PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ANDRZEJ KLOPOTOWSKI

Loi multidimensionnelle de Cauchy comme une distribution limite des sommes de vecteurs aléatoires dépendants

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1
« Probabilités », , p. 82-96
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987___1_82_0>

LOI MULTIDIMENSIONNELLE DE CAUCHY COMME UNE DISTRIBUTION LIMITE DES SOMMES DE VECTEURS ALEATOIRES DEPENDANTS

Andrzej KLOPOTOWSKI

Institut National des Sciences Appliquées de RENNES

Key words : Cauchy distribution, limit theorems, weak convergence, dependence of martingale type.
Code AMS : 60F

ABSTRACT

We compare sufficient conditions for the weak convergence of sums of dependent random vectors to the Cauchy law with the respective conditions for the normal law.

I. LOIS DE CAUCHY

a) Cas unidimensionnel

Par définition, la loi de Cauchy $C_\alpha : \mathcal{B}^1 \to [0,1]$ (avec le paramètre $\alpha > 0$ fixé) a la densité suivante :

$$\gamma_\alpha(x) \overset{df}{=} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1 ,$$

par rapport à la mesure de Lebesgue λ^1 sur $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}^1)$. (Pour simplifier les choses nous ne considérons que des lois de Cauchy symétriques par rapport au point zéro, c'est-à-dire, leur médiane est égale à 0). Sa fonction de répartition

$$F_\alpha(x) \overset{df}{=} C_\alpha((-\infty,x)), \; x \in \mathbb{R}^1,$$

est égale à :

$$F_\alpha(x) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha}\right), \; x \in \mathbb{R}^1 ,$$

et sa fonction caractéristique

$$\varphi_\alpha(t) \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}\,\varphi_\alpha(x)\,dx , \quad t \in \mathbb{R}^1 ,$$

est donnée par :

$$\varphi_\alpha(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad t \in \mathbb{R}^1 .$$

Il est évident que φ_α est infiniment divisible et $\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta}$, $\alpha,\beta > 0$.

Rappelons que chaque fonction caractéristique infiniment divisible $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ possède une décomposition unique dans la forme de Lévy-Khintchine suivante :

$$\varphi(t) = \exp\left\{ i(\mathbf{a},t) - \frac{1}{2}(\mathbf{t},A\mathbf{t}) + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(t,x)} - 1 - \frac{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}{1+\|\mathbf{x}\|^2}\right) \cdot \frac{1+\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \, d\mu(\mathbf{x}) \right\} \quad , \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d ,$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$, A est une $d \times d$ - matrice symétrique définie non-négative, μ est une mesure finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d)$ telle que $\mu(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Si l'on remplace $\dfrac{1+\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} d\mu(\mathbf{x})$ par $d\nu(\mathbf{x})$, on obtient une autre représentation, dite de Lévy, de φ ; la mesure ν est σ-finie et telle que :

$$\nu(\{0\}) = 0 \, , \; \nu[\|\mathbf{x}\| > 1] < +\infty \, , \int_{[\|\mathbf{x}\| \le 1]} \|\mathbf{x}\|^2 \, d\nu(\mathbf{x}) < +\infty \cdot$$

Remarquons que la représentation de Kolmogoroff, la plus simple et la plus connue, ne peut pas être appliquée pour des lois de Cauchy, parce que elles n'ont pas d'espérance finie.

Théorème 1. La représentation de Lévy-Khintchine pour la loi de Cauchy
$C_\alpha : b^1 \to [0,1]$ est la suivante :

$$\mathbf{a} = 0, \; A = 0 \, , \; \mu(E) = \frac{\alpha}{\pi} \int_E \frac{dx}{1+x^2} \, , \; E \in \mathcal{B}^1 \quad .$$

Démonstration : Il suffit de démontrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}^1$ fixé, on ait :

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = -\pi|t| \, ,$$

où

$$g_t(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \left(e^{itx} - 1 - \dfrac{itx}{1+x^2}\right)\dfrac{1}{x^2} & , x \in \mathbb{R}^1 , x \neq 0 \\ -\dfrac{t^2}{2} & , x = 0 \end{cases} ,$$

ce qui est une application assez facile du théorème des résidus.

Nous allons présenter maintenant une preuve élémentaire de (1), trouvée par M. David BEKOLLE, afin de donner une idée de la démonstration dans le cas multidimensionnel.

Fixons $\varepsilon > 0$ et divisons l'intégrale considérée pour trois parties :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_t(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \overset{df}{=} I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon) + I_3(\varepsilon) .$$

La fonction

$$h_t(x) \overset{df}{=} \begin{cases} \dfrac{itx}{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{x^2} & x \in \mathbb{R}^1 , x \neq 0 , \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est impaire et intégrable sur $[\varepsilon,+\infty)$, donc :

$$\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) h_t(x)dx = 0 .$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$(2) \qquad I_1(\varepsilon) + I_3(\varepsilon) = \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{e}^{+\infty} \right) \frac{e^{itx} - 1}{x^2} dx =$$

$$= \frac{e^{it\varepsilon} + e^{-it\varepsilon} - 2}{\varepsilon} + it \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{e^{itx}}{x} dx .$$

La fonction $\frac{\cos tx}{x}$ est impaire et intégrable sur $[\varepsilon,+\infty)$; la fonction $\frac{\sin tx}{x}$ est paire, alors le dernier terme dans (2) est égal à :

$$- 2\, t \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin tx}{x}\, dx = - 2|t| \int_{|t|\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy .$$

La fonction g_t est continue et bornée sur $\mathbb{R}^1$, donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_2(\varepsilon) = 0$$

et, de plus ,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{it\varepsilon} + \varepsilon^{-it\varepsilon} - 2}{\varepsilon} = 0 \quad ,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|t|\varepsilon}^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2} ,$$

donc on obtient (1) . Δ

Remarque 1 : Nous avons démontré en particulier, que la mesure de Lévy – Khintchine μ de la loi $C_1(\alpha=1)$ est égale à la mesure d'origine C_1. Est-ce qu'il existe des autres lois infiniment divisibles avec cette propriété ?

b) Cas multidimensionnel

Commençons par un fait élémentaire :

Lemme 1. La fonction caractéristique infiniment divisible telle que $\mathbf{a}=0$, A=0, est invariante par rapport à toute rotation autour de zéro dans $\mathbb{R}^d$ si et seulement si sa mesure de Lévy-Khintchine μ possède cette propriété.

Si la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ^d sur $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}^d)$, alors le même résultat est vrai pour sa densité.

La loi de Cauchy d-dimensionnelle (avec le paramètre $\alpha > 0$) $C_\alpha : \mathcal{B}^d \to [0,1]$ est donnée par la densité suivante :

$$\gamma_\alpha(x) \overset{df}{=} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Pi^{\frac{d+1}{2}}} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \|\mathbf{x}\|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^d ,$$

$$\left(\text{où } \|\mathbf{x}\| \overset{df}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_d^2} \; , \; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \right)$$

Sa fonction caractéristique $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ a la forme suivante :

$$\varphi_\alpha(\mathbf{t}) = e^{-\alpha\|t\|}, \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \ ,$$

donc elle est infiniment divisible.

Théorème 2. Les représentants de Lévy-Khintchine pour la loi de Cauchy C_α sont les suivants :

$$a = \mathbf{0}\,,\ A = 0\,, \qquad \mu(\{0\}) = 0\,, \qquad \mu(E) = \int_E \frac{c}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)\ \|\mathbf{x}\|^{d-1}}\, d\mathbf{x}\,,\ E \in \mathcal{B}^d \ ,$$

où

$$(3) \qquad c \overset{df}{=} \alpha \cdot \frac{1}{\pi}\ \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\frac{\pi}{2})^{d-1}} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\frac{\pi}{2})^{d}} \ .$$

Démonstration. En utilisant les coordonnées polaires on montre très facilement que $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$, donc la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par :

$$f(\mathbf{t}) \overset{df}{=} \exp\{\, c \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} - 1 - \frac{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}{1+\|x\|^2} \right) \frac{1+\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}\, d\mu(\mathbf{x}) \,\} =$$

$$= \exp\left\{ c \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i(\mathbf{t},\mathbf{x})} - 1 - \frac{i(\mathbf{t},\mathbf{x})}{1+\|\mathbf{x}\|^2} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{d+1}}\, d\mathbf{x} \right\},\ \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \ ,$$

est une fonction caractéristique infiniment divisible.

La densité de la mesure μ est invariante par rapport aux rotations autour de zéro de $\mathbb{R}^d$, donc la fonction f l'est aussi.

Fixons $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ et prenons la rotation $\Xi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui transforme le vecteur $\mathbf{t}$ en vecteur $(\|\mathbf{t}\|, 0, ..., 0)$. Evidemment $f(\mathbf{t}) = f(\Xi\, \mathbf{t})$, donc il suffit de démontrer que :

$$(4) \qquad c \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\|\mathbf{t}\|x_1} - 1 - \frac{i\|\mathbf{t}\|\mathbf{x}_1}{1+\|\mathbf{x}\|^2} \right) \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{d+1}}\, d\mathbf{x} = -\ \alpha\|\mathbf{t}\| \ .$$

La partie gauche de (4) est égale à :

$$c \, . \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{[|x_1|>\varepsilon]} \left(e^{i\|t\|x_1} - 1 - \frac{i\|t\|x_1}{1+\|x\|^2} \right) \frac{1}{\|x\|^{d+1}} \, dx_1 \, dx_2 \dots dx_d =$$

$$= c \lim_{e \to 0} \int_{[|x_1|>\varepsilon]} \frac{e^{i\|t\|x_1} - 1}{\|x\|^{d+1}} \, dx_1 \dots dx_d = \quad *$$

parce que la fonction $x \to \dfrac{i\|t\|x_1}{(1+\|x\|^2)\,\|x\|^{d+1}}$ est impaire.

Fixons pour le moment $\varepsilon > 0$. Remarquons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx_d}{(x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{d+1}{2}}} = \frac{1}{(x_1^2 + \dots + x_{d-1}^2)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{d+1}{2}}} ,$$

donc en répétant ceci plusieurs fois par rapport à $x_{d-1}, x_{d-2}, \dots, x_2$, on obtient que :

$$* = c \, . \, c_d \, . \, c_{d-1} \dots c_2 \, . \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x_1|>\beta\varepsilon} \frac{e^{i\|t\|x_1} - 1}{x_1^2} \, dx_1 ,$$

où

$$c_k \overset{df}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{k+1}{2}}} = \int_0^1 t^{\frac{k}{2}-1} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \, dt = B\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})}$$

pour k=2,...,d.

Maintenant il faut observer deux choses :

$$c.c_2.c_3 \dots c_{d-1} \, c_d = \frac{\alpha}{2} \; \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\frac{\pi}{2})^d} \prod_{k=2}^{d} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{k}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{2} \; \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{(\frac{\pi}{2})^d} \; \frac{(\frac{\pi}{2})^{d-1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} = \frac{\alpha}{\pi} \quad ,$$

de plus, la fonction $x_1 \to \dfrac{\sin(\|t\| x_1)}{x_1}$ est impaire, donc :

$$\int_{|x_1|>\varepsilon} \frac{e^{i\|t\|x_1} - 1}{x_1^2}\, dx_1 = \int_{|x_1|>\varepsilon} \frac{\cos \|t\| x_1 - 1}{x_1^2}\, dx_1 =$$

$$= 2\,\frac{\cos(\|t\|\varepsilon) - 1}{\varepsilon} - 2\|t\| \int_{\varepsilon\|t\|}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du \underset{\varepsilon \to 0}{\to} - \|t\| \,.\, \pi \quad ,$$

ce qui donne (4) .

II. THEOREMES LIMITE

Considérons une suite double

$$\mathfrak{X} \overset{df}{=} \{ \{ X_{nk} \,;\, 1 \le k \le k_n \} \,;\, n \in \mathbb{N} \}$$

des vecteurs aléatoires d-dimensionnels définis sur un espace probabilisé fixé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$.

Nous allons discuter maintenant la convergence en loi de la suite des sommes

$$S_n \overset{df}{=} \sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \;,\; n \in \mathbb{N} \;,$$

vers la loi de Cauchy d-dimensionnelle C_α. L'un des exemples standards de la théorie des probabilités est le suivant : si les variables aléatoires X_n , $n \in \mathbb{N}$, sont indépendantes et équidistribuées selon la loi de Cauchy, alors leurs moyennes arithmétiques $\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$, $n \in \mathbb{N}$, ayant toujours la même distribution (de Cauchy) convergent en loi et ne satisfont pas la loi des grands nombres.

Malgré le fait que les conditions suffisantes très générales (et nécessaires dans le cas d'indépendance) pour la convergence en loi de S_n , $n \in \mathbb{N}$ vers une loi infiniment divisible quelconque sont bien connues (voir [3],[5]), leur formulation explicite pour la loi de Cauchy n'est pas très répandue (nous n'avons jamais vu, sauf le cas particulier cité ci-dessus).

Ces conditions suffisantes sont exprimées en termes des représentations canoniques diverses des lois limites, donc en ayant une telle loi comme une limite potentielle, il faut au moins trouver une de ses représentations, ce que nous venons de faire pour les lois de Cauchy.

Il y a aussi une autre motivation pour écrire cette note. En choisissant convenablement les paramètres, on peut avoir une certaine ressemblance entre les lois de Cauchy et les lois normales.

Par exemple, regardons le cas où $\alpha = 1$, m = 0, $\sigma = 1{,}4817$.

x	$\Pr[X \le x]$			x	$\Pr[X \le x]$		
	C_α	$N(m,\sigma)$	–		C_α	$N(m,\sigma)$	–
0,0	0,5000	0,5000	0	2,2	0,8642	0,9312	−0,0670
0,2	0,5628	0,5537	+0,0091	2,4	0,8743	0,9474	−0,0731
0,4	0,6211	0,6064	+0,0147	2,6	0,8831	0,9603	−0,0772
0,6	0,6720	0,6572	+0,0148	2,8	0,8908	0,9706	−0,0798
0,8	0,7148	0,7054	+0,0094	3,0	0,8976	0,9785	−0,0809
1,0	0,7500	0,7502	−0,0002	3,2	0,9036	0,9846	−0,0810
1,2	0,7789	0,7910	−0,0121	3,4	0,9089	0,9891	−0,0802
1,4	0,8026	0,8276	−0,0250	3,6	0,9138	0,9925	−0,0787
1,6	0,8222	0,8599	−0,0377	3,8	0,9181	0,9948	−0,0767
1,8	0,8386	0,8878	−0,0492	4,0	0,9220	0,9965	−0,0745
2,0	0,8524	0,9115	−0,0591	3σ	0,9295	0,9987	−0,0692

On pourrait espérer naïvement que deux distributions "semblables" devraient engendrer les théorèmes limite aussi "similaires", c'est-à-dire, le comportement de termes des sommes convergentes en loi vers la loi normale ou vers la loi de Cauchy devrait présenter une ou quelques "choses communes". Les théorèmes suivants montrent que le raisonnement "les effets (résultats) aléatoires semblables doivent être provoqués par les raisons aléatoires semblables" est faux (ce qui n'est pas une révélation en général) dans le cadre des théorèmes limite.

Supposons qu'il existe une suite double

$$\mathbb{F} \stackrel{df}{=} \{\{\mathcal{F}_{nk}\,;\, 0 \le k \le k_n\}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

de σ–sous algèbres de f telles que :

1°/ $\mathcal{F}_{n,k} \subset \mathcal{F}_{n,k+1}$ pour tous $0 \le k \le k_n$ et $n \in \mathbb{N}$;

2°/ chaque n-ième ligne de $\mathcal{X}$ est adaptée à la n-ième ligne de $\mathbb{F}$, c'est-à-dire, $X_{n,k}$ est $\mathcal{F}_{n,k}$ - mesurable pour tous $1 \le k \le k_n$ et $n \in \mathbb{N}$;

et il existe une suite double

$$\mathcal{A} \overset{df}{=} \{ \{A_{nk} ; 1 \le k \le k_n\} ; n \in \mathbb{N} \}$$

de vecteurs aléatoires d-dimensionnels prévisible par rapport à $\mathbb{F}$, c'est-à-dire,

3°/ chaque $A_{n,k}$ est $\mathcal{F}_{n,k-1}$ –mesurable pour tous $1 \le k \le k_n$ et $n \in \mathbb{N}$.

De plus, supposons que les vecteurs aléatoires :

$$Y_{nk} \overset{df}{=} X_{nk} - A_{nk} \ , \ 1 \le k \le k_n , n \in \mathbb{N} ,$$

satisfont aux conditions suivantes :

$$\text{(C.0)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left| E\left(e^{i(t,Y_{nk})} - 1 \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \right|^2 \xrightarrow{P} 0, \ t \in \mathbb{R}^d ,$$

$$\text{(C.1)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} \left\{ A_{nk} + E\left(\frac{Y_{nk}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \right\} \xrightarrow{P} 0 \ ,$$

$$\text{(C.2)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{Y_{nki} Y_{nki}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \xrightarrow{P} c \int_{R^d} \frac{x_i x_j dx}{\|x\|^{d+1}(1+\|x\|^2)} \ , 1 \le i, j \le d \ ,$$

$$\text{(C. 3)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} I(Y_{nk} \in E) \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \xrightarrow{P} c \int_E \frac{dx}{\|x\|^{d-1}(1+\|x\|^2)} , E \in \mathcal{B}^d, \lambda(\partial E)=0, 0 \notin \overline{E} \ .$$

Alors le théorème 3.4 de [5] dit que les sommes S_n , $n \in \mathbb{N}$, convergent en distribution vers la loi de Cauchy avec le paramètre α (la constante c est est donnée par (3), $\xrightarrow{P}$ dénote la convergence en probabilité).

Remarque 2. Sous l'hypothèse (C.2) la condition (C.0) est équivalente à

$$\text{(C.0*)} \qquad \text{a)} \quad \max_{1 \le k \le k_n} P(\|Y_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} \ , \ \varepsilon > 0$$

et

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k_n} \left\| E\left(\frac{Y_{nk}}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \right\|^2 \xrightarrow{P} 0$.

Remarque 3. La condition (C.0*) est plus générale que la condition :

$$(I.1) \qquad \max_{1\le k\le k_n} P(\|X_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} 0, \ \varepsilon > 0 \quad .$$

Remarque 4. Les conditions (C.2) et (C.3) ensemble sont équivalentes à :

$$(C.3^*) \qquad \sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} I(Y_{nk} \in E) \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \xrightarrow{P} c \int_E \frac{dx}{(1+\|x\|^2)\,\|x\|^{d-1}}$$

pour <u>tous</u> $E \in \mathcal{B}^d$ tels que $\lambda^d(\partial E) = 0$.

(L'implication (C.2) et (C.3) $\to$ (C.3*) est triviale. Pour l'implication réciproque, il suffit de démontrer que pour tous $1 \le i \le j \le d$ fixés on a

$$\sum_{k=1}^{k_n} E\left(\frac{Y_{nki}Y_{nkj}}{\|Y_{nk}\|^2} \cdot \frac{\|Y_{nk}\|^2}{1+\|Y_{nk}\|^2} \mid \mathcal{F}_{nk-1} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{P} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^2} \cdot \frac{c\,dx}{(1+\|\mathbf{x}\|^2)\,\|\mathbf{x}\|^{d-1}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^2} \, d\mu(\mathbf{x}) \ ,$$

ce qui vient des faits que la fonction $\mathbf{x} \longrightarrow \dfrac{x_i x_j}{\|\mathbf{x}\|^2}$ est bornée et continue partout sauf $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$ et $\mu(\{\mathbf{0}\}) = 0$, $\mu(\mathbb{R}^d) < +\infty$ (pour la méthode de démonstration, voir les théorèmes 3.1 et 4.2 de [5]).)

Remarque 5. On pourrait supposer que la condition (C.3*) est équivalente à :

$$(C.4) \qquad \sum_{k=1}^{k_n} P(Y_{nk} \in E \mid \mathcal{F}_{n,k-1}) \xrightarrow{P} \int_E \frac{c}{\|\mathbf{x}\|^{d+1}} \, dx$$

pour <u>tous</u> $E \in \mathcal{B}^d, \lambda^{(d)}(\partial E) = 0$.

On sait ([5],th.4.1) que ces deux conditions sont équivalentes pour $E \in \mathcal{B}^d$

vecteurs Y_{nk} autour de zéro.
Alors la condition (C.3*) est équivalente avec (C.4) et

$$\text{(C.5)} \qquad \underset{\varepsilon,n}{\mathrm{Lim}} \sum_{k=1}^{k_n} E(\|Y_{nk}\|^2 \; I\|Y_{nk}\| \le \varepsilon \;) \mid \mathcal{F}_{nk-1} \;) = 0 \,, \varepsilon > 0 \quad ,$$

(voir [6] p. 37 pour la définition de $\underset{\varepsilon,n}{\mathrm{Lim}}$; c'est une version "en probabilité" de la limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \begin{Bmatrix} \liminf\limits_{n\to\infty} \\ \limsup\limits_{n\to\infty} \end{Bmatrix}$ utilisée dans le théorème limite de Lévy).

Pour démontrer l'implication : (C.4) et (C.5) ——> (C.3*), il faut faire des calculs assez lourds.
Leur idée et leur résultat final peuvent être exprimés dans la forme élémentaire suivante (n-ième version du lemme de Helly-Bray) :

Lemme 2. Supposons qu'une suite de mesures finies $\{\nu_n : \mathcal{B}^d \to \mathbb{R}^+ ; n \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$\lim_{\beta\to 0} \limsup \int_{\|x\|\le\beta} \|\mathbf{x}\|^2 \, d\nu_n = 0$$

converge vaguement vers une mesure σ–finie $\nu : \mathcal{B}^d \to \mathbb{R}^+$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\text{(6)} \qquad \int_{\|\mathbf{x}\|\le\beta} \|\mathbf{x}\|^2 \, d\nu < +\infty \,,$$

$$\text{(7)} \qquad \int_{\|\mathbf{x}\|>\beta} d\nu < +\infty \quad .$$

Alors pour chaque fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^1$ continue et bornée telle que :

$$\text{(8)} \qquad \limsup_{x\to 0} \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|^2} < +\infty$$

nous avons :

$$(9) \qquad \lim \int_E f\, d\nu_n = \int_E f\, d\nu$$

pour tout $E \in \mathrm{Cont}\, \nu$.

Remarquons ici que la mesure (de Lévy de C_α)

$$\nu(E) \overset{df}{=} \int_E \frac{c}{\|x\|^{d+1}}\, dx\,, \quad E \in \mathcal{B}^d$$

est σ–finie et elle satisfait (6) et (7) .

La démonstration de l'implication (C.3*) $\rightarrow$ (C.4) et (C.5) est contenue implicitement dans les démonstrations des théorèmes 4.1 et 4.2 de [5].

On peut résumer notre discussion dans la forme suivante :

Théorème 3. Si le système $(\mathfrak{X}, \mathbb{F}, \mathcal{C})$ décrit ci-dessus satisfait aux conditions (C.1) et (C.3*), où (C.1), (C.4) et (C.5) et à la condition (C.0*) , alors il converge en loi vers la loi de Cauchy C_α .

Une des conséquences immédiates du théorème 4.2 de [5] est la suivante :

Théorème 4. Si le système $(\mathfrak{X}, \mathbb{F})$ satisfait (I.1) et :

$$\text{(L.1)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} P(X_{nk} \in E \mid \mathfrak{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} \int_E \frac{cdx}{\|x\|^{d+1}}, \quad 0 \notin \overline{E}\,,$$

$$\text{(L.2)} \quad \operatorname*{Lim}_{\varepsilon,n} \Big\{ \sum_{k=1}^{k_n} E(X_{nki} X_{nkj} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathfrak{F}_{nk-1}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{k_n} E(X_{nki}\, I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathfrak{F}_{nk-1})\; E(X_{nkj} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathfrak{F}_{nk-1}) \Big\} = 0,$$

(L.3) il existe un ensemble borné $V \in \mathrm{Cont}\, \nu$ tel que $0 \in \mathrm{Int}\, V$ et

$$\text{(L.3)} \quad \sum_{k=1}^{k_n} E(X_{nk} I(X_{nk} \in V) \mid \mathfrak{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} c \int_V \frac{xdx}{(1+\|x\|^2)\, \|x\|^{d-1}} -$$

$$- c \int_{\mathbb{R}^d \setminus V} \frac{x\,dx}{(1+\|x\|^2)\,\|x\|^{d+1}} \quad ,$$

alors il converge en loi vers la loi de Cauchy $C_\alpha : \mathcal{B}^d \to [0,1]$.

(En prenant un ensemble $V \in \mathrm{Cont}\, \nu$ quelconque symétrique par rapport au zéro tel que $\mathbf{0} \in \mathrm{Int}\, V$ (par exemple $V = \{\|\mathbf{x}\| \le \varepsilon\}$), la limite à droite de (L.3) est égale à $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^d$).

Nous avons démontré dans [4] et [5] le théorème suivant :

Théorème 5. Si le système ($\mathcal{X}$,$\mathbb{F}$) satisfait aux conditions suivantes :

(N.0.1) $$\sum_{k=1}^{k_n} P(\|X_{nk}\| > \varepsilon \mid \mathcal{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} 0 , \varepsilon > 0 \quad ,$$

(N.2) $$\sum_{k=1}^{k_n} \{ E(X_{nki}X_{nkj} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathcal{F}_{nk-1}) -$$
$$- E(X_{nki} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathcal{F}_{nk-1}) E(X_{nkj} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathcal{F}_{nk-1}) \}$$
$$\xrightarrow{P} a_{ij} , \varepsilon > 0 \ , \ 1 \le i, j \le d \ ,$$

(N.3) $$\sum_{k=1}^{k_n} E(X_{nk} I(\|X_{nk}\| \le \varepsilon) \mid \mathcal{F}_{nk-1}) \xrightarrow{P} 0 , \ \varepsilon > 0 \ ,$$

alors les sommes S_n, $n \in \mathbb{N}$, convergent en distribution vers la loi normale $n(0,[a_{ij}])$.

Maintenant nous pouvons comparer les conditions suffisantes (qui sont aussi nécessaires dans le cas de l'indépendance dans chaque ligne de) pour la convergence en distributions vers la loi normale ou vers la loi de Cauchy. On voit tout de suite que l'infinitésimalité (I.1) est impliquée par (N.0.1) ; les conditions (L.3) et (N.3) disent en principe la même chose ; les différences principales sont exprimées par les côtés droits de (N.0.1) et (L.1), de (L.2) et (N.2). Alors malgré une certaine ressemblance entre les densités de deux lois considérées, le comportement limite des systèmes vecteurs aléatoires convergeant en loi vers elles doit être <u>extrêmement</u> différent.

III. QUESTION

Considérons maintenant une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ donnée par :

$$\psi(\mathbf{t}) \overset{df}{=} e^{-\rho(\mathbf{t})}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d ,$$

où $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ est une semi-norme. Est-ce que ψ est une fonction caractéristique ?

Ferguson [2] a démontré que la réponse est positive pour d = 2 et elle est partiellement négative pour d ≥ 3. Par exemple exp $\{-\max(|t_1|,|t_2|,|t_3|)\}$ n'est pas une fonction caractéristique.

On sait ([1]), que ψ est une fonction caractéristique si et seulement si l'ensemble

$$W \overset{df}{=} \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d ; |(\mathbf{x},\mathbf{t}) \leq 1 \text{ pour chaque } \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \rho(\mathbf{t}) \leq 1 \}$$

est une image d'une certaine mesure vectorielle $\mu : (\Omega, \mathfrak{F}) \to \mathbb{R}^d$ telle que $\int x_i \, \mu(d\mathbf{x}) = 0$ pour chaque $1 \leq i \leq d$, mais cette condition n'est pas très opérationnelle.

Supposons que ψ est une fonction caractéristique ; alors elle est infiniment divisible, donc il faut trouver ses représentations canoniques. Nous les avons trouvées pour $\exp(-|t_1| - |t_2|)$, $\exp(-\max\{|t_1|, |t_2|\})$, $\exp(-|t_1| - \max\{|t_1|,|t_2|\})$, mais ceci ne donne pas de "recette générale". Les théorèmes limite obtenus dans ces cas particuliers ne sont pas très encourageants...

Est-ce qu'il est raisonnable de développer la théorie dans cette direction ?

Je tiens à remercier Monsieur David BEKOLLE pour les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble et Monsieur Gérard LETAC pour ses informations précieuses.
Mes remerciements également à Madame MARTIN pour la frappe de cet article.

Enfin je profite de cette occasion pour remercier tous mes collègues de l'I.N.S.A. qui ont rendu mon séjour dans cette Ecole d'Ingénieurs très agréable.

REFERENCES

[1] DIESTEL, Y., UHL, Y.Y.Jr. (1977) : *Vector measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[2] FERGUSON, T.S. (1962) : *A representation of the symmetric bivariate Cauchy distribution*, Annals of Statistics, vol. , 1256-1266.

[3] GNEDENKO, B.V., KOLMOGOROV, A.N. (1954) : *Limit distributions for*

sums of independent random variables, Addison Wesley, Cambridge, Mass.

[4] KLOPOTOWSKI, A. (1974) : *On asymptotic normality of sums of dependent random variables with variances net necessarily finite*, Preprints of Math. Inst. N. Copernicus University of Torun, N° 19, May, 1974.

[5] KLOPOTOWSKI, A. (1977) : *Limit theorems for sums of dependent random vectors in* $\mathbb{R}^d$, Dissert. Math., vol. CLI, PWN, Warszawa.