RÉGINE DOUADY

Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'œuvre jeux de cadres et dialectique outil-objet

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 5
« Séminaires de didactique des mathématiques », , exp. n° 1, p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___5_A1_0>

UN EXEMPLE D'INGENIERIE DIDACTIQUE où sont à l'oeuvre JEUX de CADRES et DIALECTIQUE OUTIL-OBJET

Régine DOUADY UNIVERSITE DE PARIS VII

14 Janvier 1987

Introduction

On présente ci-dessous des notions qui permettent une analyse didactique des rapports entre l'enseignement et l'apprentissage d'un certain savoir mathématique, notions exposées plus en détail dans (R.Douady 1984):

dialectique outil-objet : c'est un processus cyclique organisant les rôles respectifs de l'enseignant et des élèves, au cours duquel les concepts mathématiques jouent alternativement le rôle d'outil pour résoudre un problème et d'objet prenant place dans la construction d'un savoir organisé.

Jeux de cadres: Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique... Les *jeux de cadres* sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves.

La dialectique outil-objet est créatrice de sens. Les jeux de cadres sont source de déséquilibres; la rééquilibration participe à l'apprentissage. Les jeux de cadres jouent un rôle moteur dans l'une des phases de la dialectique.

Nous allons d'abord préciser ces notions au sein de notre problématique didactique, puis nous allons les utiliser pour décrire et analyser une ingéniérie didactique (jeux de cibles) qui s'est déroulée au CP (élèves de 6-7 ans) et dont l'objectif d'appprentissage pour les élèves était l'extension du champ numérique qu'ils maîtrisaient.

Nous nous intéressons aux processus par lesquels des élèves peuvent acquérir un savoir mathématique en situation scolaire.

Nous avons choisi d'aborder notre étude par les contenus. Le terrain d'étude est le cursus primaire (élèves de 6 à 11 ans). Dans un premier temps, nous avons construit et réalisé un enseignement sur 4 années (CE1-CM2) en prenant en compte de facon essentielle et aussi contrôlée que nous l'avons pu les aspects **outil** et **objet**, très importants de notre point de vue, d'un concept mathématique. L'observation des procédures des élèves, du contenu cognitif de leurs échanges en situation de communication, a attiré notre attention sur l'importance des **changements de cadres** spontanés (i.e à l'initiative de l'élève) ou provoqués (par l'intervention d'un autre élève ou de l'enseignant) pour avancer dans la recherche d'un problème, pour débloquer une situation, pour faire évoluer les conceptions. Les changements de cadres étaient possibles par le choix des problèmes que nous avions fait: notre intention était de prendre en compte la diversité des voies d'accès à un problème et aussi les diversités cognitives des élèves d'une même classe, mais non d'en faire un instrument didactique de la construction du savoir pour un même élève. Dès lors il devenait important d'étudier les conditions d'organisation de changement de cadres à des fins d'apprentissage. Nous avons élaboré des hypothèses cognitives et didactiques sur l'apprentissage d'un contenu mathématique précis dont l'essentiel est que:

On peut construire effectivement des connaissances mathématiques en faisant jouer la dialectique outil-objet au sein de jeux de cadres appropriés, grâce à des problèmes répondant à certaines conditions.

Du point de vue mathématique, le projet était organisé autour de la **mesure des grandeurs (longueurs et aires) et des nombres décimaux**. Pour mettre en oeuvre les rôles imbriqués des grandeurs et des nombres, nous avons introduit comme cadres de travail, en interaction avec la géométrie et les nombres, le cadre des fonctions et celui de la représentation sous ses deux aspects algébrique et graphique. Nos hypothèses amènent à *découper* les notions mathématiques, objet de l'apprentissage, *selon un enchaînement de problèmes* qui, par leur organisation et grâce à leur résolution dans une *responsabilité partagée* entre l'enseignant et les élèves, doit permettre aux élèves de contrôler le sens de ces notions, d'en disposer telles quelles ou de les adapter dans des situations nouvelles.

Pour tester ces hypothèses, nous avons construit et réalisé sur les 5 années du cursus primaire un enseignement les mettant en oeuvre . Nous avons observé et analysé le déroulement effectif du processus, lequel a concerné une vingtaine d'élèves que nous avons suivis du CP au CM2 .

Nous allons préciser le cadre théorique de notre travail.

1 Cadre théorique

1.1 <u>Références didactiques</u>

Des travaux de Piaget et de l'Ecole de Psychologie sociale de Genève, nous retenons l'importance de l'action, le rôle des "déséquilibres-rééquilibrations", le rôle des conflits cognitifs (entre interlocuteurs travaillant ensemble ou à distance). Du point de vue du savoir, G.Vergnaud a souligné l'importance d'un découpage par champs conceptuels. Nous reprenons cette idée en distinguant les cadres dont dépendent les concepts impliqués dans un problème qui nous intéresse et les relations entre eux. Un problème étant choisi pour les conditions qu'il remplit, nous décrivons et nous analysons la situation didactique créée en classe par sa recherche, en nous référant à la classification des situations de G.Brousseau.

1.2. <u>Aspect outil, aspect objet d'un concept mathématique</u>

Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne ne sait résoudre. Une part importante de leur activité consiste à poser des questions et résoudre des problèmes. Pour ce faire, ils sont amenés à créer des *outils* conceptuels, auxquels s'adjoignent maintenant des outils techniques (les ordinateurs permettent de renouer avantageusement avec la tradition des calculs gigantesques des siècles précédents). Pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique, les concepts ainsi créés sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Ils s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées, pour les étendre ou se substituer à certaines d'entre elles. Ils acquièrent le statut d'*objet*. Il arrive que des chercheurs créent directement des objets pour mieux organiser une branche des mathématiques, pour mettre de l'ordre dans les pensées ou pour les besoins de l'exposition.

Ainsi, nous disons qu'un concept est **outil** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par **objet**, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des savants, à un moment donné, reconnu socialement.

Un élève, en activité mathématique, peut recourir à un outil de manière implicite ou explicite. Donnons un exemple. Considérons le problème suivant: "Existe-t-il un carré d'aire 12cm^2 ? et la réponse d'un élève: "pour un carré de côté 3cm l'aire est 9 cm^2 , pour un carré de côté 4cm l'aire est 16cm^2 , quand le côté passe de 3cm à 4cm il y a bien un moment où l'aire sera 12cm^2 ". Nous reconnaissons la relation entre dimension et aire d'un carré comme un outil explicite. Toutefois, la fonction numérique $x \dashrightarrow x^2$, sa continuité, le théorème des valeurs intermédiaires sont nécessaires pour justifier la déclaration de l'élève. Nous disons que tous ces éléments interviennent comme outils implicites. Ses conceptions lui permettent d'engager une procédure dont la justification fait référence à des notions qu'il ne sait pas formuler ou qu'il exprime seulement en termes d'actions dans un contexte particulier; dans ce cas du point de vue du sujet, G.Vergnaud parle de théorème-en-acte. Nous parlons d'outils explicites pour les notions qu'un élève met en oeuvre, qu'il peut formuler et dont il peut justifier l'emploi. Notons que le domaine de validité des outils dont dispose un élève évolue au cours de sa scolarité, la nature des preuves qu'il apporte aussi, comme le montre N.Balacheff. Nous appelons pratique tout usage adapté que fait un élève d'outils exprimés explicitement ou en termes d'actions, reconnus au moins au sein de la classe: c'est le cas des représentations graphiques de fonctions, de certaines façons d'étudier leurs variations.

1.3 Changements de cadres

Si l'on s'intéresse à l'évolution des mathématiques dans l'histoire passée, récente ou dans l'actualité, on constate qu'une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue (par exemple, pour une équation différentielle, à adopter un point de vue qualitatif ou un point de vue algébrique), à les formuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre, au moins partiellement, à confronter des problèmes posés dans des cadres différents mais dont la traduction dans un même cadre conduit à poser de nouvelles questions et suggère le recours à des outils autres que ceux initialement sollicités. Le mot "cadre" est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique.. mais aussi cadre qualitatif ou cadre algorithmique.. Disons qu'un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. Par ailleurs la familiarité, l'expérience peuvent conduire à des conflits entre ce qu'on attend et ce qui se produit effectivement et par suite à renouveler les images ou à les faire évoluer. Nous concevons la notion de cadre comme une notion dynamique. Le **changement de cadres** est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation. L'objectif est, pour le chercheur, de se forger des convictions débouchant sur des conjectures et de poser des jalons permettant d'en organiser des plans de démonstration. Un plan n'est pas toujours bon du premier coup. Il arrive souvent que des contrexemples, mettant en évidence des obstructions, amènent à déplacer les jalons, voire à rejeter la conjecture de départ. Quoiqu'il en soit, les traductions d'un cadre dans un autre aboutissent souvent à des résultats non connus, à des techniques nouvelles, à la création d'objets mathématiques nouveaux, en sommé à l'enrichissement du cadre origine et des cadres auxiliaires de travail.

2 Nos propositions

2.1 *Situons nous*

Nous disons qu'*un élève a des connaissances en mathématiques* s'il est capable d'en provoquer le fonctionnement comme outils explicites dans des problèmes qu'il doit résoudre, qu'il y ait ou non des indicateurs dans la formulation, s'il est capable de les adapter lorsque les conditions habituelles d'emploi ne sont pas exactement satisfaites, pour interpréter les problèmes ou poser des questions à leur propos.

Pour obtenir que les élèves dans leur ensemble acquièrent des connaissances au sens ci-dessus, notre hypothèse est que l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où *la classe simule une société de chercheurs en activité* . Or bien des éléments de la vie de classe agissent en obstacle à une telle simulation. Nous retenons que la pédagogie courante utilise essentiellement la méthode "j'apprends, j'applique". Peu de responsabilité est donnée aux élèves dans leur apprentissage. Du point de vue mathématique, les problèmes mettent rarement en oeuvre les caractères essentiels des notions, ceux qui en justifient scientifiquement l'emploi, et cela, même en pédagogie active ou en pédagogie par objectifs. Par exemple, il est rare qu'à l'école primaire les nombres décimaux servent à désigner de manière approchée, d'aussi près qu'on veut, une mesure qu'on ne sait pas désigner de manière exacte par un nombre. On peut objecter que ce point de vue correspond au savoir savant " **R** est le complété de **D**" et n'a pas sa place à l'école primaire. Notre expérience montre au contraire que ce point de vue est constitutif du sens de la notion, y compris dans une perspective d'usage pratique et qu'il est possible d'organiser l'enseignement de façon que les élèves d'une classe dans leur ensemble intègrent la connaissance des nombres décimaux avec toute leur richesse d'outil et une partie de leur aspect objet. Par ailleurs, les concepts sont en général présentés dans un cadre, et les applications demandées n'en sortent pas. On pratique la séparation des cadres. En se focalisant sur ces éléments, c'est en fait toute la signification de l'apprentissage qui va se trouver modifiée

Pour construire un enseignement différent, restituant leur sens aux outils que les élèves mettent en oeuvre, tout en assurant une présentation institutionnelle aux objets correspondants, nous avons besoin de caractériser une autre organisation de l'enseignement. Celle-ci est fondée sur trois points:, *la dialectique outil-objet*, *la dialectique ancien-nouveau*, *les jeux de cadres*, lesquels s'enclenchent à partir de *problèmes* répondant à plusieurs conditions.

2.2 ***Problèmes:*** *conditions et exemples*

- L'énoncé (contexte et questions) a du sens pour les élèves.
- L'objectif de la recherche est explicite: les élèves savent ce qu'ils cherchent.
- Compte tenu de leurs connaissances, les élèves peuvent engager une procédure de résolution, mais ils ne peuvent pas résoudre complètement le problème.
- Les connaissances visées par l'apprentissage (contenu ou méthode) sont des outils adaptés au problème.
- Le problème peut se formuler dans au moins deux cadres différents.

<u>Exemples</u>: *1) Dans la situation "jeux de cibles"* (détaillée ci-dessous) *comparer les scores des différentes équipes.*

2) On s'intéresse aux rectangles de périmètre P fixé, 34cm ou 36cm par exemple. Calculer l'aire de plusieurs d'entre eux. On ordonne les rectangles *suivant l'aire de la plus petite à la plus grande. L'aire peut-elle prendre des valeurs aussi grandes qu'on veut ou bien y a-t-il une plus grande valeur possible? Pour P=34cm, il y a un rectangle d'aire $70cm^2$, un d'aire $72cm^2$, y en a-t-il d'aire comprise entre $70cm^2$ et $72cm^2$?*

Un tel problème dans lequel le paramètre P est une variable didactique pour l'enseignant, est intéressant pour les élèves qui, du point de vue numérique, ont une certaine connaissance des entiers (avec opérations et ordre) et aussi de quelques fractions (1/2, 1/4,... les multiples entiers de ces fractions comme addition itérée, 1/2 désignant le *nombre* a tel que $a+a= 2\times a = 1$, de même 1/4 désignant le nombre a tel que $4\times a = 1$...), mais ne connaissent ni les décimaux ni la multiplication de deux fractions, savent calculer l'aire de rectangles qui ont des dimensions entières, qui ont une conception géométrique de l'aire de n'importe quel rectangle, mais qui ne savent pas comment déterminer numériquement l'aire dans les cas où les dimensions ne sont pas entières. L'objectif d'apprentissage est <u>l'extension de la multiplication aux nombres fractionnaires.</u>

3) *Partition: coloriage d'un quadrillage gradué en 3 couleurs.*

Un point de coordonnées (a,b) représente un rectangle R de dimensions a cm et b cm. Le problème est de comparer la mesure A(R) de son aire à un nombre choisi k . Plus précisément, la règle est la suivante, pour k = 24 :

si A(R) < 24 on colorie le point correspondant en bleu
si A(R) > 24 on colorie en rouge
si A(R) = 24 on colorie en noir

Y a-t-il un carré parmi les rectangles d'aire $24cm^2$?

L'objectif d'apprentissage est <u>l'introduction des nombres décimaux</u> comme fractions décimales privilégiées, pour les commodités de calcul, parmi les fractions pour calculer la mesure du côté d'un carré de plus en plus proche du carré cherché. Ce problème est intéressant pour des élèves qui ont une connaissance partielle des fractions, en particulier qui ne connaissent pas les algorithmes généraux de calcul sur les fractions, mais qui savent exploiter les particularités de la numération s'ils ont le choix des nombres sur lesquels opérer.

2.3 *Dialectique outil-objet*

Etant donné un problème, convenablement choisi, que les élèves ont en charge de résoudre, nous appelons <u>dialectique outil-objet</u> le processus suivant dans lequel nous distinguons plusieurs phases qui remplissent des fonctions différentes:

D.O.O. phase a "<u>Ancien</u>"

Des concepts mathématiques sont mis en oeuvre comme outils explicites pour résoudre au moins partiellement le problème. Ainsi, les élèves auxquels s'adresse le problème 2) ci-dessus peuvent exhiber des rectangles acceptables dont les dimensions sont entières, cela veut dire en désignant par a et b les mesures des côtés, que $2a+2b=34$ ou encore $a+b=17$, et pour chacun d'eux calculer l'aire puis ordonner les résultats. Dans le problème 3), ils peuvent piquer un point sur le quadrillage, lire les coordonnées a et b, calculer $a\times b$, comparer à 24 puis colorier le point.

D.O.O. phase b "Recherche nouveau implicite"

Les élèves rencontrent des difficultés pour résoudre complètement le problème. Cela se produit si la stratégie primitive devient très coûteuse (en nombre d'opérations et donc en temps, en risque d'erreur et donc en incertitude sur le résultat, c'est le cas du coloriage du quadrillage s'il y a un très grand nombre de points, disons un millier de points ou plus). Cela se produit si la stratégie ne fonctionne plus et que de nouvelles questions se posent. C'est le cas de la recherche, parmi les rectangles de périmètre fixé, d'un rectangle répondant à une condition supplémentaire: aire comprise dans un intervalle fixé ou prenant une valeur fixée ou prenant une valeur maximale. En se bornant aux rectangles de dimensions entières, pour P=34cm on trouve que le rectangle de dimensions 8cm,9cm est celui qui a la plus grande aire. Mais pour P=36cm, on trouve que c'est le carré de côté 9cm. Le carré de côté (8+1/2)cm aurait-il une aire plus grande que le rectangle (8cm,9cm), comment comparer ces deux aires: géométriquement? par le calcul? il faudrait pour cela déterminer l'aire du carré, comment faire?

Ces nouvelles questions conduisent les élèves à chercher des moyens nouveaux adaptés. Souvent des progrès efficaces proviennent d'un changement de cadres: en effet, cela permet de mettre en oeuvre implicitement des outils qui sont nouveaux soit par l'extension du champ d'intervention, soit par leur nature même. Schématiquement, nous parlerons dans cette étape de "nouveau implicite". Les changements de point de vue et les jeux de cadres (que nous décrivons plus loin) sont des moyens à la disposition de l'enseignant pour faire avancer la phase de recherche de façon fructueuse. Mais la recherche peut aussi avancer sous la seule responsabilité des élèves.

D.O.O. phase c "Explicitation et institutionnalisation locale"

Certains éléments ont joué un rôle important dans la phase précédente et peuvent être appropriés maintenant par les élèves. Ils sont formulés soit en termes d'objets, soit en termes de pratique avec leurs conditions d'emploi du moment. Il peut s'agir aussi de convictions ayant fait l'objet de débat et donnant lieu à formulation argumentée: par exemple, parmi les rectangles qui ont un périmètre fixé, le carré a la plus grande aire. Il s'agit là de "nouveau explicite" susceptible de réemploi et familiarisation.

Dans cette troisième phase, les travaux et propos des élèves, leur validité sont discutés collectivement. Toutefois, même si la collectivité "classe" a résolu le problème, tous n'ont pas réagi à titre individuel de la même manière vis à vis des outils mobilisés. Dans les situations de communication, le savoir diffuse diversement selon les élèves. Officialiser certaines connaissances qui, jusque là, n'ont été que des outils, leur donner un statut d'objet mathématique est une condition d'homogénéisation et de constitution d'un savoir de la classe, et pour chacun une façon de jalonner son propre savoir et par là d'en assurer la progression. C'est le but de la phase suivante.

D.O.O. phase d "Institutionnalisation- statut d'objet"

L'enseignant expose ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en usage. Il "fait le cours" en présentant de manière organisée, structurée les définitions, théorèmes, démonstrations, en pointant ce qui est essentiel et ce qui est secondaire. Dans nos exemples, c'est le cas de l'écriture à virgule des nombres décimaux, des règles de calcul et de comparaison sur ces nombres, de leur propriété d'approcher avec une précision aussi grande qu'on le souhaite une mesure qu'on ne sait pas exprimer exactement avec les nombres connus. Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut d'objet aux concepts utilisés dans leur aspect outil. Ce nouveau à retenir est destiné à fonctionner ultérieurement en tant qu'ancien, mais le moment n'est pas encore venu. En vérité, la *structuration personnelle* est de première importance en mathématique pour qu'il y ait effectivement savoir. Cette structuration a été bien engagée dans le processus développé jusqu'ici. Pour la parfaire, l'élève a encore besoin de mettre à l'épreuve, éventuellement dans des essais renouvelés, *tout seul*, les connaissances qu'il croit avoir acquises et faire le point sur ce qu'il sait. C'est l'objectif de la phase qui suit.

D.O.O. phase e "Familiarisation - réinvestissement"

L'enseignant demande aux élèves de résoudre des exercices variés qui nécessitent les notions récemment institutionnalisées. Chemin faisant, les élèves développent des habitudes et savoirs-faire, ils intègrent le savoir social en le confrontant à leur savoir particulier. Ces exercices ne mettent en jeu que du connu. Mais les élèves les abordent avec des conceptions qui ont évolué et qui leur permettent d'envisager un champ plus large de problèmes.

Il reste à les mettre à l'épreuve de situations plus complexes où les élèves pourront tester, voire développer leur maîtrise des nouvelles acquisitions.

D.O.O. phase f = a "Complexification de la tâche ou nouveau problème"

L'enseignant propose aux élèves de résoudre un problème plus complexe. Par exemple, chercher un rectangle tel que

-le demi-périmètre soit égal à 41cm et l'aire 402cm^2

-le demi-périmètre soit égal à 39cm et l'aire 402cm^2

Les nombres décimaux vont intervenir comme outil technique. La difficulté est de formuler des questions plus précises pertinentes par rapport au problème et dont l'étude se traduira par des calculs sur des nombres décimaux choisis pour leur commodité de calcul. L'outil essentiel ici est la fonction (a,b) ---> a × b où a+b=41, dont l'étude des variations, nécessairement naïve, permet quoiqu'il en soit de situer 402 parmi les valeurs du produit $a \times b$ et de cerner de mieux en mieux le rectangle cherché. L'échec de cette procédure dans le cas $a+b=39$ incite à chercher des explications dans le cadre géométrique qui est le cadre d'origine du problème et à formuler le problème autrement: l'aire peut-elle être assez grande pour atteindre, voire dépasser $402 cm^2$. Les élèves ont déjà rencontré ce problème pour d'autres valeurs numériques. Il devient maintenant objet d'étude dans le cas général. La référence au carré de même périmètre que le rectangle cherché débouche sur une conjecture et une argumentation géométrique qui clôt la question. La connaissance de la classe s'est enrichie d'un théorème.

Dès lors, l'objet étudié est susceptible de prendre place comme "ancien" pour un nouveau cycle de la dialectique outil-objet.

Remarques

1) Parfois plus d'un cycle (a,b,c,e=a) est nécessaire avant le déroulement complet d'un cycle de la D.O.O. Nous en verrons un exemple dans l'ingéniérie "Jeux de cibles".

2) Il se peut que des habitudes et pratiques familières attendent des années avant de donner lieu à des objets de savoir. C'est le cas des fonctions et des représentations graphiques.

3) De notre expérience, nous pouvons tirer l'hypothèse suivante: pourvu que "assez" de notions visées par l'apprentissage soient introduites par D.O.O. , d'autres peuvent faire l'objet d'un apport direct par l'enseignant ou par la lecture d'un manuel dans deux occasions:

- en corollaire d'une situation d'apprentissage, et cela en toute efficacité du point de vue des élèves.
- pour créer les conditions d'enclenchement de la D.O.O :"assez de connu" dans chacun des cadres sollicités par le problème (cf ci-dessous).

Un problème didactique important est celui des critères de choix, de l'organisation et de l'articulation des notions selon leur mode d'introduction. De ce point de vue là, nous n'apportons pas des réponses de principe mais des exemples de réalisation.

2.4 *Jeux de cadres*

Les *jeux de cadres* sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes répondant aux conditions énoncées plus haut, pour faire avancer les phases de recherche et notamment pour élaborer une filiation de questions pertinentes par rapport au problème posé, lequel prend place dans une certaine situation d'apprentissage. Il s'agit du déroulement d'une procédure dans laquelle on peut distinguer trois phases:

1) *transfert et interprétation*

Les élèves sont confrontés à un problème formulé dans un certain cadre.

Compte tenu de leurs connaissances, de leurs pratiques et habitudes, l'examen qu'ils font du problème les conduit à traduire tout ou partie dans un autre cadre et à y interpréter certaines questions. Ce faisant, ils mettent en oeuvre des correspondances entre cadres différents (entre objets et entre relations). Reprenons le problème:"chercher un rectangle de demi-périmètre 41cm et d'aire 402cm^2 ". Ce problème est formulé dans le cadre géométrique. Les élèves cherchent une surface plane qui a une forme particulière qu'ils savent dessiner, dont le périmètre et l'aire ont des mesures imposées. Ils traduisent numériquement ce problème par la recherche de deux nombres dont ils connaissent la somme, 41, et le produit 402. Des essais au hasard n'ont aucune chance d'aboutir même s'ils disposent d'une calculette. Il leur faut pouvoir organiser les réponses et se donner les moyens de bien choisir les essais ultérieurs. Pour cela, les élèves savent qu'ils ont intérêt à désigner les nombres cherchés et écrire les relations imposées par les données, c'est une pratique de la classe. Le problème est de trouver une manière de les exploiter de façon à être guidé vers la solution. A ce point du travail, ils doivent chercher non plus une solution exacte, mais des solutions approchées. Ils ont une certaine pratique des relations numériques et ils vont encore changer de cadre pour les étudier. La difficulté ici est qu'ils ont à traiter solidairement deux relations. Les élèves qui progressent sont ceux qui transforment encore le problème en rompant l'analogie de statut des deux relations $a+b=41$ et $a\times b=402$ et en privilégiant la relation additive. Ils obtiennent des couples (a,b) dont la somme $a+b$ est égale à 41 et dont ils espèrent que le produit voudra bien être proche de 402.

2) *Correspondances imparfaites*

Mais les correspondances entre les cadres sont imparfaites soit pour des raisons mathématiques, soit à cause des connaissances insuffisantes des élèves. La situation est source de déséquilibre. Par exemple, dans le problème ci-dessus, quand ils ont réussi à trouver pour le produit deux valeurs qui encadrent 402, ils sont convaincus qu'ils peuvent en choisissant bien les couples resserrer l'intervalle. Les essais tantôt heureux, tantôt malheureux pour encadrer 402 créent des déséquilibres entre leurs convictions et ce qu'ils savent faire. En fait, ils sont en train de manipuler implicitement des fonctions que leurs connaissances mathématiques ne permettent pas de contrôler.

3) *Amélioration des correspondances et progrès de la connaissance*

La communication entre cadres et en particulier la communication avec un cadre auxiliaire de représentation est un facteur de rééquilibration. Ici leur pratique lorsqu'ils sont face à des problèmes qui comportent des variations de couples de nombres est de changer de cadre, de les représenter graphiquement sur un quadrillage gradué et d'interpréter l'ensemble des points ainsi marqués. Ainsi, pour mieux contrôler la prévision, ils vont représenter les couples (a,b) trouvés sur un quadrillage gradué et écrire à côté du point représentant un couple (a,b) la valeur du produit a×b . Ces points sont alignés et les élèves qui ont choisi cette représentation ne doutent pas que sur la droite entre deux points marqués se trouvent d'autres points correspondant à des rectangles de même périmètre. Ils ont récolté une visualisation de la variation du produit en fonction du couple (a,b) et par là même, un moyen de sélectionner de nouveaux couples "meilleurs", ce qu'ils n'avaient pas pu faire de façon sûre sans cette représentation. Mais les élèves qui n'ont pas pris cette initiative et à qui l'enseignant a suggéré de le faire, ont obtenu les mêmes résultats. Toutefois le graphique a des limites de visibilité. En fait, l'amorce est suffisante pour permettre une conjecture: "quand on réduit l'écart entre a et b le produit augmente, quand on augmente l'écart, le produit diminue", d'où une méthode pour trouver des couples de meilleur en meilleur. Une interprétation géométrique de cet énoncé a permis à certains élèves d'en élaborer une preuve. Ainsi les interactions entre cadres permettent de faire progresser la connaissance dans chacun d'eux.

3 Ingéniérie didactique

Nous décrivons ci-dessous de manière schématique un exemple d'ingéniérie didactique au CP (6ans), appelé "le jeu de cibles" (R.Douady 1984) .La situation a duré trois semaines.

3.1 le jeu de cibles

Le but

a) Faire jouer aux nombres munis de l'ordre et de l'addition, leur rôle d'outil. Etendre la compétence numérique des élèves de deux points de vue:

-étendre le champ des nombres sur lesquels ils savent opérer. Préciser le sens de la numération de position.

-accroître la complexité des problèmes dans le cadre numérique. . Construire un langage algébrique et des représentations (tableaux de nombres, graphiques...) pour traiter une information abondante et résoudre des problèmes difficilement abordables sans ce recours.

b) Proposer aux élèves d'étudier une situation très simple, qui a du sens pour eux, et dans laquelle se présente déjà le phénomène suivant: il y a des nombres qui sont multiples d'un nombre donné et d'autres qui ne le sont pas. Ceci est à la base de la division euclidienne, outil essentiel de la numération.

La situation

Elle comprend une cible (3 cercles concentriques délimitant 4 zones sur le terrain ou sur le mur marquées 0,3,6,9 pour la plus petite), des balles en caoutchouc, et différentes règles de jeux regroupées en deux types.

Dans le premier type, il s'agit de marquer le plus de points possible.

Dans le deuxième type, il s'agit de marquer un nombre de points fixé à l'avance ou de s'en approcher le plus possible.

1) *D.O.O phase a* "<u>Ancien</u>"

<u>1ère règle:</u> le jeu est individuel. Chaque joueur lance la balle 3 fois. Il gagne à chaque lancer les points indiqués par la zone touchée. Son gain est le total des points marqués. Le gagnant est celui qui a marqué le plus de points.

Consigne: ordonner les 28 joueurs du gagnant au perdant

Les élèves savent que pour trouver leur score, ils doivent additionner leurs marques, i.e, chacun doit additionner trois nombres plus petits que 9 et ordonner plusieurs nombres plus petits que 27. Ils ont la compétence pour cela. Le problème est celui de la communication à tous les joueurs de l'information correcte et complète. Après discussion, ils décident que chacun écrirait sur une feuille son nom et les marques réalisées et que la maîtresse écrirait sur une grande feuille affichée au tableau les résultats du plus fort score au plus faible sur proposition des élèves. On groupe tous ceux qui réalisent le même score.

Cette phase se déroule rapidement et la maîtresse annonce le deuxième jeu.

D.O.O phase b : Recherche "<u>le nouveau implicite</u>"

Les joueurs sont groupés en équipe de 4. Chacun lance la balle trois fois. La marque d'une équipe est constituée des 12 marques des coéquipiers. L'équipe gagnante est celle qui totalise le plus de points.

Consigne: ordonner les équipes de la gagnante à la perdante

Les élèves savent que le score de l'équipe est obtenu en additionnant les marques de chacun dans l'équipe. La consigne propose une tâche dans le cadre du jeu. La procédure déroulée avec succès dans le premier jeu individuel est adaptée au deuxième jeu. Mais même s'ils jouent souvent mal et qu'ils marquent des zéros, douze nombres c'est trop à additionner pour la plupart d'entre eux. Il leur faut comparer les scores des équipes par d'autres moyens. Les élèves vont chercher à représenter les scores autrement que par un nombre totalisant les points de l'équipe et à travailler dans le cadre de la représentation.

<u>Nouvelle manière de coder les scores/ transformation du problème/ changement de cadre</u>

Les points obtenus par les 4 joueurs d'une équipe sont consignés dans un tableau de 4 lignes et 3 colonnes (3 marques par joueur). Le matériau à traiter maintenant est constitué de 7 tableaux (4 sur 3).

Problème: *Comment comparer deux tableaux? Comment reconnaître les équipes ex-aequo?*

Contingence et incertitude: une manière de déléguer le problème aux élèves est d'élargir le champ des questions sur le jeu se traduisant en questions sur les tableaux et conduisant à une analyse détaillée de chacun. Une meilleure connaissance des tableaux devrait en permettre un traitement efficace vis à vis du problème. Le changement de cadre est organisé par la maîtresse en sollicitant des élèves une grande diversité de questions concernant le jeu (c'est l'espace de manoeuvre des élèves, c'est pour l'enseignant une source d'indications sur les problèmes qui préoccupent les élèves et donc un moyen d'évaluer l'adéquation entre ce dont s'occupe l'enseignant et ce dont s'occupent les élèves). Le travail d'organisation des questions et la recherche de réponses vont susciter de la part des élèves des lectures différentes des tableaux et le remplacement des tableaux "mémoires du jeu" par d'autres représentations plus symboliques mais plus commodes à traiter pour comparer les scores des équipes. Dans la classe observée, les élèves ont cherché à ordonner les joueurs à l'intérieur d'une même équipe, selon la règle du premier jeu; ils ont cherché les ex-aequos, ceux qui avaient 3 fois la même marque...Ainsi, dans une équipe n'ayant réalisé que des 0 et des 3, les joueurs ont été ordonnés selon le nombre de 3 obtenus. Mais un 6 valait deux 3 et un 9 valait trois 3 ou un 6 et un 3. Le 9 c'est le plus fort.

Jeu entre le cadre de la représentation et celui des nombres

Les remarques numériques ci-dessus focalisent l'intérêt sur le nombre de 0 puis sur le nombre de 9 à l'intérieur d'une équipe. Des élèves conjecturent que l'équipe qui a le plus de 0 a perdu, puis devant un contrexemple fourni par l'un d'eux (deux équipes ayant le même nombre de 0, mais dont on s'assurait que l'une était plus forte que l'autre en comparant les 3 et les 6 obtenus par l'une et par l'autre), une autre conjecture est proposée: l'équipe qui a le plus de 9 a gagné, à condition de *compter les 9 obtenus directement et ceux fabriqués avec un 6 et un 3 ou avec trois 3*. Cela mène à un nouveau problème et un nouveau codage des scores.

Problème: *pour chaque équipe compter les 9*

L'étude fait intervenir trois cadres: celui des données brutes, telles qu'elles sont fournies par le jeu matériel où les éléments significatifs sont les lancers, les points obtenus à chacun d'eux par chacun des joueurs, celui de la représentation comprenant des tableaux constitués de 0, 3, 6, 9 susceptibles d'être regroupés autrement de manière à fournir d'autres tableaux ne traduisant plus exactement l'histoire des équipes mais fournissant le même ordre sur elles, celui des nombres où se situent les calculs. La résolution a conduit dans la classe observée à un moment de blocage (R.Douady 1984, p.141-142) que nous interprétons en termes de cadres: les élèves travaillent et s'expriment dans celui de la représentation avec une signification fournie par celui du jeu, la situation ne réclamant rien de plus, la maîtresse s'exprime dans le même que les élèves mais avec une signification fournie par celui des nombres: objet de l'apprentissage. Ce dernier problème résolu conduit à une autre formulation de la question de départ: comment comparer les scores des équipes?

Nouvelle formulation: on écrit le score de chaque équipe en comptant les 9 et le reste. *Comment comparer les expressions* $n \square 9 + r$?

En fait, nous observons une utilisation de l'algorithme suivant:

si $n_i < n_j$ $\quad n_i \square 9 + r_i < n_j \square 9 + r_j$

si $n_i = n_j$ et $r_i < r_j$ $\quad n_i \square 9 + r_i < n_i \square 9 + r_j$

l'ordre alphabétique des couples a du sens pour les élèves seulement en termes de points gagnés. Cet ordre est un outil implicite dont l'usage deviendra une pratique pour comparer les nombres de la forme n▫9 + r .

Comme on voit, le changement de cadre de travail associé au changement de traitement des scores a rendu accessible la comparaison de ces scores et a permis au problème de progresser. Toutefois, pour le maître, le type de réponses permises par le traitement envisagé est intéressant mathématiquement, est un jalon certes, mais n'est pour le moment qu'un jalon vers son objectif d'apprentissage. C'est dans ce contexte que la question posée ci-dessous aux élèves trouve son intérêt.

D.O.O phase c "<u>Explicitation</u>"

<u>Question:</u> dans une autre classe, les élèves ont joué au même jeu. *Une équipe a gagné 39 points. Où situer son score parmi les nôtres?*

Dans le cadre du jeu,les élèves sont bien convaincus que la question a du sens: il s'agit de comparer des scores. Mais ces scores sont écrits sous deux codes différents, ce qui pose un problème technique dans le cadre numérique. Cette situation met l'accent sur la distinction à faire entre les nombres (identifiés ici aux scores) et la façon de les écrire. Pour résoudre cette question, il faut écrire les scores dans le même code. Les élèves proposent de "*chercher les paquets de 9 dans 39* ". Ils sont pour cela obligés de revenir à la signification du codage et de la numération de position, ce qui est un des objets de l'apprentissage. Cette nouvelle question, sur le chemin de la question initiale, pertinente et déterminante pour la résolution de celle-ci, a pu être posée grâce au découplage du contexte dans lequel la question initiale prend son sens et le cadre technique où elle peut être résolue.

A ce point du déroulement de la situation, la maîtresse choisit de ne rien institutionnaliser. En effet, ce qui le serait est l'écriture des nombres grâce à des "groupements par 9". Or il ne s'agit à ce moment, que d'une réponse appropriée à un certain contexte, néanmoins utile pour avancer. D'où la décision de créer pour les élèves des bonnes conditions de familiarisation avec ces écritures et leur mode de fonctionnement.

D.O.O phase e <u>Familiarisation</u> : manipulation de scores écrits sous la forme (n 9) + r , en particulier additions et comparaisons de tels scores.

<u>Consigne:</u> chaque équipe joue une seconde manche.

1) Comparer les équipes de la gagnante à la perdante.

2) Chaque équipe compare ses scores aux deux manches et cherche combien elle a en plus ou en moins à la seconde manche par rapport à la première.

La première tâche n'implique que du connu. La deuxième exige en plus un calcul de complément. Il s'agit, étant donnés deux nombres a et b , de trouver x tel que a+x=b . Là encore c'est la traduction numérique d'une question dont aucun élève ne doute qu'elle a une réponse en termes de points dans le jeu. Mais comme les données numériques sont fournies par le jeu, pour quelques équipes la question de "retenue" va se poser. Techniquement, certaines réponses seront plus faciles à obtenir que d'autres. Mais du point de vue du sens, elles ont toutes même statut.

D.O.O phase f=a <u>Faire le classement général des équipes</u> (en réunissant les scores aux deux manches).

L'objectif est que les élèves utilisent dans une situation plus complexe, des outils qu'ils connaissent. Le premier travail consiste à trouver le score total de chaque équipe. L'algorithme en fait utilisé est le suivant:

scores n□9 + r et n'□9 + r' total (n+n')□9 + (r+r')

si r+r' > 9 , on obtient un paquet de 9 en plus.

En utilisant cette règle, les élèves ont pu ordonner tous les scores totaux.

D.O.O phase b et c <u>Combien de points chaque équipe a-t-elle gagné à la première manche, à la seconde et en tout?</u>

Les expressions "combien de points" ou "compter les points" font implicitement référence à une formulation standard des nombres . C'est très clair dans le langage des élèves. En réponse à la question ci-dessus les élèves disent:" pour compter les points, on additionne les 9 et le reste". Puis, " on groupe les points par 10 au lieu de les grouper par 9 ". Ils proposent alors plusieurs méthodes. A cette occasion, ils explicitent et exploitent les relations entre groupements par 9 et par 10 .

D.O.O phase d <u>Institutionnalisation</u>

1) Ecriture de nombres nécessitant 2 ou 3 chiffres en base 10

table :

centaines	dizaines	unités

2) Si a < b on peut trouver c tel que a + c = b .

D.O.O phase e <u>Familiarisation</u> avec le point 2) ci-dessus, à propos d'exemples numériques variés. Dans chaque cas, calcul de c .

D.O.O phase f <u>Nouvelle situation:</u> emploi de la soustraction au sens déjà vu, mais cette fois comme outil explicite d'abord dans un cas simple du point de vue numérique, puis dans un cas plus complexe.

Situation: mêmes équipes, même cible, nouvelles règles du jeu.

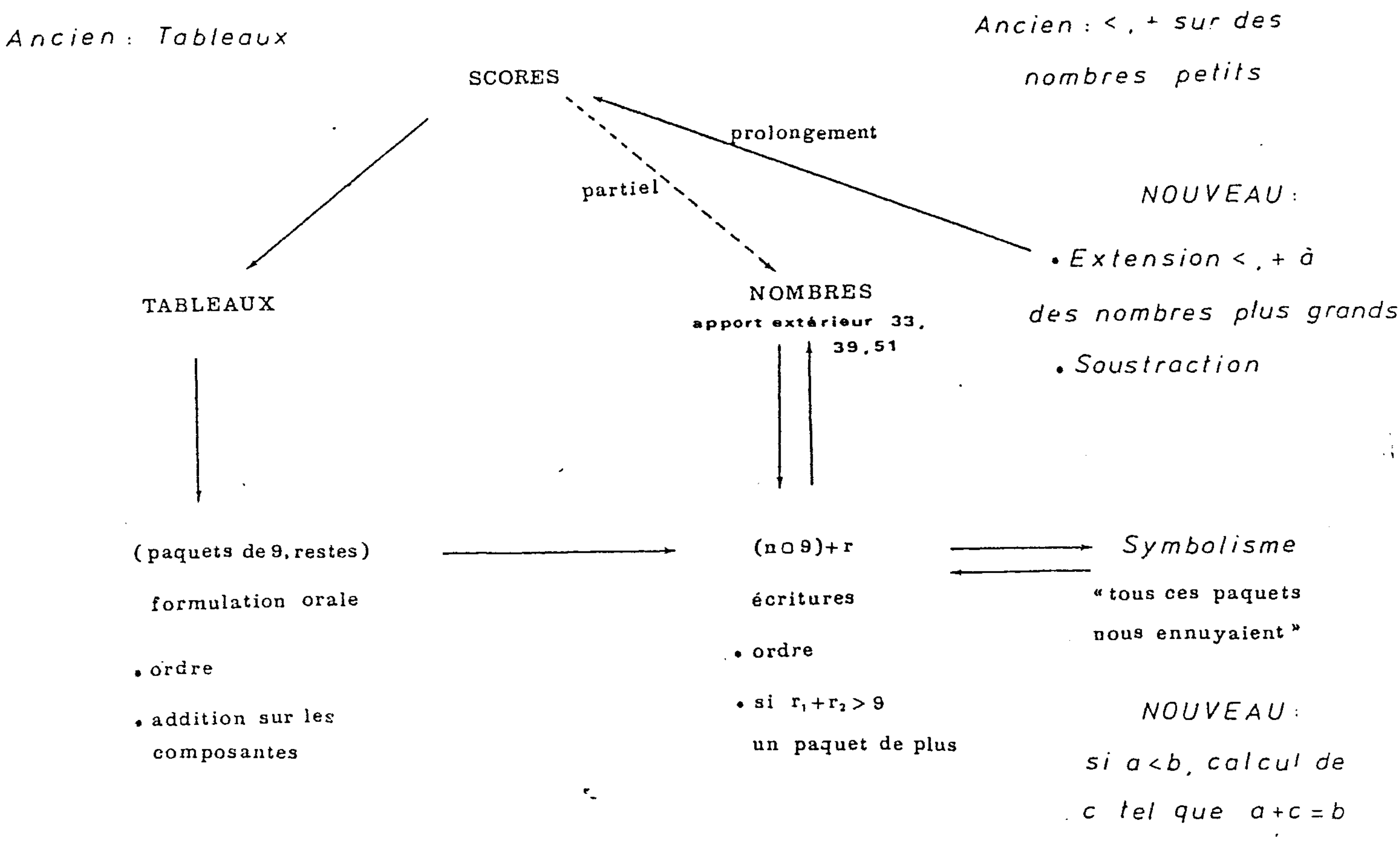
1) Chaque joueur lance la balle une fois. L'équipe qui obtient 18 points a gagné.

2) Chaque joueur lance la balle trois fois. L'équipe qui obtient 50 points ou un nombre aussi près que possible a gagné.

Les élèves explicitent à cette occasion que la cible ne permet d'obtenir que "des nombres qu'on fabrique avec des 3" . Tous les nombres ne font pas partie de cette catégorie, 50 par exemple. Leur dernière préoccupation dans ce contexte est de *trier les nombres suivant la façon de les obtenir:* ainsi, 18 se fabrique avec des 3, avec des 6, avec des 9 . Y en a-t-il d'autres? Y en a-t-il qui se fabriquent avec des 3 seulement ou des 6 ou des 9 ?

Ce champ de questions sera repris plus tard, l'année suivante...

Nous reportons ci-dessous l'organigramme des changements de cadres.



Conclusion

Notre projet avait pour objectif de tester des hypothèses cognitives et didactiques sur l'apprentissage des mathématiques en classe. A cette fin nous avons reconsidéré le découpage du savoir à enseigner et son organisation en séquences d'apprentissage. La longue durée dont nous avons bénéficié nous a donné la liberté requise pour engager dans leur aspect outil les notions mathématiques à enseigner, pour mettre en oeuvre des jeux de cadres et aussi pour créer des habitudes. Toutefois l'efficacité réside essentiellement dans le déroulement d'un processus comprenant plusieurs cycles s'enclenchant les uns les autres et impliquant au moins deux cadres ou deux points de vue. Ceci est possible à condition de respecter des seuils de deux types:

1) Il existe une masse critique de connaissances anciennes et d'habitudes dans chacun des cadres concernés.

2) Il existe un seuil critique d'interrogation au dessous duquel la réflexion ne s'enclenche pas.

Par ailleurs, dans notre expérience, les élèves n'ont pas acquis toutes leurs connaissances via la dialectique outil-objet. Mais au moins pour la majorité d'entre eux, les connaissances proposées autrement à l'apprentissage se sont ancrées sur une charpente de connaissances acquises par jeux de cadres et dialectique outil-objet. Cependant, on ne peut pas exclure que pour certains et particulièrement pour une certaine élève (Lidia) d'autres formes de travail auraient été mieux adaptées.

Bibliographie

Balacheff N. (1982): Preuve et démonstration..., *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.3.3, p. 261-303

Bessot A., Eberhard M. (1983): Une approche didactique des problèmes de la mesure, *Recherches en didactique des Mathématiques*, vol.4.3, p. 293-324.

Bessot A., Comiti C.(1985):Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération..,*Recherches en didactique des Mathématiques* vol.6/2.3 p.305-346

BrousseauG.(1980,1981):Problèmesde l'enseignement des décimaux, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.1.1 p.11-57, vol.2.1 p.37-127.

Chevallard Y.(1985): *La transposition didactique* La pensée sauvage, Grenoble.

Douady R.(1980): Approche des nombres réels.., *Recherches en didactique des Mathématiques*, p.77-110.

Douady R.(1984): *Jeux de cadres et Dialectique outil-objet*, Thèse d'état, Université Paris 7.

Douady R. (1985): *Interplays between different settings..*, proceedings PME9,vol.2 p.33-52.

Douady. R, Perrin M.J (1986): *Nombres décimaux*, brochure IREM Paris 7

Laborde C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse d'état, Université de Grenoble.

Perret-Clermont A.N (1979): *La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale*, P.Lang.

Vergnaud G. et al. (1983): Didactique du concept de volume, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 4.1.

N.B. Le texte ci-dessus est extrait et adapté d'un article à paraître dans la revue "*Recherche en didactique des mathématiques*" sous le titre "Jeux de cadres et dialectique outil-objet".