_{a_j^n})\int_0^1 1_{A_i^n}(s)\,(\int_0^s \Phi(\beta_s\,,\beta_u)h\,(s,u)\,1_{A_j^n}(u)\,du\,)\,d\beta_s$$

$$+\sum_j \sum_{i\le j} \psi\,(\beta_{a_i^n}\,,\beta_{a_j^n})\int_0^1 1_{A_j^n}(s)\,\delta(\Phi(\beta_{.}\,,\beta_s)\,h\,(.\,,s)\,1_{A_i^n}(.)\,1_{]0,s]}(.))\,ds$$

$$+\int_0^1\int_0^s \psi^n(u,s)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\,ds.$$

Le premier terme s'écrit aussi :

$$\int_0^1 \Big(\int_0^s \psi^n(s,u)\,\Phi(\beta_s,\beta_u)\,h(s,u)\,du\Big)\,d\beta_s.$$

Le deuxième terme :

$$\int_0^1 \sum_j \sum_{i\le j} \psi(\beta_{a_i^n},\beta_{a_j^n})\,1_{A_j^n}(s)\,\delta(\Phi(\beta_.,\beta_s)\,h(.,s)\,1_{A_i^n}(.)\,1_{]0,s]}(.))\,ds$$

$$=\int_0^1 \delta(\psi_n(.,s)\,\Phi(\beta_.,\beta_s)\,h(.,s)\,1_{]0,s]}(.))\,ds$$

$$+\int_0^1 \Big(\int_0^s \Gamma^n(u,s)\,\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\Big)\,ds.$$

En utilisant les mêmes arguments que pour la démonstration de la proposition V - 5 on prouve que la suite $(\mu(\psi^n h))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L_2(P)$ vers :

$$\int_0^1 \Big(\int_0^s \psi(\beta_s,\beta_u)\,\Phi(\beta_s,\beta_u)\,h(s,u)\,du\Big)\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 \delta(\psi(\beta_.,\beta_s)\,\Phi(\beta_.,\beta_s)\,h(.,s)\,1_{]0,s]}(.))\,ds$$

$$+\int_0^1\int_0^s (\partial_{0,1}\psi(\beta_u,\beta_s))\,\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\,ds$$

$$+\int_0^1\int_0^s \psi(\beta_u,\beta_s)\,\partial_{0,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,h(u,s)\,du\,ds=\mu^{\beta\otimes\lambda}((\psi\,\Phi)(\beta,\beta)\,h).$$

VI - MESURES VECTORIELLES ENGENDREES PAR DES FONCTIONNELLES D'ORDRE 2 DU BROWNIEN

1 - Théorème.

Soit Φ appartenant à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$.
Alors le processus $\Phi(\beta, \beta) = (\Phi(\beta_u, \beta_s))_{(u,s) \in T_2}$ définit sur $\mathscr{B}(T_2)$ une mesure vectorielle notée μ^Φ, à valeurs dans $L_2(P)$ telle que :

1 - 1 - $\forall A \in \mathscr{A}_2 \ \mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$.

1 - 2 - $\forall h \in \mathscr{H}_b^1(B)$

$$\mu^\Phi(h) = \mu^{\beta\otimes\beta}(h\,\partial_{1,1}\Phi(\beta, \beta))$$
$$+ \frac{1}{2}[\mu^{\beta\otimes\lambda}(h\,\partial_{1,2}\Phi(\beta, \beta)) + \mu^{\lambda\otimes\beta}(h\,\partial_{2,1}\Phi(\beta, \beta))] + \frac{1}{4}\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h\,\partial_{2,2}\Phi(\beta, \beta)).$$

1 - 3 - $\|\mu^\Phi(h)\|_{L_2(P)} \leq C\,\theta^{**}(\Phi, h)$ où C est une constante et

$$\theta^{**}(\Phi, h) = \|\, h \,\|\, D^2\Phi(\beta, \beta)\|\,\|_{L_2(\lambda\otimes\lambda\otimes P)} + \|\, h \,\|\, D^3\Phi(\beta, \beta)\,\|\,\|_{L_2(\lambda\otimes\lambda\otimes P)}$$
$$+ \|\, h \,\|\, D^4\Phi(\beta, \beta)\,\|\,\|_{L_2(\lambda\otimes\lambda\otimes P)} + \|\, h\,\partial_{1,1}\Phi(\beta, \beta)\,\|_{L_2(\nu\otimes P)}.$$

Démonstration.

Soit $\Phi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{1k} \otimes \varphi_{2k}$, la proposition III - 4 implique que Φ définit une mesure vectorielle μ^Φ sur $(T_2, \mathscr{B}(T_2))$ telle que $\mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$ et que $\mu^\Phi(h)$ admet la représentation donnée en 1 - 2.

Si Φ appartient à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, les dérivées partielles de tous ordres de Φ appartiennent également à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, le membre de droite de 1 - 2 est donc bien défini d'après V - 2, V - 3 et V - 4 et sa norme dans $L_2(P)$ admet la majoration donnée en 1 - 3.

Pour prouver que $\mu^\Phi(1_A)$ donné par 1 - 2 est égal à $\Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$, il suffit de remarquer que : $\forall \Phi \in \mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ il existe une suite $(\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ telle que

$$\Phi_n = \sum_{k=1}^{k(n)} \varphi_{1,k}^n \otimes \varphi_{2,k}^n, \ \varphi_{i,k}^n \in \mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ la suite } (\partial_{i,j}\Phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge simplement vers $\partial_{i,j}\Phi$ en étant dominée par un polynôme.

La majoration 1 - 3 implique alors que la suite $(\mu^{\Phi_n}(h))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mu^\Phi(h)$ dans $L_2(P)$ mais $\mu^{\Phi_n}(1_A) = \Delta_A(\Phi_n(\beta, \beta))$, par conséquent $\mu^\Phi(1_A) = \Delta_A(\Phi(\beta, \beta))$.

2 - Corollaire.

Soit Φ appartenant à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, alors : $\forall A \in \mathscr{A}_2$

$$\Delta_A \Phi(\beta,\beta) = \int_0^1 \delta([1_A(.,s)\partial_{1,1}\Phi(\beta_.,\beta_s) + 1_A(s,.)\partial_{1,1}\Phi(\beta_s,\beta_.)]1_{]0,s]}(.))\,d\beta_s$$

$$+\int_0^1 [\int_0^s \partial_{1,2}\Phi(\beta_u,\beta_s)1_A(u,s) + \partial_{2,1}\Phi(\beta_s,\beta_u)1_A(s,u)\,du]\,d\beta_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 [\int_0^s \partial_{1,2}\Phi(\beta_s,\beta_u)1_A(s,u) + \partial_{2,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)1_A(u,s)\,du]\,d\beta_s$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \delta([1_A(.,s)\partial_{1,2}\Phi(\beta_.,\beta_s) + 1_A(s,.)\partial_{2,1}\Phi(\beta_s,\beta_.)]1_{]0,s]}(.))\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^s [1_A(u,s)\partial_{1,3}\Phi(\beta_u,\beta_s) + 1_A(s,u)\partial_{3,1}\Phi(\beta_s,\beta_u)]\,du\,ds$$

$$+\frac{1}{4}\int_{[0,1]^2} 1_A(u,s)\partial_{2,2}\Phi(\beta_u,\beta_s)\,du\,ds + \int_{[0,1]^2} \partial_{1,1}\Phi(\beta_u,\beta_s)1_A(u,s)\,\nu(du,ds).$$

3 - Théorème.

Soit Φ appartenant à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, alors

2 - 1 - Φ engendre des mesures vectorielles $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\mu^{(1)} = \mu^{\Phi}$, $\mu^{(k)} \equiv 0$ si $k \geq 5$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$ et $\mu^{(4)}$ sont données par les formules III - 5 - 3.

2 - 2 - Soit ψ appartenant à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$ alors :

$\forall h \in \mathscr{H}_b^1(\mathbb{B})$

$$\mu^{\psi\circ\Phi}(h) = \mu^{\Phi}(h\,\psi'\circ\Phi(\beta,\beta)) + \frac{1}{2}\mu^{(2)}(h\,\psi''\circ\Phi(\beta,\beta))$$

$$+\frac{1}{3!}\mu^{(3)}(h\,\psi'''\circ\Phi(\beta,\beta)) + \frac{1}{4!}\mu^{(4)}(h\,\psi^{iv})\circ\Phi(\beta,\beta)).$$

Démonstration.

Si Φ appartient à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ Φ^n appartient également à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$ et $\mu^{\Phi^n} \equiv \mu^n$ est donnée par VI - 1 - 2.

D'autre part V - 5 et V - 7 impliquent que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^*$ $\mu^n(\Phi^m.h)$ est bien défini et :

$$\mu^n(\Phi^m h) = \mu^{\beta\otimes\beta}(h(\Phi^m \partial_{1,1}\Phi^n)(\beta,\beta)) + \frac{1}{2}\mu^{\beta\otimes\lambda}(h(\Phi^m \partial_{1,2}\Phi^n)(\beta,\beta))$$
$$+\frac{1}{2}\mu^{\lambda\otimes\beta}(h(\Phi^m \partial_{2,1}\Phi^n)(\beta,\beta)) + \frac{1}{4}\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\Phi^m \partial_{2,2}\Phi^n)(\beta,\beta)).$$

Par conséquent on peut définir sur $(T_2, \mathscr{B}(T_2))$ des mesures vectorielles $(\mu^{(k)})_{k\in\mathbb{N}^*}$ par la formule III - 1 - 2 :

$$\mu^{(k)}(h) = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\,\mu^r(h\,\Phi^{k-r}(\beta,\beta))$$
$$= \sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\,\mu^{\beta\otimes\beta}(h(\Phi^{k-r}\partial_{1,1}\Phi^r)(\beta,\beta))$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\,\mu^{\beta\otimes\lambda}(h(\Phi^{k-r}\partial_{1,2}\Phi^r)(\beta,\beta))$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\,\mu^{\lambda\otimes\beta}(h(\Phi^{k-r}\partial_{2,1}\Phi^r)(\beta,\beta))$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{r=1}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\,\mu^{\lambda\otimes\lambda}(h(\Phi^{k-r}\partial_{2,2}\Phi^r)(\beta,\beta))$$

d'où $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$ $\mu^{(k)}$ est donnée par les formules III - 5 - 3.
Si ψ appartient à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R})$, $\psi\circ\Phi$ appartient à $\mathscr{C}_{\infty,p}(\mathbb{R}^2)$, en utilisant V - 5 et V - 7 et VI - 1 on obtient 2 - 2.

4 - Corollaire.

Si Φ et ψ appartiennent à $\mathscr{C}_{4,p}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathscr{C}_{4,p}(\mathbb{R})$ respectivement, les résultats des théorèmes VI - 1 et VI- 3 et du corollaire VI - 2 restent valables en utilisant un argument classique d'extension et la majoration VI - 1 - 3 d'où le résultat annoncé dans l'introduction.

5 - Remarque

L'extension de ces résultats aux fonctionnelles aléatoires du type $\Phi(N_1, N_2)$ où ($N_k)_{k=1,2}$ sont des semi-martingales du type introduit en III - 6 nécessite l'introduction d'hypothéses supplémentaires , notamment du type $h_k(s)$ et $g_k(s)$ appartiennent) $\mathscr{D}_{2,1}$.

BIBLIOGRAPHIE

1 ALLAIN M. F.- Formule de Itô pour des processus indexés par une partie T de $\mathbb{R}^d$. Thèse d'état (1982)

2 " -Semi-martingales indexées par une partie de $\mathbb{R}^d$ et formule de Itô. Cas continu. Z-W 65, p 421 - 444 (1984)

3 " -Mesures stochastiques et décomposition de Doob. Séminaires de RENNES (1983)

4 ITO. K. -On a formula concerning stochastic differentials NAGOYA Math-Journal Vol 3, p 55 - 65 (1961)

5 METIVIER M. et PELLAUMAIL J. -Mesures stochastiques à valeurs dans les les espaces L_p. Z-W 40, p101 -114 (1979)

6 MEYER P.A. -Un cours sur les intégrales stochastiques Séminaire de Probabilité X L.N. n° 511 p 246 - 400 (1976)

7 " -Eléments de Probabilités Quantiques Séminaire de Probabilités XX L.N N° 1 204 p 186 - 312 (1986)

8 NEVEU J. -Processus aléatoires Gaussiens Presses de l'Université de Montréal (1968)

9 NUALART D. -Non causal stochastic integrals and calculus (preprint)

10 NUALART D.et PARDOUX E. -Stochastic calculus with anticipating integrands . (Preprint)

11 SANZ -SOLE M. -*r* -variations fort two-parameter continuous martingales and Itô's formula. Preprint n°28 1985 Universitat de BARCELONA

12 SKOROHOD A.-V. - On a generalization of a stochastic integral. Theory of Prob. and Appl. XX, p. 219 - 233 (1975)