

YVES GUIVARC'H

**Sur les solutions d'une équation fonctionnelle non
linéaire de B. Mandelbrot**

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 1
« Probabilités », , p. 56-81

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1987__1_56_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SOLUTIONS D'UNE EQUATION
FONCTIONNELLE NON LINEAIRE DE
B. MANDELBROT**

Yves GUIVARCH
IRMAR
UNIVERSITE DE RENNES I
CAMPUS DE BEAULIEU
35042 RENNES CEDEX

Résumé

On étudie les solutions d'une équations à coefficients aléatoires généralisant celle des lois semi-stables.

On montre l'existence d'une famille de solutions analogues aux lois stables sur $\mathbb{R}^+$ d'indice inférieur à 1 et d'une loi particulière jouant un rôle analogue à celui de la loi de Gauss.

On précise également la convergence vers ces lois limites d'un procédé itératif naturel.

Code : AMS 60 E

Introduction

Considérons la demi-droite positive $\mathbb{R}^+$, une mesure de probabilité α sur $\mathbb{R}^+$, un entier $c > 1$ et notons $*$, $\circ$, respectivement les convolutions additives et multiplicatives sur $\mathbb{R}^+$. L'équation E suivante :

$$(E) \quad v = Tv = (\alpha \circ v) * \dots * (\alpha \circ v)$$

où v est une probabilité et le signe $*$ est répété $c-1$ fois a été introduite en [5] afin de préciser un modèle de turbulence défini par Kolmogorov et Yaglom. L'étude de cette équation se révèle délicate à cause de la présence des deux convolutions et des interprétations probabilistes sont utiles.

Désignons par A, X des variables aléatoires de lois α, v respectivement et par A_k, X_k ($1 \leq k \leq c$) des copies indépendantes de A, X . L'équation précédente peut alors s'écrire en loi :

$$(E') \quad X = \sum_{k=1}^c A_k X_k$$

Si $c E(A) = 1$, T conserve les moyennes des probabilités et si de plus $E(A \log A) < \infty$ une solution non-triviale de (E) peut être construite [2] à l'aide d'une martingale associée : en ce cas $T^n(\delta_1)$ converge vers v .

Si $E(A \log A) \geq \infty$ la convergence précédente a lieu vers δ_0 .

Plusieurs questions ont été posées à ce propos dans [5] : préciser dans le premier cas l'allure à l'infini de v et dans le deuxième cas, normaliser la suite $T^n(\delta_1)$ de façon à obtenir une limite non-triviale. Ces questions contiennent comme cas particulier, si l'on fait abstraction de la condition $c E(A) = 1$ non respectée par normalisation, l'étude des lois stables sur $\mathbb{R}^+$ ou plutôt semi-stables au sens de [4], le cas semi-stables correspondant à des A_k constants. Il est possible d'apporter une réponse simple et complète à la première question : il existe un exposant λ tel que la limite de $t^{-\lambda} v[t, \infty]$ soit positive quand t tend vers l'infini. La réponse à la deuxième question consiste essentiellement à discuter l'équation $v = Tv$ et à préciser les bassins d'attraction des points fixes de T .

Il sera commode de travailler sur $\overline{\mathbb{R}^+}$ au lieu de $\mathbb{R}^+$ et d'introduire ainsi les deux solutions triviales δ_0 et δ_∞ .

On supposera que α a des moments de tous ordres, ne charge pas zéro et on donnera les preuves avec $c = 2$ pour alléger les notations.

On dira que la probabilité v a une queue d'ordre λ si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\lambda} v(t, \infty) = C \quad (0 < C < \infty)$$

et cette queue sera dite régulière si :

$$v[t, \infty] = \frac{C}{t^\lambda} + o\left(\frac{1}{t^{\lambda+1}}\right)$$

Afin de décrire brièvement les résultats obtenus, dans le langage de la dynamique associée à l'itération de T , on peut se donner A avec, par exemple $c E(A) > 1$, un paramètre k et décrire le comportement des solutions de (E') , où l'on remplace A par kA et l'on fait décroître k . Pour k grand, il n'y a que deux solutions δ_0, δ_∞ , la seconde étant stable au sens dynamique. Pour k petit, il y a deux solutions stables δ_0 et δ_∞ , avec des bassins d'attraction que l'on précise, et une famille nouvelle de solutions instables J_k . Ceci vaut en particulier pour le cas $E(A \log A) > 0$, $k c E(A) = 1$ où la solution construite en [2] devient triviale. Lorsque k varie le gain de stabilité de la solution δ_0 s'effectue de manière "douce" et s'accompagne de l'apparition de la famille instable J_k . D'autre part, si $E(A \log A) < 0$ et $k c E(A) = 1$, il y a apparition brusque d'une autre famille J'_1 de solutions instables qui disparaît aussitôt pour laisser place à la famille J_k . La famille J'_1 est celle construite en [2] et son instabilité est moins marquée que celle de J_k .

Les solutions de J_k , comme celles de J'_1 possèdent des queues dont l'exposant se calcule aisément. Enfin ces résultats permettent de répondre à diverses questions de [5] et de préciser certains résultats de [2]. Les lois de J'_1 apparaissent comme analogues des lois de Gauss tandis que celles de J_k sont analogues aux lois stables, portées par $\mathbb{R}^+$, et d'indice inférieur à 1.

A) Construction de solutions

I - UNE SOLUTION SPECIALE

1) Construction [cf 2]

Soient $A(j_1, j_2, \dots, j_k)$ une famille de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathbb{Q}$ indexée par les intervalles c -adiques

$$I(j_1, j_2, \dots, j_n) = \left[\sum_{k=1}^n j_k c^{-k}, \sum_{k=1}^n j_k c^{-k} + c^{-n} \right]$$

et posons : $Y_n = \sum_{j_1, \dots, j_n} A(j_1) A(j_1, j_2) \dots A(j_1, \dots, j_n)$

Alors on a bien, en loi :

$$Y_{n+1} = \sum_{k=1}^c A_k Y_n^k$$

où les Y_n^k sont indépendantes de même loi que Y_n , les A_k indépendantes entre

Si $c E(A) = 1$, la suite Y_n forme une martingale et il est montré en [2] que Y_n converge p.p. vers Y_∞ avec $Y_\infty > 0$ ou $Y_\infty = 0$ suivant que $E(A \log A) < 0$ ou $E(A \log A) \geq 0$.

Dans le cas $E(A \log A) < 0$, ce procédé fournit une solution de (E) qui est la loi ν de Y_∞ . Cette solution ainsi que les solutions déduites par homothéties seront dites spéciales.

Il est clair que la condition $c E(A) = 1$ est nécessaire pour qu'il y ait une solution de (E) avec moment d'ordre 1.

2) Comportement à l'infini des solutions spéciales.

Le théorème suivant répond à une conjecture de [5] prédisant pour $\nu[t, \infty]$ un

comportement de la forme $\frac{C}{t^\chi}$ où χ est le nombre supérieur à 1, s'il existe, tel que $c E(A^\chi) = 1$. Par convexité de $E(A^t)$, si χ n'existe pas $E(A^t)$ est décroissante; d'ailleurs en ce cas ν possède des moments de tous ordres et A est portée par $[0, 1]$.

Théorème 1

Supposons que α ne soit portée ni par $[0, 1]$, ni par une progression géométrique de la forme k^n ($n \in \mathbb{Z}$). Alors la limite de $t^\chi \nu[t, \infty[$ existe et est positive.

Preuve

Posons $h(x) = x$ ($x \geq 0$) et notons que pour deux mesures de probabilités ε et η sur $\mathbb{R}^+$ on a : $h(\varepsilon * \eta) = h \varepsilon * \eta + \varepsilon * h \eta$.

L'équation $T\nu = \nu$ où ν est une solution canonique devient alors par multiplication par h :

$$h\nu = (2 h\alpha \circ h\nu) * \beta$$

avec $\beta = (\alpha \circ \nu) * \alpha \circ \nu$

Dans l'équation précédente, on peut considérer $h\nu$ comme l'inconnue et β comme donnée. Introduisons alors la probabilité p sur le groupe affine de la droite (identifiée à $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$) : $p = 2 h\alpha \times \beta$ et la convolution correspondante avec les mesures sur $\mathbb{R}$.

L'équation précédente s'écrit alors $p * h\nu = h\nu$.

Notons que, ν ayant des moments d'ordre inférieur à χ d'après [2], $h\nu$ est une mesure bornée. Ce type d'équation et l'allure des solutions ont été étudiées par H. KESTEN [3] où est obtenu le résultat suivant. [cf appendices]

Soient $a(g)$, $b(g)$ les composantes de l'application définie par $g(x) = ax + b$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$), p une probabilité sur le semi-groupe précédent telle que son support S ne fixe aucun point de $\mathbb{R}$ ni que les valeurs de $a(g)$ ($g \in S$) soient concentrées sur une progression géométrique de la forme k^n ($n \in \mathbb{Z}$) ; on suppose que : $\int \text{Log } a(g) d p(g) < 0$ et qu'il existe $\lambda > 0$ avec

$$\int a^\lambda(g) d p(g) = 1, \int b^\lambda(g) \text{Log}^+ b(g) d p(g) < +\infty ;$$

alors la probabilité μ solution de $p * \mu = \mu$ vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\lambda \mu(t, \infty) > 0.$$

Vérifions ces conditions ici :

$$\int \text{Log } a(g) d p(g) = 2 E(A \text{Log } A) < 0 \quad \int a^\lambda(g) d p(g) = 2 E(A^{\lambda+1}) = 1$$

pour $\lambda = \chi - 1$

De plus β a des moments d'ordre inférieur à χ , comme v et donc :

$$\int b^\lambda(g) \text{Log}^+ b(g) d p(g) = E((AX)^\lambda \text{Log}^+ AX) < +\infty \quad (\text{où } X \text{ est de loi } v) \text{ car } \lambda = \chi - 1 < \chi.$$

D'après le théorème cité, on a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\chi-1} (h v)[t, \infty] > 0$

Le passage à v est permis d'après [4] et donne :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v[t, \infty] > 0$$

Remarque

Si α est portée par une progression géométrique k^n ($n \in \mathbb{Z}$) un terme périodique multiplicatif s'introduit dans le comportement de $v(t, \infty)$ comme c'est déjà le cas dans la situation des lois semi-stables au sens de P. LEVY [4].

II - RELATION DE CONJUGAISON ET SOLUTIONS CANONIQUES.

Pour un nombre $\theta > 0$, notons M_θ l'extension aux mesures de l'application $x \rightarrow x^\theta$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Soit σ_θ la loi stable d'indice θ portée par $\mathbb{R}^+$ ($0 < \theta < 1$) et dont la transformée de Laplace vaut $\hat{\sigma}_\theta(\lambda) = e^{-\lambda^\theta}$. Pour une probabilité ε , posons $J_\theta(\varepsilon) = \sigma_\theta \circ \varepsilon$ et notons T_θ la transformation analogue à T obtenue en remplaçant α par $M_\theta(\alpha)$.

Donc ici $c E(A) \neq 1$ en général et si $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c E(A^\lambda) < 1$, il existe χ avec $0 \leq \chi \leq 1$

$c E(A^\chi) = 1$, $E(A^\chi \log A) < 0$ par convexité ;
le cas $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c E(A^\lambda) = 1$ donne χ avec $0 < \chi \leq 1$ et $c E(A^\chi) = 1$, $E(A^\chi \log A) = 0$

Proposition 1 :

On a la relation de conjugaison : $TJ_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta M_\theta$

Preuve

C'est un calcul direct tenant compte du fait que les puissances de convolutions $(\sigma_\theta)^t$ ($t \geq 0$) sont définies et forment un semi-groupe stable.

Pour condenser les notations on notera $\sigma_\theta = \sigma$, $TJ_\theta(\varepsilon) = (\alpha \circ \varepsilon \circ \sigma) * (\alpha \circ \varepsilon \circ \sigma) = \int \int (x \circ \sigma) * (y \circ \sigma) d(\alpha \circ \varepsilon)(x) d(\alpha \circ \varepsilon)(y)$. Posant $x^\theta = x'$, $y^\theta = y'$ et notant que $x \cdot \sigma = \sigma^{x'}$, $y \cdot \sigma = \sigma^{y'}$ on obtient :

$$TJ_\theta(\varepsilon) = \int \sigma^{x' + y'} dM_\theta(\alpha \circ \varepsilon)(x') dM_\theta(\alpha \circ \varepsilon)(y')$$

$$TJ_\theta(\varepsilon) = \int \sigma^z d[M_\theta(\alpha \circ \varepsilon) * M_\theta(\alpha \circ \varepsilon)](z)$$

Notant que $z^{1/\theta} \circ \sigma = \sigma^z$ et que M_θ est un homomorphisme pour la convolution multiplicative :

$$TJ_\theta(\varepsilon) = \int \sigma^{1/\theta} \circ \sigma d[(\alpha_\theta \circ \varepsilon_\theta) * (\alpha_\theta \circ \varepsilon_\theta)](z)$$

en notant $M_\theta(\alpha \circ \varepsilon) = \alpha_\theta \circ \varepsilon_\theta$

$$TJ_\theta(\varepsilon) = J_\theta [M_\theta^{-1} T_\theta(\varepsilon_\theta) = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta M_\theta(\varepsilon)]$$

Théorème 2 :

Supposons $\inf_{0 \leq \lambda \leq 1} c E(A^\lambda) < 1$ soit χ le nombre précédemment défini, v_χ

la solution spéciale définie pour l'opérateur T_χ associé à $M_\chi(\alpha)$.

Alors la mesure $v' = J_\chi M_\chi^{-1}(v)$ vérifie (E) : $T v' = v'$

Preuve

Il existe bien une solution spéciale pour T_χ car si $B = A^\chi$, $c E(B) = 1$

$$E(B \text{ Log } B) = \chi E(A^\chi \text{ Log } A) < 0$$

Alors : $T v' = T J_\chi (M_\chi^{-1} v_1) = J_\chi M_\chi^{-1} T_\chi v_1 = J_\chi M_\chi^{-1} (v_1)$ puisque $T_\chi v_1 = v_1$

Remarque :

La famille de solutions de (E) qui vient d'être définie par homothétie sera dite canonique. Ces mesures admettent une densité comme σ_χ et ont un comportement à l'infini "hyperbolique" d'indice χ :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'[t, \infty] = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi \left[\int x^{1/\chi} d v_\chi(x) \right] \sigma_\chi(t, \infty) > 0$$

B) Le cas spécial $c E(A) = 1$, $E(A \text{ Log } A) < 0$

I - UNICITE DE LA SOLUTION DE (E)

Proposition 1 :

Toute solution v de (E) vérifiant $\int \text{Log}^+(x) d v(x) < +\infty$ a un moment d'ordre 1.

Preuve

Reprenons les notations de A) avec $h(x) = x$ et q probabilité produit sur le groupe affine de composantes 2 $h \alpha$ et $\beta = \alpha \circ v$. La mesure de Radon $h v = \mu$ satisfait alors l'équation d'invariance $q * \mu = \mu$.

Montrons d'abord l'existence d'une mesure de probabilité μ' vérifiant $q * \mu' = \mu'$.

Considérons la suite de variables aléatoires :

$Z_n(\omega) = \sum_{k=0}^n a_1 \dots a_k b_{k+1}$ où les (a_k, b_k) sont indépendantes et distribuées suivant la loi q .

On a : $\overline{\lim}_k (a_1 \dots a_k b_{k+1})^{1/k} < 1$ (p.p) car $\frac{1}{k} \text{Log}(a_1 \dots a_k b_{k+1})$ converge d'après le théorème ergodique et l'hypothèse $\int \text{Log}^+ b d \beta(b) < +\infty$ vers un nombre au plus égal à $\int \text{Log} a d (h \alpha)(a) < 0$.

La variable $Z(\omega) = \lim_n Z_n(\omega)$ vérifie $Z(\omega) = a_1(\omega) Z(\theta \omega) + b_1(\omega)$ où θ est la translation naturelle sur l'espace produit. Sa loi μ' satisfait donc : $q * \mu' = \mu'$.

D'autre part la position à l'instant n de la trajectoire de la chaîne de Markov sur $\mathbb{R}^+$ de noyau de transition $Q(x, \cdot) = q * \delta_x$ est donnée par :

$S_n \cdot x = a_n \dots a_1 x + a_n \dots a_2 b_1 + \dots + b_n$ et $S_n \cdot x - a_n \dots a_1 x$ a même loi que $Z_{n-1}(\omega)$.

On a donc la convergence uniforme sur les compacts de :

$q^n * \delta_x(\varphi) = \int \varphi(S_n \cdot x) dP(\omega) = \int \varphi(Z_{n-1} + a_n \dots a_1 x) dP(\omega)$ vers $\int \varphi(y) d\mu'(y)$ dès que φ est continue à support compact. Ceci prouve en particulier l'unicité de la probabilité Q -invariante.

De plus, sur un intervalle compact $I \subset]0, \infty[$, on peut réaliser, pour n assez grand :

$$q^n * \delta_x(\varphi) \geq 1/2 \mu'(\varphi) \quad (x \in I)$$

et l'égalité $\mu(\varphi) = \int q^n * \delta_x(\varphi) d\mu(x)$ donne alors :

$$\mu(\varphi) \geq 1/2 \mu'(\varphi) \mu(I)$$

dès que φ est une fonction positive à support compact fixée. Ceci borne $\mu(I)$ indépendamment de I et montre que μ est une mesure bornée, avec à un coefficient près $\mu = \mu'$.

En particulier $h v$ est bornée, ce qui signifie que v a un moment d'ordre 1.

Définition

Pour un nombre λ ($0 < \lambda \leq 1$) et deux probabilités ε, η sur $\mathbb{R}^+$, on notera $d_\lambda^-(\varepsilon, \eta)$ la borne inférieure des intégrales $\int |x - y|^\lambda d\rho(x, y)$ où ρ est une probabilité sur $\mathbb{R}^2$ de projections ε, η . On notera $d_1 = d$.

Si ε et η ont des moments d'ordre λ , d_λ définit une distance qui a été étudiée par de nombreux auteurs [7]. Clairement $d_\lambda^-(\varepsilon, \eta)$ est la borne inférieure des nombres $E |X - Y|^\lambda$ où X et Y sont des variables aléatoires de lois ε et η .

Enfin la borne inférieure qui définit d_λ est atteinte [8] et de plus, si F et G désignent les fonctions de répartition de ε et η on a :

$$d(\varepsilon, \eta) = \int_0^\infty |F(x) - G(x)| dx$$

Proposition 2

Soient ε et η deux probabilités sur $\mathbb{R}^+$. Alors $d_\lambda(T\varepsilon, T\eta) \leq c E(A^\lambda) d_\lambda(\varepsilon, \eta)$

Si de plus $\int x d\varepsilon(x) = \int x d\eta(x) = 1$ et $d(T\varepsilon, T\eta) = d(\varepsilon, \eta)$ on a : $\varepsilon = \eta$

Preuve

On va utiliser l'interprétation probabiliste de la transformation T en notant X , X_1 (resp Y , Y_1) des variables aléatoires de lois ε , $T\varepsilon$ (resp η , $T\eta$).

Notant X' , X'' des copies indépendantes de X on a :

$$X_1 = A'X' + A''X'', \quad Y_1 = A'Y' + A''Y''$$

avec des notations naturelles.

Alors :

$$|X_1 - Y_1|^2 \leq |A'|^2 |X' - Y'|^2 + |A''|^2 |X'' - Y''|^2$$

$$E(|X_1 - Y_1|^2) \leq 2E(A^2)E(|X - Y|^2)$$

$$\text{et } d_\lambda(T\varepsilon, T\eta) \leq 2E(A^2)d_\lambda(\varepsilon, \eta)$$

En particulier, puisque $2E(A) = 1$:

$$d(T\varepsilon, T\eta) \leq d(\varepsilon, \eta)$$

Inversement soient X et Y des variables aléatoires de lois ε et η vérifiant $d(T\varepsilon, T\eta) \leq d(\varepsilon, \eta)$ $E(X) = E(Y) = 1$, avec, ce qui est possible $E|X - Y| = d(\varepsilon, \eta)$.

On choisit (X', Y') et (X'', Y'') indépendantes et de même loi que (X, Y) .

Si, avec probabilité positive, on a :

$$A'A''(X' - Y')(X'' - Y'') < 0$$

On aura, avec la même probabilité :

$$|X_1 - Y_1| < A'|X' - Y'| + A''|X'' - Y''|$$

$$\text{et } d(T\varepsilon, T\eta) \leq E(|X_1 - Y_1|) < E(|X' - Y'|) = d(\varepsilon, \eta)$$

Il est donc ici nécessaire que :

$$pp \quad A'A''(X' - Y')(X'' - Y'') \geq 0$$

Comme cette variable est d'espérance 0, on a :

$$\begin{aligned} A' A'' (X' - Y') (X'' - Y'') &= 0 \\ A' A'' |X' - Y'| |X'' - Y''| &= 0 \\ [E(A) E(|X - Y|)]^2 &= 0 \\ \text{ce qui donne } X &= Y, \quad \varepsilon = \eta \end{aligned}$$

Théorème 1

Avec les hypothèses de ce paragraphe, l'équation (E) possède à homothétie près, une unique solution parmi les probabilités sur $\mathbb{R}^+$ qui intègrent la fonction $\text{Log}^+ x$.

Preuve

Soit v la solution construite en A) et v' une deuxième solution. On peut supposer, d'après la **proposition 1** :

$$\int x dv(x) = \int x dv'(x) = 1$$

On a ici $d(Tv, Tv') = d(v, v')$ car $Tv = v, Tv' = v'$ et la **proposition 2** donne $v = v'$.

II - THEOREMES DE CONVERGENCE

1) Cas des probabilités ayant un moment d'ordre 1.

Théorème 2

Soit v' une probabilité ayant un moment d'ordre 1 et v la solution spéciale de (E) ayant même moment que v' . Alors on a :

$$\lim_n d(T^n v', v) = 0$$

En particulier $T^n v'$ converge vaguement vers v .

La preuve va découler de 3 lemmes.

Lemme 1 :

Soient x et y des réels positifs et $\lambda \geq 1$. Alors :

$$(x+y)^\lambda \leq x^\lambda + y^\lambda + \lambda x y^{\lambda-1}$$

Preuve

On se ramène par homogénéité à $(1+u)^\lambda \leq 1+u^\lambda + \lambda u^{\lambda-1}$ et c'est alors une étude élémentaire.

Lemme 2 :

Soit μ_n une suite de probabilités telle qu'il existe $\lambda > 1$ et $K > 0$ avec $\int x^\lambda d\mu_n(x) \leq K$ et supposons que μ_n converge étroitement vers μ .

Soit μ' une loi de probabilité ayant un moment d'ordre λ . Alors :

$$\lim_n d(\mu_n, \mu') = d(\mu, \mu')$$

Preuve

On utilisera les fonctions de répartition $F'_n(x) = \mu_n[x, \infty]$, $F'(x) = \mu[x, \infty]$.

La condition $\int x^\lambda dF'_n(x) \leq K$ implique :

$F'_n(x) \leq \inf(1, \frac{K}{x^\lambda})$. Ici $F'_n(x)$ converge vers la fonction de répartition F' de μ et $|F'_n - F'|$ est majorée par une fonction intégrable de x . On a donc par convergence dominée :

$$\lim_n \int |F'_n(x) - F'(x)| dx = \int |F'(x) - F'(x)| dx \quad \text{ce qui donne}$$

$$\lim_n d(\mu_n, \mu') = d(\mu, \mu').$$

Lemme 3 :

Soit λ un nombre compris entre 1 et $\inf(2, \chi)$, μ une probabilité ayant un moment d'ordre λ . Alors les moments d'ordre λ de la suite $T^n \mu$ sont bornés par une constante.

Preuve

Notons X', X'', X_1 des variables aléatoires de lois μ, μ et $T\mu$ respectivement, les deux premières variables étant indépendantes.

On a alors avec les notations de A)

$$X_1 = A'X' + A''X''$$

$$X_1^\lambda \leq A'^\lambda X'^\lambda + A''^\lambda X''^\lambda + \lambda A'X'(A''X'')^{\lambda-1}$$

$$\text{Ici } \lambda - 1 < 1 \text{ et } E(X''^{\lambda-1}) \leq E(X'')^{\lambda-1} = 2^{1-\lambda}$$

On a donc, avec une certaine constante k : $E(X_1^\lambda) \leq 2 E(A^\lambda) E(X^\lambda) + k$.

Si X_n est une variable aléatoire de loi $T^n \mu$ on a donc :

$$E(X_n^\lambda) \leq \frac{k}{1-\rho} + \rho^n E(X^\lambda) \leq K$$

où $\rho = 2 E(A^\lambda) < 1$

Preuve du théorème

a) On suppose d'abord que ν' a un moment d'ordre $\lambda > 1$.

On a $d(T^n \nu', \nu) \leq d(T^{n-1} \nu', \nu)$ puisque $T^n \nu' = T(T^{n-1} \nu')$. Posons alors

$$\gamma = \lim_n d(T^n \nu', \nu) = \inf_n d(T^n \nu', \nu)$$

La suite $T^n \nu'$ a des moments d'ordre λ bornés [$1 < \lambda < \inf(2, \chi)$] d'après le lemme 3.

Pour toute sous suite $T^{n_k} \nu'$ convergeant étroitement vers μ' on aura donc :

$$\gamma = \lim_n (T^{n_k} \nu', \nu) = d(\mu', \nu)$$

en vertu du lemme 2.

On a de même $\gamma = d(T\mu', \nu)$

Donc $d(T\mu', T\nu) = d(\mu', \nu) = \gamma$

Comme $\int x d\mu'(x) = \int x d\nu(x)$ on en conclut d'après la proposition 2 du paragraphe précédent : $\mu' = \nu$.

La suite $T^n \nu'$ converge donc vers ν .

b)

Si ν' a un moment d'ordre 1, elle est approchée, au sens de d , par des mesures ν'' à support compact avec $\int x d\nu''(x) = 1$.

On a alors :

$$d(T^n \nu', \nu) \leq d(T^n \nu', T^n \nu'') + d(T^n \nu'', \nu)$$

$$d(T^n \nu', \nu) \leq d(\nu', \nu'') + d(T^n \nu'', \nu)$$

ce qui permet de conclure.

2) Cas des probabilités sans moment d'ordre 1.

On se placera dans une sous-classe notée P_1 . Une probabilité μ appartiendra à P_λ ($\lambda > 0$) s'il existe $C > 0$, $\theta < \lambda$, $a > 0$ avec $\mu[t, \infty] \geq \frac{C}{t^\theta}$ pour $t \geq a$.

Un exemple, qui servira de comparaison est donné par les lois stables σ_θ de transformée de Laplace $e^{-\lambda^\theta}$; alors $\sigma_\theta[t, \infty] = \frac{C}{t^\theta}$.

On aura besoin de comparer des probabilités :

Définition :

On dira qu'une probabilité ε est stochastiquement inférieure à une autre η si l'on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varepsilon[t, \infty] \leq \eta[t, \infty]$$

On écrira alors $\varepsilon \ll \eta$

Cette condition équivaut à l'existence de variables aléatoires X et Y de lois ε et η vérifiant $X \leq Y$

Elle équivaut aussi à :

$$\int f(x) d\varepsilon(x) \leq \int f(x) d\eta(x)$$

pour toute fonction croissante f .

Théorème 3 :

Soit ν une probabilité appartenant à P_1 . Alors $T^n \nu$ converge vers δ_∞ étroitement.

La preuve découlera de 3 lemmes.

Lemme 1 :

$T^n(\sigma_\theta)$ tend vers δ_∞ .

Preuve

On utilise les notations de A) et en particulier la formule :

$$T^n J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta^n M_\theta$$

Le calcul de $T^n(\sigma_\theta)$ se ramène donc à celui de $T_\theta^n(\delta_1)$.

Or si l'on pose $k = 2 E (A^\theta) > 1$, on a, en considérant l'homothétie de rapport

$$k : (T_\theta)^n = k^n (S_\theta)^n \text{ où } S_\theta \text{ est définie à l'aide de la variable } B = \frac{A^\theta}{k}.$$

On a bien :

$$2 E (B) = \frac{2 E (A^\theta)}{k} = 1, \quad E [B \log B] < 0 \text{ car } E (A^\theta \log A) < 0 \text{ et } k > 1.$$

On peut donc appliquer le théorème 2 à S_θ :

$(S_\theta)^n (\delta_1)$ converge vers une loi spéciale associée à B et puisque $k > 1$ $(T_\theta)^n (\delta_1)$ tend vers δ_∞ .

Il en est de même de $T^n (\sigma_\theta)$.

Lemme 2 :

La transformation T préserve les inégalités stochastiques.

Preuve

Soient donc ε et η avec $\varepsilon \ll \eta$ et f fonction croissante.

Lorsque a, b, y sont fixés $f(ax + by)$ est encore fonction croissante de x :

$$\int f(ax + by) d\varepsilon(x) \leq \int f(ax + by) d\eta(x)$$

Par un argument analogue et une intégration en a et b :

$$T\varepsilon(f) \leq T\eta(f), \quad T\varepsilon \ll T\eta$$

Lemme 3 :

Soient X_n, Y_n deux suites de variables aléatoires. On suppose que $E |X_n - Y_n|$ est bornée et que X_n converge vers $+\infty$ en loi. Alors Y_n converge vers $+\infty$ en loi.

Preuve

On note que :

$$t P \{ |X_n - Y_n| > t \} \leq E |X_n - Y_n| \leq k$$

et que

$$P \{ Y_n \leq t \} \leq P \{ X_n \leq 2t \} + P \{ |X_n - Y_n| \geq t \}$$

Donc pour $a \leq t$:

$$P\{Y_n \leq a\} \leq P\{Y_n \leq t\} \leq \frac{K}{t} + P\{X_n \leq 2t\}$$

D'où le résultat voulu par le choix successifs de t et n .

Preuve du théorème :

On suppose donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf t^\theta v'(t, \infty) > 0$ pour un certain θ .

Une homothétie sur v' permet de supposer :

$$v'[t, \infty] \geq \sigma_\theta[t, \infty] \text{ pour } t \geq b$$

Soient Z et X' des variables aléatoires de lois σ_θ et v' respectivement.

Définissons la variable X comme étant égale à X' si $X' \geq b$ et égale à b si $X' < b$.

Alors la loi de X est stochastiquement supérieure à celle de Z car :

a)

Si $t > b$, $X' \geq t$ implique $X = X'$ donc $X \geq t$ et

$$P\{X \geq t\} \geq P\{X' \geq t\} \geq P\{Z \geq t\}$$

b)

Si $t \leq b$: $P\{X \geq t\} = 1 \geq P\{Z \geq t\}$

D'autre part $X - X'$ vaut 0 sauf si $X' < b$ auquel cas $X - X'$ est entre 0 et b : en particulier $E(|X - X'|) < b$.

Si η désigne la loi de X , on a alors :

$$d(T^n \eta, T^n v') \leq d(\eta, v') \leq b$$

$$\sigma_\theta \ll \eta, T^n \sigma_\theta \ll T^n \eta$$

On en déduit que $T^n \eta$ converge vers δ_∞ comme $T^n \sigma_\theta$ et il en est de même de $T^n v$

d'après le lemme 3.

C) Le cas général

Deux cas se présentent suivant l'existence ou la non-existence de $\chi < 1$ avec $c E(A^\chi) = 1$, $E(A^\chi \log A) < 0$.

Dans le premier cas, on va étudier l'unicité de la solution canonique v de (E) et les problèmes de convergence correspondants.

Dans le second cas, hormis le cas spécial, on va montrer la non-existence de solutions de (E) autre que δ_0 et δ_∞ et étudier les problèmes de convergence correspondants ; on a donc ici :

$$c E(A^\lambda) \geq 1 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

I - THEOREMES LIMITES : PREMIER CAS

Proposition 1 :

Soit v' une probabilité ayant un moment d'ordre supérieur à χ .

Alors $T^n v'$ converge vers δ_0 .

Preuve

Soit λ un nombre compris entre χ et 1 et vérifiant $c E(A^\lambda) < 1$.

Si l'on écrit l'équation $T^{n+1} v' = T[T^n v']$ avec les notations probabilistes de A), on a, car $\lambda < 1$:

$$E(X_{n+1}^\lambda) \leq c E(A^\lambda) E(X_n^\lambda)$$

et donc $\lim_n E(X_n^\lambda) = 0$, ce qui

donne bien $\lim_n T^n v' = \delta_0$.

Proposition 2 :

La seule solution de (E) possédant un moment d'ordre χ est δ_0 .

Preuve

Notons que si ε et η sont deux probabilités portées par $\mathbb{R}^+$ et si $h(x) = x$, on a :

$$\text{si } 0 < \lambda < 1 : h^\lambda(\varepsilon * \eta) \leq (h^\lambda \varepsilon) * \eta + \varepsilon * h^\lambda \eta$$

l'égalité ne pouvant alors lieu que si :

$$\varepsilon \text{ ou } \eta \text{ est égale à } \delta_0.$$

L'équation $Tv = v$ donne donc ici :

$$h^\chi v \leq [(2 h^\chi \alpha) \circ h^\chi v] * (\alpha \circ v)$$

considérons alors la probabilité q sur le groupe affine de $\mathbb{R}$ de composantes $2 h^\chi \alpha$ et $\alpha \circ v$; l'inéquation s'écrit :

$$q * 2 h^\chi v \geq h^\chi v$$

Si v admet un moment d'ordre χ , $h^\chi v$ est de masse finie et la conservation des masses implique l'égalité dans l'inéquation précédente.

Ceci s'écrit encore, avec $\varepsilon = \alpha \circ v$:

$$h^\chi (\varepsilon * \varepsilon) = h^\chi \varepsilon * \varepsilon + \varepsilon * h^\chi \varepsilon$$

On a donc :

$$\alpha \circ v = \delta_0 \quad \text{et} \quad v = \delta_0$$

Théorème 1 :

Si v' est une probabilité de P_χ , alors $T^n v'$ converge vers δ_∞ .

Preuve

Les considérations du paragraphe précédent aboutissant au théorème 3 sont ici valables, la différence étant que θ désigne un nombre inférieur à χ et que l'on utilise d_θ au lieu de d dans la preuve du théorème.

Théorème 2 :

Soit v' une probabilité telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'[t, \infty] = C > 0$

Alors $T^n v'$ converge vers une solution canonique de (E) .

Preuve

On reprend les arguments utilisés pour démontrer le théorème 3 et la proposition 2 de la partie B).

Soit v une solution canonique correspondant à la même constante C que v' .

Prenant $t \geq 1$, on a :

$$t \cdot v[x, \infty] \geq v[x, \infty] \quad \text{pour} \quad x \geq b$$

On peut donc trouver $v'' \gg v$ avec $d_\lambda(v'', t.v') < +\infty$ avec $\chi < \lambda$ et $2E(A^2) < 1$.

On a donc :

$$\lim_n d_\lambda [T^n v'', T^n(t.v')] = 0$$

$$\text{et } T^n v'' \gg T^n v = v$$

Une valeur d'adhérence de $T^n v''$ ou $T^n[t.v']$ sera donc stochastiquement supérieure à v et il en sera de même pour $T^n v'$, en faisant tendre t vers 1.

Prenant $t < 1$, on obtient l'inégalité contraire et toute valeur d'adhérence de $T^n v'$ coïncide donc

Corollaire

Toute solution v' de (E) telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\chi v'(t; \infty) = C > 0$ est une solution canonique.

Il n'y a pas de solution ^{de} (E) ayant un moment d'ordre χ , ni de solution dans P_χ .

II - THEOREMES LIMITES : CAS $cE(A^2) > 1$ ($0 \leq \lambda \leq 1$)

On a donc ici $cE(A) > 1$.

Théorème 3 :

Si v' est une loi de probabilité différente de δ_0 , $T^n v'$ converge vers δ_∞ .

L'équation (E) n'a donc pas de solutions autres que δ_0, δ_∞ .

Preuve

On distingue plusieurs cas :

a)

$E(A \log A) < 0$ et v' à support compact.

On remplace A par $B = A/k$ avec $k = 2E(A) > 1$ et alors :

$$E(B \log B) = \frac{1}{k} [E(A \log A) - E(A) \log k] < 0$$

Si alors S est la nouvelle transformation correspondant à B et ν une mesure invariante [$S\nu = \nu$] de même espérance que ν' , on a d'après le théorème 2 de B) :

$$\lim_n S^n \nu = \nu = \lim_n \frac{1}{k^n} \cdot T^n \nu'$$

Comme $k > 1$, on en conclut $\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty$

b)

$E(A \log A) < 0$ et ν' est stochastiquement supérieure à une mesure ν' à support compact ; par conservation des inégalités stochastiques on a :

$$\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty$$

c)

$E(A \log A) \geq 0$ mais $c E(A) > 1$.

Il est clair que l'on peut trouver une variable aléatoire $B \leq A$ avec $E(B^\lambda) \leq E(A^\lambda)$, $c E(B^\lambda) > 1$ si $0 \leq \lambda \leq 1$ et $E(B \log B) < 0$.

Si l'on note S' la transformation correspondante, on aura clairement :

$$S'^n \nu' \ll T^n \nu'$$

Comme d'après b) :

$$\lim_n S'^n \nu' = \delta_\infty,$$

On a aussi :

$$\lim_n T^n \nu' = \delta_\infty$$

III - CAS $E(A^\lambda \log A) = 0$, $c E(A^\lambda) = 1 < (0 < \lambda \leq 1)$

1) Cas $\lambda < 1$

Théorème 4 :

Il n'existe pas de solution de E (différente de δ_0) ayant un moment d'ordre λ ou une queue d'ordre λ régulière.

Preuve

L'inégalité $(u+v)^X \leq u^X + v^X$ donne ici, si X est une variable aléatoire vérifiant (E')

$$X = A'X' + A''X''$$

$$E(X^X) \leq 2 E(A^X) E(X^X) = E(X^X)$$

Cette égalité ne peut avoir lieu que si X' ou $X'' = 0$, c'est-à-dire $X = 0$.

Utilisons la relation de conjugaison du paragraphe A, avec $\theta = \chi$:

$$TJ_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T_\theta M_\theta$$

en l'appliquant à la mesure δ_1 .

On a aussi :

$$T^n J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} (T_\theta)^n M_\theta$$

$M_\chi \delta_1 = \delta_1$, $\lim_n T_\chi^n(\delta_1) = \delta_0$ d'après [] car $2 E(A^X) = 1$ $E(A^X \log A^X) = 0$

On en déduit :

$$\lim_n T^n \sigma_\chi = \delta_0$$

Si v est solution de (E) avec une queue régulière vérifiant :

$$v(t, \infty) = \frac{C}{t^X} + O\left(\frac{1}{t^{X+1}}\right)$$

On aura :

$$d(v, \sigma_\chi) = \int_0^\infty |v(t, \infty) - \sigma_\chi[t, \infty]| dt < +\infty$$

et donc :

$$d_\chi(v, \sigma_\chi) < +\infty$$

comme :

$$d_\chi(T^n v, T^n \sigma_\chi) \leq d_\chi(v, \sigma_\chi)$$

et que $T^n \sigma_\chi$ converge vaguement vers δ_0 , on en conclut :

$$d_\chi(v, \delta_0) \leq d_\chi(v, \sigma_\chi) < +\infty$$

Ceci signifie que v a un moment d'ordre χ , ce qui est exclu.

On peut observer que si une mesure ρ est stochastiquement inférieure à σ_χ , on a aussi :

$$\lim_n T^n \rho = \delta_0$$

2) Cas $\chi = 1$

Théorème 5 :

Soit v une mesure de probabilité ayant un moment d'ordre 1.

Alors :

$$\lim_n T^n v = \delta_0$$

Il n'y a pas de solution ^{de} $\sqrt{(E)}$ avec une queue régulière d'ordre 1.

Preuve

a)

Supposons d'abord v à support contenu dans $[0, b]$; alors $v \ll \delta_b$ et $T^n v \ll T^n \delta_b$, $\lim_n T^n v \ll \lim_n T^n \delta_b = \delta_0$.

Si v n'est pas à support compact mais admet un moment d'ordre 1, elle peut être approchée d'aussi près que l'on veut par des mesures à support compact, au sens de d .

Si v' est une telle approximation, on a :

$$d(T^n v, T^n v') \leq d(v, v')$$

d'où l'on déduit aisément que :

$$\lim_n T^n v = \delta_0$$

b)

Soit $\theta < 1$ et écrivons la relation de conjugaison sous la forme :

$$T_{1/\theta} J_\theta = J_\theta M_\theta^{-1} T M_\theta$$

où $T_{1/\theta}$ correspond à la variable $B = A^{1/\theta}$ qui vérifie encore $2 E(B^\theta) = 1$,
 $E[B^\theta \log B] = 0$.

D'après le théorème précédent, l'équation E correspondant à $T_{1/\theta}$ n'aura donc pas de solution avec queue régulière d'ordre θ .

Or si v a une queue régulière d'ordre 1 :

$$\mathcal{M}_\theta^{-1} v(t, \infty) = \frac{C}{t^\theta} + O\left(\frac{1}{t^{2-\theta}}\right)$$

Si de plus $Tv = v$, on en déduit :

$$T_{1/\theta} J_\theta (M_\theta^{-1} v) = J_\theta (M_\theta^{-1} v)$$

et $J_\theta (M_\theta^{-1} v)$ est donc solution de l'équation (E) correspondant à $T_{1/\theta}$.

Comme σ et $M_\theta^{-1} v$ ont des queues régulières d'ordre θ , il en est de même de leur convolution multiplicative $J_\theta [M_\theta^{-1} v]$, pour $\theta > \frac{1}{2}$.

Il y a donc contradiction au théorème précédent.

3) théorème de convergence

Théorème 6 :

Soit ν une probabilité de P_χ .

Alors $\lim_n T^n \nu = \delta_\infty$

Preuve

On procède comme au théorème 3 du paragraphe A, par comparaison avec :

$$v = \sigma_\theta \quad \text{si} \quad \theta < 1$$

Corollaire

L'équation (E) n'a pas de solution (non-triviale) dans P_χ , ni de solution ayant un moment d'ordre χ ni de solution ayant une queue régulière d'ordre χ .

Ceci découle des 3 théorèmes précédents.

APPENDICE

1)

On donne ici divers éléments de réponse aux questions de [3], [4].

On a vu que la solution spéciale ($c E |A| = 1$, $E(A \log A) < 0$) avait bien une queue, donc était de type hyperbolique au sens de [1].

D'autre part, on a obtenu l'existence d'une solution non-triviale si $c E(A) = 1$, $E(A \log A) > 0$.

Enfin le problème de normaliser $T^n(\delta_1)$ ne peut avoir de solution au sens strict de [3] car on a vu que la convergence de $T^n v'$ vers une solution v de (E) ne pouvait avoir lieu, en dehors du cas spécial, que si v' n'est pas à support compact (par exemple a une queue).

Dans le schéma des Y_n , il est nécessaire d'introduire un $Y_0 = U$ initial dont la loi a une queue convenable, et de préciser la construction de la manière qui suit.

On note par A un alphabet à r lettres et l'on prendra ici pour simplifier $r = 2$, $A = \{a, b\}$.

Soit Γ l'arbre, avec racine, homogène à r branches ; Γ est donc l'ensemble des mots construits sur A .

On considère l'espace produit $\Omega = (\mathbb{R}^+)^{\Gamma}$ et l'on note $W_{\gamma}(w)$ les composantes de $w \in \Omega$ ($\gamma \in \Gamma$).

Un semi-groupe libre $(\theta^{\gamma})_{\gamma \in \Gamma}$ de translation est alors défini sur Ω par la formule

$$W_{\gamma}[\theta^{\eta}(w)] = W_{\eta\gamma}(w)$$

Chaque sommet γ de Γ définit un chemin unique joignant la racine à γ et l'on note $P_{\gamma}(w)$ le produit des $W_{\eta}(w)$ lorsque η décrit ce chemin ; on a en particulier :

$$P_{\eta\gamma}(w) = P_{\eta}(w) P_{\gamma}(\theta^{\eta} w)$$

Si $U(w)$ est une variable aléatoire positive, on définit alors $Y_0(w) = U(w)$

$$Y_n(w) = \sum_{|\gamma|=n} P_{\gamma}(w) U \cdot \theta^{\gamma}(w)$$

où $|\gamma|$ désigne la longueur du mot γ .

On a donc la relation :

$$Y_{n+1} = W_a Y_n \cdot \theta^a + W_b Y_n \cdot \theta^b$$

et le cas $U = 1$ correspond à la construction de B. MANDELBROT.

2)

On donne ici une démonstration élémentaire abrégée du résultat de H. KESTEN [5] utilisé en A).

Théorème :

Soit p une probabilité sur le groupe affine de la droite des transformations $g(x) = ax + b$.

On suppose que le support p ne fixe aucun point de $\mathbb{R}$, que $a > 0$ ne varie pas dans une progression géométrique k^n ($u \in \mathbb{Z}$) et que $b > 0$, $\int \log a \, dp(g) < 0$.

On suppose aussi qu'il existe $\lambda > 0$ avec $\int a^\lambda \, dp(g) = 1$, $\int b^\lambda \log^+ b \, dp(g) < +\infty$, $\int a^\lambda \log^+ a \, dp(g) < +\infty$.

Alors, il existe une unique probabilité μ sur $\mathbb{R}$ p -invariante ($p * \mu = \mu$) et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\lambda \mu(t, \infty) = c > 0$$

Preuve

μ est ici la loi de $z = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \dots a_k b_{k+1}$.

La variable $z = \sum_{k=0}^{\infty} a_1 \dots a_k b_{k+1}$ satisfait l'équation fonctionnelle $z = b_1 + a_1 z \circ \theta$ où θ est la translation canonique.

Donc $P\{z - b_1 > t\} = \int P(z > \frac{t}{a}) \, d\bar{p}(a)$ où $\bar{p}$ est la première marginale de p .

Si l'on pose $F(t) = P\{z > t\}$, on a donc : $F - \bar{p} \circ F = P\{t < z \leq t + b_1\} = G(t)$.

Vu la condition $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 0$, on obtient F comme potentiel de G :

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n \circ G(t)$$

Introduisant la probabilité $p_\lambda(d\alpha) = a^\lambda \bar{p}(d\alpha)$ et la fonction $G_\lambda(t) = t^\lambda G(t)$ on a :

$$t^\lambda F^\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_\lambda^n \circ G_\lambda(t)$$

Pour obtenir la limite de $t^\lambda G(t)$, on applique le théorème de renouvellement à la marche multiplicative associée à p_λ .

Sa moyenne vaut ici :

$$\int_0^\infty \text{Log } a \, d p_\lambda(a) = \int_0^\infty a^\lambda \text{Log } a \, d p(a)$$

Par convexité, ce nombre est positif car :

$$\int_0^\infty a^\lambda \, d p(a) = 1 \text{ et } \int_0^\infty \text{Log } a \, d p(a) < 0$$

Il suffit donc de voir [] que G_λ est "Riemann-intégrable".

On ne l'établira ici que sous l'hypothèse b_1 borné.

Alors $\int_0^\infty t^{\lambda-1} G(t) \, dt$ est finie en même temps que $\int_0^\infty t^{\lambda-1} \, d F(t)$.

Cette dernière intégrale est finie car z a des moments d'ordre inférieur à λ :
si $\lambda' < \lambda \leq 1$

$$E[z^{\lambda'}] \leq E\left[\sum_0^\infty (a_1 \dots a_k b_{k+1})^{\lambda'}\right]$$

et

$$E[(a_1 \dots a_k)^{\lambda'}] \leq E(a^{\lambda'})^k, \quad E(b_{k+1}^{\lambda'}) \leq \text{cte}$$

Ceci entraîne bien $E(z^{\lambda'}) < +\infty$

Si $1 \leq \lambda' < \lambda$, on a aussi :

$$E(z^{\lambda'}) \leq \left[\sum_0^\infty E(a_1 \dots a_k b_{k+1})^{\lambda'} \right]^{1/\lambda'} < +\infty$$

pour la même raison.

REFERENCES

- 1) W. FELLER : An introduction to probability theory vol 2 Wiley 1971.
- 2) J.-P KAHANE et J. PEYRIERE : Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot. Advances in Math 22, 1976 p 131 - 145.
- 3) H. KESTEN : Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. Acta Math 131 (1973) p 208 - 248.
- 4) P. LEVY : Calcul des probabilités Gauthier-Villars Paris 1925.
- 5) B. MANDELBROT : Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire CRAS Paris 278 (1974) p 289 - 292.
- 6) B. MANDELBROT : Multiplications aléatoires et distributions invariantes par moyenne pondérée aléatoire : quelques extensions CRAS Paris 278 (1974) p 355 - 358.
- 7) G. ROYER : Distance de Fortet Mourier et fonctions Log-concaves Annales Scientifiques de Clermont Ferrand 1984 n° 78.