PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

HUBERT LEGUESDRON

Marche aléatoire sur le semi-groupe des contractions de $\mathbb{R}^d$. Cas de la marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ avec choc élastique en zéro

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 1 « Probabilités », , p. 99-145

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986___1_99_0>

MARCHE ALEATOIRE SUR LE SEMI-GROUPE DES CONTRACTIONS DE $\mathbb{R}^d$. CAS DE LA MARCHE ALEATOIRE SUR $\mathbb{R}_+$ AVEC CHOC ELASTIQUE EN ZERO

J.P. LEGUESDRON

Résumé : Soit S le semi-groupe (pour la composition des applications) des fonctions lyschitziennes de $\mathbb{R}^d$ dont le coefficient de Lipschitz est inférieur ou égal à 1. Soit μ une mesure de probabilité sur les boréliens de S. On étudie, pour tout x de $\mathbb{R}^d$ la chaîne de Markov $\{X_n \,;\, n \geq 0\}$ sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\begin{cases} X_0(x) = x \\ X_n(x) = Y_n \circ \dots \circ Y_1(x), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

où $\{Y_n \,;\, n \geq 1\}$ désigne une suite de v.a. indépendantes, de loi μ, à valeurs dans S, définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour cela on s'intéresse à la convergence presque-sûre du processus $\{Y_1 \circ \dots \circ Y_n(x) \,;\, n \geq 1\}$, pour $x \in \mathbb{R}^d$.

Les résultats obtenus sont ensuite appliqués à la marche aléatoire sur $\mathbb{R}_+$ avec choc élastique en zéro.

Mots-clés : Chaînes de Markov - Comportement asymptotique
Marche aléatoire - Mesure invariante

INTRODUCTION

Soit $\{ Y_n ; n \geq 0 \}$ une suite de v.a. réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi μ. On étudie la chaîne $\{ X_n, n \geq 0\}$ définie par :

$$\begin{cases} X_o = x \geq 0 \\ X_n = |X_{n-1} - Y_n|, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$\{X_n ; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{R}_+$, partant de x de probabilité de transition P définie par : pour toute fonction borélienne bornée f,

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(|x-y|)\, \mu(dy).$$

Le principal problème lorsqu'on étudie une chaîne de Markov consiste à se demander s'il existe au moins une mesure de probabilité invariante pour la chaîne considérée : à ce titre W. FELLER, [3], introduit cette chaîne en montrant qu'il en existe bien une sous l'hypothèse d'absolue continuité de la loi μ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et en supposant $0 < E(Y_1) < +\infty$. Le résultat fut ensuite généralisé par F.B. KNIGHT, [5], au cas d'une loi μ quelconque portée par $\mathbb{R}_+$.

Cette chaîne a été étudié par M.A. BOUDIBA, [1], [2], dans le cas où la loi μ est portée par $\mathbb{N}$. Cette étude est basée sur la détermination des classes cycliques de la chaîne et de leurs périodes, ce qui permet d'aboutir à des résultats sur la récurrence.

En ce qui nous concerne, nous étudions la chaîne pour une loi μ portée par $\mathbb{R}$ (et non plus portée par $\mathbb{R}_+$). Nous supposerons que **μ n'est pas portée par un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ isomorphe à $\mathbb{Z}$ (réseau)** auquel cas nous serions ramené à l'étude faite par M.A. BOUDIBA.

Dans une première étape nous serons amené à étendre le résultat de F.B. KNIGHT au cas d'une loi μ portée par $\mathbb{R}$.

Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_a en posant pour tout réel positif x $f_a(x) = | x-a |$. On peut alors écrire $\{X_n \,;\, n \geq 0\}$ sous la forme :

$$\begin{cases} X_0 = x \geq 0 \\ X_n = f_{Y_n} \circ \dots \circ f_{Y_1}(x) \end{cases}$$

L'effet de contraction que possédent les fonctions f_a, $a \in \mathbb{R}$, puisque pour tous réels positifs x et y $| f_a(x) - f_a(y) | \leq | x-y |$, nous aménera à étudier les processus $\{\pi_n(. , x) \,;\, n \geq 1\}$ définis de la manière suivante :

$$\begin{cases} \pi_0(. ,x) = x \geq 0 \\ \pi_n(. ,x) = f_{Y_1} \circ \dots \circ f_{Y_n}(x) \end{cases}$$

en nous posant le problème de l'existence d'une limite presque sûre.

Le résultat principal est alors le suivant :

Supposons que la loi μ ne soit pas portée par un réseau et possède un moment d'ordre 1 avec $0 < \int_{\mathbb{R}} x\, \mu(dx) < +\infty$. Alors la chaîne $\{X_n \,;\, n \geq 0\}$ possède une unique mesure de probabilités ν, P-invariante et pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de fonctions $\{f_{Y_1(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_n(\omega)}(.) \,;\, n \geq 1\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$ vers une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit il existe une v.a. réelle Z telle que pour tout réel x, la suite $\{f_{Y_1} \circ \dots \circ f_{Y_n}(x) \,;\, n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers Z.

D'autre part:

Pour tout réel x, la chaine $\{f_{Y_n} \circ \ldots \circ f_{Y_1}(x)\ ;\ n \geq 1\}$ est récurrente positive au sens de Harris [8].

Notons que dans le cas $\int_{\mathbb{R}} x\, \mu(dx) < 0$, il est facile de voir que la chaîne $\{X_n, n \geq 0\}$ tend $\mathbb{P}$-presque surement vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Dans le cas $\int_{\mathbb{R}} x\, \mu(dx) = 0$, que nous ne traiterons pas, il existe des exemples donnant une mesure invariante ν infinie.

Nous commençons par traiter le problème un peu plus général, dans lequel on remplace la famille $\{f_a, a \in \mathbb{R}\}$ par des contractions quelconques de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Nous appliquerons ensuite les résultats obtenus au cas ci-dessus présenté. Pour cela nous utiliserons des techniques introduites par Y. GUIVARC'H et A. RAUGI , [4] , pour étudier le produit de matrices aléatoires indépendantes.

I

ETUDE D'UNE MARCHE ALEATOIRE SUR LE SEMI-GROUPE DES CONTRACTIONS DE $\mathbb{R}^d$

1 - Introduction

Considérons l'espace $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, muni de la norme euclidienne que nous noterons $\| . \|$. On note $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$, tendant vers 0 à l'infini.

On appelle $B = \{f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : \| f \|_B < +\infty\}$ où, pour toute fonction f de $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a posé $\| f \|_B = \operatorname{Sup} \{ \|f(x)\| / (1+\|x\|^2), x \in \mathbb{R}^d\}$. Il est facile de vérifier que $(B, \| . \|_B)$ est un espace de Banach.

Si f est une fonction de $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ on introduit le coefficient de Lipschitz de f :

$$m(f) = \sup \{ \| f(x) - f(y) \| / \| x - y \| ;\ x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \}$$

On appelle $L = \{f \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) : | f |_L = \| f \|_B + m(f) < +\infty\}$. Il est facile de vérifier que $(L, | . |_L)$ est un espace de Banach.

On montre alors le résultat élémentaire suivant : (voir appendice)

<u>Lemme (1.1)</u> : Tout sous-ensemble borné de $(L, | . |_L)$ est relativement compact dans $(B, \| . \|_B)$.

On considère l'ensemble $S = \{f \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) : m(f) \leq 1\}$. S est donc l'ensemble des fonctions de $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dont le coefficient de Lipschitz est inférieur ou égal à 1. S est un semi-groupe pour la loi de composition des applications.

Pour toute fonction f de S on a :

$\| f \|_B \leq \sup \{ (\| f(o) \| + \| x \|) / (1+ \| x \|^2) \, ; x \in \mathbb{R}^d \}$,

on majore le second membre par : $(1/2) + \| f(o) \| < +\infty$.

On en déduit que :

a) $S \subset L$

b) toute sous-famille F de S telle que $\sup \{ \| f(o) \| \, ; f \in F \} < +\infty$ est un sous-ensemble relativement compact de $(B, \| . \|_B)$.

Soit μ une mesure de probabilité sur les boréliens de S. On désigne par $\{ Y_n \, ; n \geq 1 \}$ une suite de v.a. indépendantes, de loi μ à valeurs dans S, définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On se propose d'étudier pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la chaîne $\{X_n \, ; n \geq 0\}$ sur $\mathbb{R}^d$ définie par :

$$\begin{cases} X_0 = x \\ X_n = Y_n \circ \dots \circ Y_1(x) \end{cases}$$

$\{X_n \, ; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov partant de $x \in \mathbb{R}^d$, dont le noyau de transition P associé est défini, pour toute fonction borélienne bornée φ sur $\mathbb{R}^d$, par :

$$P \varphi (x) = \int_S \varphi(f(x)) \, \mu(df).$$

[Notons que pour tout x de $\mathbb{R}^d$, l'application qui à tout élément f de S associe l'élément f(x) de $\mathbb{R}^d$ est mesurable car continue].

Pour cela on s'intéresse au comportement des suites de v.a. $\{Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(x) ; n \geq 1\}$, pour x parcourant $\mathbb{R}^d$.

On notera S_μ le sous semi-groupe fermé, au sens de la norme $\| . \|_B$ de S engendré par le support de μ.

2 - Enoncés des résultats

Définition (1.1) On dit qu'une suite $\{f_n ; n \geq 0\}$ d'éléments de S est contractante s'il existe un point u de $\mathbb{R}^d$ tel que pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$ la suite $\{f_n(x) ; n \geq 0\}$ converge vers u.

On voit facilement (lemme (1.1)) que $\{f_n , n \geq 0\}$ est une suite contractante si et seulement si la suite de fonctions $\{f_n ; n \geq 0\}$ converge au sens de la norme $\| . \|_B$ vers une fonction constante f.

Définition (1.2) Une mesure ν sur $\mathbb{R}^d$ est dite μ-invariante si $\nu = \int_S f(\nu)\, \mu(df)$.

Nous avons le théorème suivant :

<u>Théorème (1.1)</u> : Supposons que

i) μ possède une mesure de probabilité ν, μ-invariante.

ii) le semi-groupe S_μ contient une suite contractante $\{\xi_n \,;\, n \geq 0\}$, convergeant vers la fonction constante égale à $u \in \mathbb{R}^d$.

Alors ν est l'unique mesure de probabilité P-invariante. Il existe une v.a. Z de loi ν telle que pour tout x élément de $S_\mu.u$ la suite $\{Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(x) \,;\, n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers Z. Pour tout x élément de $\mathbb{R}^d$, $\nu(S_\mu . x) = 1$.

Qui admet le :

<u>Corollaire (1.1)</u> : pour tout x élément de $S_\mu.u$,la chaine $\{Y_n \circ \ldots \circ Y_1(x) \,;\, n \geq 1\}$ est récurrente positive au sens de Harris [8].

<u>Démonstration:</u> soit A un borélien de $\mathbb{R}^d$. D'après le théorème de Birkhoff , pour ν-presque tout x de $\mathbb{R}^d$: $(1/n) \sum_{1<k<n} 1_A(Y_k \circ \ldots \circ Y_1(x)) \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s.} \nu(A)$; ν étant portée par $S_\mu.u$.

Or pour tout x élément de $S_\mu.u$ la suite $\{Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(x) \,;\, n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers la v.a. Z ; ce qui implique ,pour tous x et y éléments de $S_\mu.u$, la suite $\{ \| Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(x) - Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(y) \| \,;\, n \geq 1 \}$ converge $\mathbb{P}$.p.s. vers 0.
Mais alors, pour tous x et y éléments de $S_\mu.u$, la suite $\{ \| Y_n \circ \ldots \circ Y_1(x) - Y_n \circ \ldots \circ Y_1(y) \| \,;\, n \geq 1 \}$ converge en loi vers 0 , et donc en probabilité.

Il résulte , de la décroissance de cette suite (les Y_i , $i \geq 1$, sont des contractions) , que la suite $\{ \| Y_n \circ \dots \circ Y_1(x) - Y_n \circ \dots \circ Y_1(y) \| ; n \geq 1 \}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers 0.

On en déduit alors , que pour tout $x \in S_\mu.u$:

$$(1/n) \sum_{1 \leq k \leq n} 1_A(Y_k \circ \dots \circ Y_1(x)) \xrightarrow{\mathbb{P}.p.s.} \nu(A) \quad ,$$

c'est à dire que si $\nu(A) > 0$, pour tout x élément de $S_\mu.u$, la chaine $\{ Y_n \circ \dots \circ Y_1(x) ; n \geq 1 \}$ revient $\mathbb{P}$-p.s une infinité de fois dans A ; ce qui démontre le corollaire.

Pour l'existence d'une mesure de probabilité μ-invariante nous avons le critère suivant :

Proposition (1.1) Sous l' hypothèse : Il existe un entier $k \geq 1$ tel que

i) $\sup \{ \int_S \| f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \mu^k(df) ; x,y \in \mathbb{R}^d \text{ et } x \neq y \} = \rho < 1$ où μ^k désigne la $k^{-\text{ième}}$ convolée de μ ,

ii) $\int_S \| f(0) \|^2 \mu^k(df) < +\infty$,

μ possède une unique mesure de probabilité μ-invariante, ν et pour toute fonction $f \in L$ on a $| P^n f - \nu(f) |_L \leq C\tau^n$ où $0 < \tau < 1$ et C une constante positive.

Notons que les hypothèses du théorème sont immédiatement satisfaites si le semi-groupe S_μ contient une fonction f_0 telle que pour tous éléments x et y de $\mathbb{R}^d$ on ait $\|f_0(x) - f_0(y)\| \leq \delta \| x-y \|$ avec $0 < \delta < 1$.

En effet l'existence d'une suite contractante dans S_μ résulte du théorème du point fixe ; l'existence de la mesure invariante résulte quant à elle de la proposition (1.1) : soient $B_L = B_L(f_0,(1-\delta)/2) = \{f \in L : | f-f_0 |_L < (1-\delta) / 2\}$ la boule de L de centre f_0 et de rayon $(1-\delta) / 2$, et k un entier positif quelconque non nul.

$$\int_S \| f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \mu^k(df) \leq \mu^k(S-B_L) + \int_{B_L} \|f(x)-f(y)\|/\|x-y\| \mu^k(df)$$

sur B_L on a $\qquad m(f) < (1-\delta) / 2 + m(f_0) < (1+\delta) / 2$

on en déduit alors que pour tous éléments x et y de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\int_S \| f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \mu^k(df) \leq \mu^k(S-B_L) + \mu^k(B_L) (1+\delta) / 2 .$$

Puisque $(1+\delta) / 2 < 1$ et $\mu^k (B_L) > 0$, il résulte que $\rho < \mu^k(S-B_L) + \mu^k(B_L)$ c'est-à-dire $\rho < 1$ et l'hypothèse de la proposition (1.1) est donc satisfaite pour tout entier $k \geq 1$.

Par conséquent, s'il existe dans S_μ une telle fonction f_0, le théorème (1.1) s'applique.

II

DEMONSTRATIONS DES RESULTATS

Démonstration du théorème (1.1) : elle résultera de plusieurs lemmes. Nous utiliserons notamment la théorie des martingales et un résultat dû à A. RAUGI [7].

Nous commençons par la construction d'une martingale bornée.

Lemme (2.1) Soit φ un élément de $C_0(\mathbb{R}^d)$. Définissons pour tout élément f de S la fonction h_φ par $h_\varphi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x))\,\nu(dx)$. Alors h_φ est une fonction μ-harmonique à droite, bornée sur S.

Démonstration : en effet

$$\int_S h_\varphi(f\circ g)\mu(dg) = \int_S \int_{\mathbb{R}^d} \varphi\,[(f\circ g)(x)]\,\nu(dx)\mu(dg) = h_\varphi(f)$$

car ν est P-invariante. De plus φ étant continue bornée sur $\mathbb{R}^d$, h_φ est bornée sur S.

Pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$, on en déduit que la suite de v.a $\{M_n(\varphi, .)\,;\, n \geqslant 1\}$ définie par $M_n(\varphi, .) = h_\varphi(Y_1 \circ \ldots \circ Y_n) = \nu(\varphi \circ Y_1 \circ \ldots \circ Y_n)$ est une martingale bornée relativement à la filtration $\{\sigma(Y_1, \ldots, Y_n)\,;\, n \geqslant 1\}$.

Elle converge donc $\mathbb{P}$-presque sûrement vers une v.a réelle que l'on notera $\Theta(\varphi, .)$.

Dans tout ce qui suit, nous noterons $f(\nu)$ la mesure image de ν par la fonction borélienne f.

Lemme (2.2) Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de mesures de probabilité $\{Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_n(\omega)(\nu)\ ;\ n \geq 1\}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité $\Theta(\omega)$.

Démonstration : L'espace $C_0(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme étant séparable, choisissons une suite $\{\varphi_p,\ p \geq 0\}$ partout dense dans $C_0(\mathbb{R}^d)$.

D'après ce qui précède, pour tout $p \geq 0$, il existe un sous-ensemble Ω_p de Ω, de $\mathbb{P}$-mesure 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_p$ la suite $\{M_n(\varphi_p,\omega)\ ;\ n \geq 1\}$ converge vers $\Theta(\varphi_p,\omega)$. Posons $\Omega' = \bigcap_p \Omega_p$. Pour tout $\omega \in \Omega'$, et tout $p \geq 0$ la suite $\{M_n(\varphi_p,\omega)\ ;\ n \geq 1\}$ converge vers $\Theta(\varphi_p,\omega)$.

D'où l'on déduit que pour tout $\omega \in \Omega'$ la suite de mesures de probabilité $\{Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_n(\omega)(\nu)\ ;\ n \geq 1\}$ converge faiblement vers une mesure positive $\Theta(\omega)$. [(*) : En effet une suite de mesures de probabilité $\{\nu_n,\ n \geq 1\}$ sur $\mathbb{R}^d$ converge faiblement si et seulement si la suite $\{\nu_n(\varphi_p)\ ;\ n \geq 1\}$ converge pour toute suite dense $\{\varphi_p\ ;\ p \geq 0\}$ dans $C_0(\mathbb{R}^d)$].

Il reste donc à montrer que pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, $\Theta(\omega)$ est une probabilité. Puisque pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$, la suite $\{Y_1 \circ \dots \circ Y_n(\nu)(\varphi)\ ;\ n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers $\Theta(\,.\,)(\varphi)$, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue entraîne alors que la suite $\{\mathbb{E}[Y_1 \circ \dots \circ Y_n(\nu)(\varphi)]\ ;\ n \geq 1\}$ converge vers $\mathbb{E}[\Theta(\,.\,)(\varphi)]$, pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$. Mais ν étant P-invariante on a, pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[Y_1 \circ \dots \circ Y_n(\nu)(\varphi)] = \nu(\varphi)$. Il résulte alors que, pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{E}[\Theta(\,.\,)(\varphi)] = \nu(\varphi)$ d'où $\mathbb{E}[\Theta(\,.\,)(1)] = \nu(1) = 1$.

On a donc pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $\Theta(\omega)(1) = 1$. On en conclut que, pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $\Theta(\omega)$ est une mesure de probabilité.

Lemme (2.3) Pour tout entier $r \geq 1$ et pour $\mathbb{P} \otimes \mu^r$-presque tout $(\omega, \xi) \in \Omega \times S$, les suites de mesures de probabilité $\{ Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_n(\omega)(\nu) \,;\, n \geq 1\}$ et $\{ Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_n(\omega) \circ \xi(\nu) \,;\, n \geq 1\}$ converge étroitement vers la même limite $\Theta(\omega)$.

Démonstration :nous reprenons la méthode utilisée dans ([7],lemme (1.7)).
Pour tout $\omega \in \Omega$, notons $\pi_k(\omega)$ l'application définie de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ qui à tout élément x associe l'élément $Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_k(\omega)(x)$.

En conservant les notations du lemme (2.1), nous avons : pour toute fonction $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, tous entiers $k \geq 1$, $r \geq 1$ et tout élément $x \in \mathbb{R}^d$

$$\int_S \mathbb{E}\,[(h_\varphi(\pi_k \circ \xi) - h_\varphi(\pi_k))^2]\, \mu^r(d\xi) = \int_S h_\varphi^2(f)\mu^{r+k}(df) - \int_S h_\varphi^2(f)\mu^k(df).$$

Pour tout entier $n \geq r$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&\sum_{0<k<n} \int_S \mathbb{E}\,[(h_\varphi(\pi_k \circ \xi) - h_\varphi(\pi_k))^2\,]\, \mu^r(d\xi)\\
&= \sum_{0<k<n} [\int_S h_\varphi^2(f)\mu^{r+k}(df) - \int_S h_\varphi^2(f)\,\mu^k(df)\,]\\
&= \sum_{0<k<r} [\int_S h_\varphi^2(f)\mu^{n+k}(df) - \int_S h_\varphi^2(f)\,\mu^k(df)\,]\\
&\leq 2r\,\| h_\varphi \|_\infty^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent pour tout entier $r \geq 1$

$$\sum_{k \geq 1} \int_S \mathbb{E}\,[(h_\varphi(\pi_k \circ \xi) - h_\varphi(\pi_k))^2]\, \mu^r(d\xi) < +\infty.$$

La propriété de Beppo-Levi entraîne alors que pour $\mathbb{P} \otimes \mu^r$-presque tout $(\omega,\xi) \in \Omega \times S$ $\sum_{k \geq 1} (h_\varphi(\pi_k(\omega) \circ \xi) - h_\varphi(\pi_k(\omega))^2 < +\infty$. On en déduit alors que pour $\mathbb{P} \otimes \mu^r$-presque tout $(\omega,\xi) \in \Omega \times S$

$$\lim_k h_\varphi(\pi_k(\omega) \circ \xi) = \lim_k h_\varphi(\pi_k(\omega))$$

c'est-à-dire $\lim_k Y_1(\omega) \circ \dots \circ Y_k(\omega) \circ \xi\,(\nu)\,(\varphi) = \Theta(\varphi,\omega)$.

Par le même argument énoncé précédemment (voir (*) du lemme (2.2)), le lemme résulte de la séparabilité de l'espace $C_0(\mathbb{R}^d)$.

<u>Lemme (2.4)</u> Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ $\limsup_n \| \pi_n(\omega)\,(o) \| < +\infty$.

<u>Démonstration</u> : Soit $A = \{\omega \in \Omega : \limsup_n \| \pi_n(\omega)\,(o) \| = +\infty\}$ et supposons que $\mathbb{P}[A] > 0$. Soit $\omega \in A$. Considérons une sous-suite d'indices $\{n_k ; k \geq 0\}$ telle que la suite $\{\pi_{n_k}(\omega)\,(0) ; k \geq 0\}$ tende vers $+\infty$ dans $\mathbb{R}^d$. De l'inégalité $\| \pi_n(\omega)\,(0) \| \leq \|x\| + \|\pi_n(\omega)\,(x)\|$, satisfaite pour tout $n \geq 1$ et tout élément x de $\mathbb{R}^d$, il résulte que la suite $\{\pi_{n_k}(\omega)\,(x) ; k \geq 0\}$ tend vers $+\infty$ dans $\mathbb{R}^d$.

Pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$, la suite $\{\pi_{n_k}(\nu)\,(\varphi) ; k \geq 0\}$. converge donc vers 0. Mais alors la suite de mesures de probabilité $\{ \pi_{n_k}(\nu) ; k \geq 0\}$ converge étroitement vers la mesure nulle de $\mathbb{R}^d$, ce qui contredit le lemme (2.2). Par conséquent, A est un ensemble de $\mathbb{P}$-mesure nulle.

Nous avons alors le

Corollaire (2.1) Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ la famille $\{\pi_n(\omega) ; n \geq 1\}$ est un sous-ensemble borné de $(L, |\,.\,|_L)$ et donc relativement compact dans $(B, \|\,.\,\|_B)$.

Démonstration : pour tout $\omega \in \Omega$ on a d'une part $\sup\{m(\pi_n(\omega)) ; n \geq 1\} \leq 1$ et d'autre part $\sup\{\|\pi_n(\omega)\|_B ; n \geq 1\} \leq (1/2) + \sup\{\|\pi_n(\omega)(0)\| ; n \geq 1\}$.

On déduit alors du lemme (2.4) que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$:

$$\sup\{|\pi_n(\omega)|_L ; n \geq 1\} < +\infty.$$

Proposition(2.1) Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, $\Theta(\omega)$ est une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$ et pour tout x élément de S_μ.u la suite de v.a $\{Y_1 \circ \ldots \circ Y_n(x) ; n \geq 1\}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers la v.a Z.

Démonstration : d'après le lemme (2.3) il existe un sous-ensemble $\Omega' \subset \Omega$, de $\mathbb{P}$-mesure 1 et une suite $\{\xi_i, i \geq 0\}$ dense dans S_μ tels que : pour tout $\omega \in \Omega'$ et tout $i \geq 0$ les suites de mesures de probabilité

$$\{Y_1(\omega) \circ \ldots \circ Y_n(\omega)(\nu) ; n \geq 1\} \text{ et } \{Y_1(\omega) \circ \ldots \circ Y_n(\omega) \circ \xi_i(\nu) ; n \geq 1\}$$

convergent étroitement vers la même mesure de probabilité $\Theta(\omega)$.

Soit ω un élément de Ω' fixé. D'après le corollaire (2.1), soit $\pi(\omega)$ une valeur d'adhérence dans B de la suite $\{\pi_n(\omega) ; n \geq 1\}$.

On en déduit alors que pour tout $i \geq 0$ on a:

$$\pi(\omega)(\nu) = \pi(\omega) \circ \xi_i(\nu) = \Theta(\omega).$$

Il résulte du passage à la fermeture que pour tout élément ξ de S_μ on a :

$$\pi(\omega)(\nu) = \pi(\omega) \circ \xi(\nu) = \Theta(\omega).$$

Considérons maintenant une suite contractante $\{\xi_n\ ;\ n \geq 0\}$ de S_μ et notons f sa limite au sens de la norme $\|\ .\ \|_B$ où f est définie pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$ par $f(x) = u \in \mathbb{R}^d$.

Notons que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $S_\mu\ .\ x$ est fermé ,(i.e $\overline{S_\mu\ .\ x} = S_\mu\ .\ x$).

En effet soit $y = \lim_n\ t_n\ .\ x$ où $\{t_n\ ;\ n \geq 0\}$ est une suite d'éléments de S_μ.

Nous avons d'une part $\sup_n\ m(t_n) \leq 1$ et d'autre part $\|t_n\|_B \leq (1/2)+\|t_n(x)\|$, d'où l'on déduit que $\sup_n\ \|t_n\|_B < +\infty$.

Il résulte du lemme (1.1) que $\{t_n,\ n \geq 0\}$ est une partie relativement compacte de $(B, \|\ .\ \|_B)$. Soit $t \in S_\mu$ une valeur d'adhérence dans $(B, \|\ .\ \|_B)$ de $\{t_n\ ;\ n \geq 0\}$. On a donc $t\ .\ x = y$ d'où $y \in S_\mu\ .\ x$.

Pour tout $n \geq 0$ on a :

$$\lim_n \pi(\omega) \circ \xi \circ \xi_n(\nu) = \Theta(\omega)$$

d'où l'on déduit que pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$

$$\lim_n \pi(\omega) \circ \xi \circ \xi_n(\nu)(\varphi) = \varphi \circ \pi(\omega) \circ \xi(u) = \Theta(\omega)(\varphi) \qquad \forall\, \xi \in S.$$

Il en résulte que :

1) $\Theta(\omega)$ est une mesure de Dirac $\varepsilon_{Z(\omega)}$.

2) toute valeur d'adhérence de la suite $\{\pi_n(\omega)\ ;\ n \geq 1\}$ dans $(B, \|\ .\ \|_B)$ envoie tout élément de $S_\mu\ .\ u$ sur $Z(\omega)$. On en déduit que pour tout x élément de $S_\mu\ .\ u$ la suite $\{\pi_n(\omega)(x),\ n \geq 1\}$ converge vers $Z(\omega)$.

<u>Fin de la démonstration du théorème (1.1)</u>

Il nous reste à montrer que la loi de Z est ν et que pour tout x dans $\mathbb{R}^d$ $\nu(S_\mu . x) = 1$. Ce qui prouvera que ν est l'unique mesure de probabilité μ-invariante car Z est obtenue (d'après (2)) indépendamment de ν.

Pour toute fonction φ de $C_0(\mathbb{R}^d)$ on a $\mathbb{E}\,[\varphi(Z)] = \lim_n \mathbb{E}\,[\pi_n(\nu)\,(\varphi)]$, mais d'après la μ-invariante de ν on a pour tout $n \geqslant 1$ $\mathbb{E}\,[\pi_n(\nu)\,(\varphi)] = \nu(\varphi)$ d'où $\mathbb{E}\,[\varphi(Z)] = \nu(\varphi)$, ce qui prouve que la loi de Z est ν.

De la proposition (2.1) il résulte que Z prend ses valeurs dans $S_\mu.u$ et par suite ν est portée par $S_\mu.u$. Si x est un élèment de $\mathbb{R}^d$, $S_\mu.u$ contient $S_\mu o \xi_n.x$ pour tout $n \geqslant 0$. En passant à l'adhérence on obtient que $S_\mu.x \supset S_\mu.u$.

Démonstration de la proposition (1.1) Elle résultera de plusieurs lemmes. Nous commençons par énoncer le lemme suivant :

Lemme (2.6) Si $\{f_n ; n \geq 0\}$ est une suite de L, $f \in B$, $\lim_n \| f_n - f \|_B = 0$ et pour tout $n \geq 1$ $| f_n |_L \leq C$ où C est une constante positive finie alors $f \in L$ et $| f |_L \leq C$.

Démonstration : il suffit de constater que l'on a $m(f) \leq \liminf_n m(f_n)$, d'où l'on déduit alors que $| f |_L \leq \liminf_n | f_n |_L$, ce qui permet de conclure.

Soit P l'opérateur linéaire de $(B, \| . \|_B)$ dans $(L, | . |_L)$ définit comme suit : pour toute fonction F de B et tout $x \in \mathbb{R}^d$ on pose :

$$P\,F(x) = \int_S F(f(x))\, \mu(df).$$

Nous avons alors le :

Lemme (2.7) Sous l'hypothèse : il existe un entier $k \geq 1$ tel que

i) $\sup \{ \int_S \| f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \mu^k(df) \; ; x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y \} < 1$

ii) $\int_S \| f(0) \|^2 \mu^k(df) < +\infty$,

l'opérateur P est quasi-compact.

Démonstration : Nous allons montrer qu'il existe deux constantes strictement positives non nulles C_1 et C_2, avec $C_1 < 1$ et telles que l'on ait :

$$| P^k F |_L \leq C_1 | F |_L + C_2 \| F \|_B \qquad \text{(a)}.$$

Pour tout élément x de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\| P^k F(x) \| / (1+ \| x \|^2)$$
$$\leq \int_S \{ \| F(f(x)) \| / (1+ \| f(x) \|^2) \} \times \{(1+\|f(x)\|^2)/ (1+ \| x \|^2)\} \mu^k(df)$$

Le second membre est majoré par :

$$\| F \|_B (1+ \int_S \| f(x) \|^2 / (1+ \| x \|^2) \mu^k(df)) ;$$

de l'inégalité , $\| f(x) \|^2 \leq 2 (\| x \|^2 + \| f(0) \|^2)$, on en déduit que cette quantité est majorée par :

$$\| F \|_B (1 + 2 \int_S \| f(0) \|^2 \mu^k(df))$$

De même pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\| P^k F(x) - P^k F(y) \| / \| x-y \| \leq \int_S \| F(f(x)) - F(f(y)) \| / \| x-y \| \mu^k(df)$$

le second membre s'écrit encore :

$$\int_S \{ \| F(f(x)) - F(f(y)) \| / \|f(x) - f(y) \| \} \times \{ \|f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \} \mu^k(df)$$

que l'on peut majorer par :

$$m(F) \int_S \| f(x) - f(y) \| / \| x-y \| \mu^k(df) \leq \rho\, m(F)$$

où l'on a posé

$$\rho = \sup \{\int_S \| F(f(x)) - F(f(y)) \| / \| x-y \| \mu^k(df) ; x,y \in \mathbb{R}^d, x \neq y\}$$

par conséquent $m(P^k F) \leq \rho\, m(F)$.

Il résulte que :

$| P^k F |_L \leq C_0 \| F \|_B + \rho\, m(F) \leq \rho | F |_L + (C_0-\rho) \| F \|_B$; où on a posé $C_0 = 1 + 2 \int_S \| f(0) \|^2 \mu^k(df)$.

Ce qui démontre (a).

Les lemmes (1.1) et (2.6) puis l'inégalité (a) nous permettent d'appliquer le théorème de Ionescu-Marinescu-Tulcea, [6], aux espaces $(B, \|.\|_B)$, $(L, |.|_L)$ et à l'opérateur P : pour tout $n \geq 1$ nous avons :

$$P^n = \sum_{1 \leq i \leq s} \lambda_i E_i + Q^n$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres de module 1 de l'opérateur P.

E_i est le projecteur de $(L, |.|_L)$ sur l'espace propre associé à la valeur propre λ_i, espace qui est de dimension finie.

Q est un opérateur borné sur $(L, |.|_L)$, de rayon spectral strictement inférieur à 1.

De plus pour tout $i=1,\ldots,s$ $\quad E_i.Q=Q.E_i= 0.$

Ce qui démontre le lemme.

Lemme (2.8) 1 est l'unique valeur propre de P de module 1.

Démonstration : Soient λ une valeur propre de P de module 1, $\lambda \neq 1$ et $F \in D(\lambda) = \{ f \in L^* : Pf = \lambda f\}$.

De l'égalité $\quad P^n F = \lambda F \qquad (1)$

on en déduit que : $\quad m(P^n F) = |\lambda| m(F) = m(F) \qquad \forall n \geq 1 \qquad (2)$

Mais on a établit (lemme (2.7)) que

$$m(P^n F) \leq \rho m(F) \quad \text{où } 0 < \rho < 1 \qquad (3)$$

(2) et (3) impliquent alors que $m(F) = 0$, et par conséquent en revenant à la définition de m, que F est une fonction constante, si bien que (1) entraîne qu'on a nécessairement $\lambda = 1$. On en conclut que 1 est l'unique valeur propre de P de module 1 et le sous-espace associé est formé des fonctions constantes.

Fin de la démonstration de la proposition (1.1)

Il résulte des lemmes (2.7) et (2.8) que P^n s'écrit

$$P^n = \nu + Q^n \quad , n \geq 1$$

où ν est le projecteur de $(L, |\,.\,|_L)$ sur le sous-espace des fonctions constantes.

Q est un opérateur borné sur $(L, |\,.\,|_L)$ de rayon spectral strictement inférieur à 1.

Il est clair que ν s'identifie une mesure de probabilité μ-invariante sur $\mathbb{R}^d$.

III

APPLICATION A LA MARCHE ALEATOIRE SUR $\mathbb{R}_+$ AVEC CHOC ELASTIQUE EN ZERO

INTRODUCTION

Nous appliquerons dans cette partie les résultats du **I** à la situation suivante : soit $\{Y_n ; n \geqslant 1\}$ une suite de v.a. réelles ,définies sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{F}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi μ. On étudie la chaîne $\{X_n ; n \geqslant 0\}$ définie par :

$$\begin{cases} X_0 = x \geqslant 0 \\ X_n = |X_{n-1} - Y_n|, \qquad n \geqslant 1. \end{cases}$$

$\{X_n ; n \geqslant 0\}$ est une chaîne de Markov homogène sur $\mathbb{R}_+$, partant de x de probabilité de transition P définie, pour toute fonction borélienne bornée f, par : $P(f(x)) = \int_{\mathbb{R}} f(|x-y|)\,\mu(dy)$.

Cette chaine a été introduite par H. VON SCHELLING [9] , pour résoudre un problème de cables téléphoniques.

En notant, pour tout réel a, f_a la fonction définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+$, par $f_a(x) = |x - a|$, la chaîne $\{X_n ; n \geqslant 0\}$ s'écrit :

$$\begin{cases} X_0(x)= x \\ X_n(x) = f_{Y_n} \circ \dots \circ f_{Y_1}(x), \qquad n \geqslant 1. \end{cases}$$

On se propose donc d'étudier la chaîne $\{X_n ; n \geqslant 0\}$ en nous intéressant au comportement des suites $\{ f_{Y_1} \circ \dots \circ f_{Y_n}(x) ; n \geqslant 1\}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Notons S le semi-groupe, pour la composition des applications, des contractions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. $\{ f_{Y_n} ; n \geq 1\}$ est une suite de v.a. indépendantes de même loi à valeurs dans S. Notons λ cette loi commune.

Nous allons montrer, dans ce qui suit, que les hypothèses du théorème (1.1) sont satisfaites.

1 - Existence d'une mesure de probabilité μ-invariante

Dans la partie I, nous avons donné un critère d'existence d'une mesure de probabilité ν, μ-invariante. Mais ce dernier n'est pas applicable à notre situation, en effet pour tout $k \geq 1$

$$\sup \{ \int_S | f(x) - f(y) | / | x-y | \quad \lambda^k(df) ; x,y \in \mathbb{R}, x \neq y\} = 1.$$

Néanmoins nous allons montrer qu'il existe une telle mesure. A cet effet nous commençons par rappeler deux résultats, relatifs à l'existence d'une telle mesure lorsque la loi μ est portée par $\mathbb{R}_+$, obtenus successivement par W. FELLER [3] et F.B. KNIGHT [5].

En supposant la loi μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et sous l'unique condition : $0 < E(Y_1) < +\infty$, W. FELLER a démontré qu'il existe une mesure de probabilité ν, μ-invariante et que celle-ci est donnée par sa densité d, définie pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$, par : $d(x) = (1 - F(x)) / E(Y_1)$, où F désigne la fonction de répartition de la loi μ.

En 1977, F.B. KNIGHT généralise ce résultat au cas d'une loi μ quelconque sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons le

<u>Théorème (3.1)</u> Soit F une fonction de répartition quelconque sur $\mathbb{R}_+$ avec $F(0_-) = 0$. On suppose que $0 < E(Y_1) < +\infty$. Alors la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = (1 / E(Y_1)) \int_0^x (1 - F(y))\, dy$ est la fonction de répartition d'une mesure invariante pour la chaîne $\{X_n ; n \geq 0\}$.

Pour la démonstration voir ([5] , Th.1.1).

Nous allons dans ce qui suit, étendre le résultat de F.B. KNIGHT au cas d'une loi μ portée par $\mathbb{R}$.

μ étant portée par $\mathbb{R}$, on remarque d'après la définition de la chaîne $\{X_n ; n \geq 0\}$, que le passage de X_n à X_{n+1} avec un choc élastique en 0, au $(n+1)^{\text{ième}}$ coups ne peut avoir lieu que si $Y_{n+1} > 0$. Nous sommes donc amenés à faire l'hypothèse (H 1) : $0 < E(Y_1) < +\infty$.

Nous commençons par construire une nouvelle chaîne de Markov qui a la particularité d'être composée de points de $\{X_n ; n \geq 0\}$ convenablement choisis.

1.1 - Construction d'une chaîne de Markov

Considérons la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ de loi μ ; c'est à dire la chaine de Markov canonique $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \otimes_{\mathbb{N}} B_{\mathbb{R}}, (Z_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ de probabilité de transition $P(x,dy)=\varepsilon_x * \mu(dy)$.

Pour tout $n\geq 1$, posons : $Y_n = Z_n - Z_{n-1}$. Les v.a Y_n, $n\geq 1$, sont indépendantes et de loi μ. Pour tout $n\geq 1$, on a $Z_n = Z_0+Y_1+ \dots +Y_n$

où $Z_0 = x$ $\mathbb{P}_x$-p.s

Nous définissons une suite de temps d'échelle $\{S_n ; n \geq 0\}$ de la manière suivante :

Posons $S_0 = 0$

$$S_1 = \begin{cases} \inf\{k > 0 : Z_k > 0\} & \text{si } \{\dots\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

et par récurrence, pour $n \geq 2$

$$S_n = \begin{cases} \inf\{k > S_{n-1} : Z_k - Z_{S_{n-1}} > 0\} & \text{si } \{\dots\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que les temps ainsi définis ne correspondent pas aux temps de réflexions (i.e aux temps où se produisent des chocs élastiques en 0).

Nous définissons alors une nouvelle chaîne de Markov $\{R_n ; n \geq 0\}$ en posant pour tout $n \geq 0$ $R_n = X_{S_n}$.

En utilisant la définition des temps S_n, $n \geq 0$, un calcul élémentaire permet d'écrire pour tout $n \geq 1$: $R_n = |R_{n-1} - (Z_{S_n} - Z_{S_{n-1}})|$.

Lemme (3.1) .(i) Les v.a. $Z_{S_n} - Z_{S_{n-1}}$, $n \geq 1$ sont positives, indépendantes et de même loi β.

(ii) On a pour tout $x \geq 0$: $0 < \mathbb{E}_x(Z_{S_1} - Z_{S_0}) = \mathbb{E}_0(Z_{S_1}) < +\infty$.

La démonstration est donnée en appendice.

La chaîne$\{Z_n = X_{S_n} ; n \geq 0\}$ est donc une chaîne de Markov dont le noyau de transition Q associé est défini pour toute fonction f borélienne, bornée sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par $Q f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(\,|x-y|\,)\,\beta(dy)$. D'après le théorème (3.1), il existe donc une mesure de probabilité ν_0, Q-invariante (i.e $\nu_0 Q = \nu_0$).

1.2 - Définition d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, P-invariante

Nous avons la proposition suivante, qui généralise le résultat de [5] :

Proposition (3.1) Soit ν_0 la mesure de probabilité précédemment définie. On pose, pour tout borélien A de $\mathbb{R}_+$:

$$\nu(A) = \mathbb{E}_{\nu_0}\Big[\sum_{0 \leq n < S_1} 1_A(X_n)\Big].$$

Alors ν est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$, P-invariante (i.e $\nu P = \nu$).

<u>Démonstration</u> Pour tout borélien A de $\mathbb{R}_+$ nous avons :

$$\nu P(A) = \mathbb{E}_{\nu_0}\left[\sum_{0<n<S_1} P1_A(X_n)\right]$$
$$=\mathbb{E}_{\nu_0}\left[\sum_{1<n<S_1} 1_A(X_n)\right]$$

En effet : $\mathbb{E}_x\left[\sum_{0<n<S_1} P1_A(X_n)\right]$

$$= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geq 0} 1_{\{S_1>n\}} P1_A(X_n)\right]$$
$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x\left[1_{\{S_1>n\}} \mathbb{E}_{X_n}\left[1_A(X_1)\right]\right]$$
$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x\left[1_{\{S_1>n\}} \mathbb{E}_x\left[1_A(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n\right]\right] \quad \text{(où } \mathcal{F}_n \text{ désigne la tribu } \sigma(Y_1, \dots, Y_n))$$
$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}_x\left[\mathbb{E}_x\left[1_{\{S_1>n\}} 1_A(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n\right]\right]$$

car $1_{\{S_1>n\}}$ est $\mathcal{F}_n$ - mesurable, donc

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{0\leq n<S_1} P1_A(X_n)\right] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{E}_x\left[1_{\{S_1>n\}} 1_A(X_{n+1})\right]$$
$$= \mathbb{E}_x\left[\sum_{n\geq 0} 1_{\{S_1>n\}} 1_A(X_{n+1})\right]$$
$$= \mathbb{E}_x\left[\sum_{0\leq n<S_1} 1_A(X_{n+1})\right]$$
$$= \mathbb{E}_x\left[\sum_{1\leq n\leq S_1} 1_A(X_n)\right]$$

d' où l' on déduit que :

$$\mathbb{E}_{\nu_0}\left[\sum_{0\leq n<S_1} P1_A(X_n)\right] = \mathbb{E}_{\nu_0}\left[\sum_{1\leq n\leq S_1} 1_A(X_n)\right].$$

La différence $\nu P(A) - \nu(A)$ est alors égale à :

$$\nu P(A) - \nu(A) = \mathbb{E}_{\nu_0}\left[1_A(X_{S_1})\right] - \mathbb{E}_{\nu_0}\left[1_A(X_0)\right]$$

or $\quad \mathbb{E}_{\nu_0}\left[1_A(X_{S_1})\right] = \int Q\, 1_A(x)\, \nu_0(dx) = \nu_0(A)$ car ν_0 est Q-invariante

et $\quad \mathbb{E}_{\nu_0}\left[1_A(X_0)\right] = \int \mathbb{E}_x\left[1_A(X_0)\right] \nu_0(dx) = \int 1_A(x)\, \nu_0(dx) = \nu_0(A)$

on en déduit que $\nu P(A) - \nu(A) = 0$ et donc que ν est une mesure de probabilité P-invariante.

Dans tout ce qui suit nous noterons λ la loi de la v.a. réelle positive f_{Y_1} et S_λ le semi-groupe fermé engendré par le support de λ.

2 - Existence d'une suite d'applications contractantes dans S_λ

Nous allons montrer, sous l'hypothèse (H 2) : " le sous-groupe fermé engendré par le support de μ est égal à $\mathbb{R}$", qu'il existe une suite $\{\xi_n ; n \geq 0\}$ d'éléments de S_λ convergeant dans $(B, \| \cdot \|_B)$ vers la fonction identiquement nulle.

Notons que l'hypothèse (H 2) exclu le cas où le support de μ engendre un réseau, c'est-à-dire un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Nous avons la

Proposition (3.2) Sous l'hypothèse (H 2), il existe une suite $\{\xi_n ; n\geq 0\}$ d'éléments de S_λ telle que $\{\xi_n ; n\geq 0\}$ converge dans $(B, \| \cdot \|_B)$ vers la fonction identiquement nulle.

Avant de démontrer la proposition nous allons établir deux lemmes qui nous serons utiles par la suite.

Lemme (3.2) Si α_0, α_1 sont deux réels tels que $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ alors pour tout x dans $[0,\alpha_0]$ on a : $f_{\alpha_0}^{[\alpha_1/\alpha_0]} \circ f_{\alpha_1}(x) = f_{\alpha_0 \{\alpha_1/\alpha_0\}}(x)$

où $[a]$ et $\{a\}$ désignent respectivement la partie entière et la partie fractionnaire de a.

<u>Démonstration</u> Nous avons pour tout $x \in [0, \alpha_0]$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha_0} \circ f_{\alpha_1}(x) &= |\alpha_1 - x - \alpha_0| \\ &= f_{\alpha_0(\alpha_1/\alpha_0 - 1)}(x) \\ &= f_{\alpha_0([\alpha_1/\alpha_0]-1)+\alpha_0\{\alpha_1/\alpha_0\}}(x) \end{aligned}$$

Si $[\alpha_1/\alpha_0] = 1$ le résultat est démonté , sinon on réitère le procédé en composant une nouvelle fois à gauche par f_{α_0} , et ainsi de suite .

Il résulte alors de façon immédiate le

<u>Corollaire (3.1)</u> : si α_0 et α_1 sont deux réels tels que $0 < \alpha_0 < \alpha_1$ alors pour tout entier $n \geq 1$ et tout x dans $[0, \alpha_0]$ on a :

$$(f_{\alpha_0}^{[\alpha_1/\alpha_0]} \circ f_{\alpha_1})^n(x) = f^m_{\alpha_0\{\alpha_1/\alpha_0\}}(x).$$

Avant de démontrer la proposition (3.2) nous faisons la remarque suivante qui nous sera utile par la suite: soient u et M deux réels strictement positifs , alors pour tout entier $n \geq [M/u]$ et pour tout $x \in [0,M]$ on a l'inégalité suivante : $f^n_\mu(x) \leq u$.

En particulier si α_1 / α_0 n'est pas entier, on a pour tout x dans $[0, \alpha_0]$

$$g_{\alpha_0,\alpha_1}(x) = (f_{\alpha_0}^{[\alpha_1/\alpha_0]} \circ f_{\alpha_1})^{[1/\{\alpha_1/\alpha_0\}]}(x) \leq \alpha_0 \{\alpha_1/\alpha_0\}.$$

. Démonstration de la proposition (3.2) : Pour établir la proposition,nous allons considérer les deux cas suivants :

a) le support de μ contient deux nombres dont le rapport est irrationnel.

b) le support de μ est contenu dans $\mathbb{Q}.\alpha$, où α est un réel.

Nous commençons par traiter le cas a) Soit $A = \{ x \in \mathbb{R}_+ : f_x \in S_\lambda \}$. Alors A contient nécessairement deux éléments dont le rapport est irrationnel. C'est en effet immédiat lorsque le support de μ contient deux éléments positifs dont le rapport est irrationnel ; lorsque le support de μ contient deux nombres $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ dont le rapport est irrationnel on a pour tout réel x positif :

$$f_\alpha^{[-\beta/\alpha]+1} \circ f_\beta (x) = f_{\alpha[1-\{-\beta/\alpha\}]}(x).$$

Il résulte donc que $\alpha(1 - \{-\beta/\alpha\})$ qui est positif appartient à A. Par conséquent α et $\alpha(1-\{-\beta/\alpha\})$ sont deux éléments de A dont le rapport est irrationnel.

On peut donc supposer que A contient deux éléments positifs de rapport irrationnel. Soient α_0 et α_1, $0 < \alpha_0 < \alpha_1$, ces deux éléments. Posons $u = \{\alpha_1 / \alpha_0\}$.

Notons T l'application à valeurs dans $[0,1[$, définie pour tout x dans $]0,1[$ définie par : $Tx = \{1/x\}$.

Soit $\{u_n ; n \geq 0\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha_0 . u \\ u_n = u_0 . Tu \dots T^n u , \ n \geq 1 . \end{cases}$$

Il est facile de voir que cette suite converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Posons, pour tout x élément de $\mathbb{R}+$:

$$\varphi_n(x) = g_{u_n,u_{n-1}} \circ \ldots \circ g_{u_0,\alpha_0} \circ g_{\alpha_0,\alpha_1}(x) \quad , \quad n \geq 1 .$$

La restriction de φ_n à l'intervalle $[0,\alpha_0]$ est égale à la restriction d' un élément de S_λ à l'intervalle $[0,\alpha_0]$.

De plus , si $x \in [0,\alpha_0]$ nous savons que pour tout $n \geq 1$: $\varphi_n(x) \leq u_n$.

On en déduit que la suite de fonctions $\{\varphi_n \ ; \ n \geq 1\}$ converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur $[0,\alpha_0]$.

Soit ψ_{α_0} une valeur d'adhérence dans $(B,\|.\|_B)$ de la suite $\{f^m_{\alpha_0} \ ; \ n \geq \infty\}$ .C'est un élément de S_λ ; de plus il est facile de voir que la fonction ψ_{α_0} est définie par :

$$\psi_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} \alpha_0 [x/\alpha_0] & \text{si } [x/\alpha_0] \text{ est paire} \\ \alpha_0(1 - [x/\alpha_0]) & \text{si } [x/\alpha_0] \text{ est impaire} \end{cases}$$

La suite de fonctions $\{\xi_n \ ; n \geq 1\}$ définie par :

$$\forall\, n \geq 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \xi_n(x) = \varphi_n \circ \psi_{\alpha_0}(x).$$

converge simplement vers la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. Ce qui démontre la proposition .

b) Considérons <u>le cas où le support de μ est contenu dans $\mathbb{Q}.\alpha$, α réel.</u>
Supp μ désignera le support de μ.

Notons, pour commencer, que l'hypothèse $0 < \mathbb{E}\,[\,Y_1] < +\infty$ entraîne que le support de μ a une intersection non vide avec $\mathbb{R}_+$. Si cette intersection contient une suite $\{\alpha_n \ ; \ n \geq 0\}$ qui converge en décroissant vers 0, il suffit, pour obtenir la proposition, de poser (corollaire (3.1)) :

$$\xi_n(x) = f_{\alpha_m}^{[\alpha_1/\alpha_n]} \circ \psi_{\alpha_1}(x).$$

Dorénavant nous exclurons cette possibilité et Supp μ possède un plus petit élément α_0.

Par homogénéïté (c.à.d pour $a \neq 0$ $f_a(x) = af_1(x/a)$), nous pouvons supposer que $\alpha_0 = \alpha = 1$.

Soient p_i/q_i, $i \in I$, les éléments de supp $\mu \cap \mathbb{R}_+$, autres que 1, c.à.d supp $\mu \cap \mathbb{R}_+ = \{1, p_i/q_i \,;\, i \in I\}$.

L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}_+ : f_x \in S_\lambda\}$ contient nécessairement une suite de rationnels $\{p_n/q_n \,;\, n \geq 1\}$ vérifiant :

i) pour tout $n \geq 1$, $p_n/q_n > 1$

ii) pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{pgcd}(p_n, q_n) = 1$

iii) $\{q_n \,;\, n \geq 1\}$ est une suite croissante qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

En effet : i) et ii) sont immédiats et si iii) n'était pas vérifié alors l'ensemble $\{q_i : p_i/q_i \in A, \mathrm{pgcd}(p_i,q_i) = 1\}$ serait fini ; notons $\{q_1, \ldots, q_k\}$ cet ensemble.

En notant $M = \mathrm{ppcm}\{q_1, \ldots, q_k\}$, on a alors $M . A \subset \mathbb{N}$.

Si p/q est un élément strictement négatif du support de μ, de l'égalité, satisfaite pour tout élément x de $\mathbb{R}_+$:

$$f_1^{[-p/q]+1} \circ f_{p/q}(x) = f_{1-[-p/q]}(x),$$

on en déduit que $1 - [-p/q]$ est un élément de A, et donc que $M . [-p/q]$ est un entier positif.

Il résulte alors que $M.\mathrm{supp}\,\mu \subset \mathbb{Z}$, autrement dit μ est portée par le réseau $M^{-1}.\mathbb{Z}$: cas exclu par hypothèse.

Soit p/q, un quelconque élément de la suite $\{p_n/q_n\ ;\ n \geq 1\}$. Notons $r_1, \ldots, r_m = 1$ les restes successifs obtenus en appliquant l' algorithme d'Euclide à p et q.

Si on pose $u = r_1/q$, il est facile de vérifier que l'on a :

$Tu = r_2/r_1, \ldots,\ T^{m-1}u = r_m / r_{m-1} = 1 / r_{m-1}$

d'où l'on déduit que

$$u \,.\, Tu \ldots T^{m-1}u = 1/q.$$

Notons que $T^m u = 0$; ce qui ne permet pas d'appliquer de façon directe le raisonnement du a). Néanmoins, en vertu du lemme (3.2) et de son corollaire la fonction $h_{p/q}$ définie par :

$$h_{p/q}(x) = g_{1/q\,.\,r_{m-1}/q} \circ \ldots \circ g_{1\,.\,p/q}(x)$$

envoie l'intervalle $[0,1]$ dans l'intervalle $[\,0,\ 1/q]$.

En conservant les notations du a) il suffit de poser pour tout $n \geq 1$:

$$\varphi_n(x) = h_{p_n/q_n}(x) \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } [\,0,1\,]$$

puis $$\xi_n(x) = \varphi_n \circ \psi_1(x) \qquad \text{pour tout } x \geq 0.$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition (3.2).

3 - Calcul de $S_\lambda.0$.

Nous avons la

Proposition (3.3): (i) Si le support de μ contient un réel négatif ou si le support de μ est un sous-ensemble non borné de $\mathbb{R}_+$, on a $S_\lambda.0 = \mathbb{R}_+$.

(ii) Si le support de μ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}_+$, soit s le plus grand élément de ce support. Alors $S_\lambda.0 = [0,s]$.

Pour démontrer la proposition nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme (3.3): Soient α_0,α_1, $0<\alpha_0<\alpha_1$, deux éléments de $A=\{x\in\mathbb{R}_+ : f_x \in \bar{S}_\lambda\}$. Alors :

(i) $S_\lambda.0$ contient les éléments de la forme $\alpha_0.\{k\alpha_1/\alpha_0\}$, $k\in\mathbb{N}^*$.

(ii) Si de plus α_0 et α_1 sont de rapport irrationnel alors $S_\lambda.0$ contient l'intervalle $[0,\alpha_1]$.

Démonstration: (i) Posons pour tout $k\geqslant 2$,

$$g_{k,\alpha_0,\alpha_1} = f_{\alpha_0}^{[k\alpha_1/\alpha_0]-[(k-1)\alpha_1/\alpha_0]-\ldots-[\alpha_1/\alpha_0]-1}$$

De l'égalité $f_{\alpha_0}^{[\alpha_1/\alpha_0]} o f_{\alpha_1}(0) = \alpha_0.\{\alpha_1/\alpha_0\}$

on voit facilement que pour tout $k\geqslant 2$:

$$g_{k,\alpha_0,\alpha_1} o f_{\alpha_1} o g_{k-1,\alpha_0,\alpha_1} o f_{\alpha_0} o f_{\alpha_1} o \ldots o\, g_{2,\alpha_0,\alpha_1} o f_{\alpha_0} o f_{\alpha_1} o f_{\alpha_0}^{[\alpha_1/\alpha_0]} o f_{\alpha_1}(0)$$
$$= \alpha_0.\{k\alpha_1/\alpha_0\}.$$

(ii) α_0 et α_1 étant de rapport irrationnel, l'ensemble

{ $\{k\alpha_1/\alpha_0\}$, $k\in\mathbb{N}^*$} est dense dans $[0,1]$; il s'ensuit que $S_\lambda.0$ contient l'intervalle $[0,\alpha_0]$.

Le résultat découle alors des inclusions $f^{k}_{\alpha_0} \circ f_{\alpha_1}(S_\lambda.0) \subset S_\lambda.0$, pour $0 \leqslant k < [\alpha_1/\alpha_0]$.

<u>Démonstration de la proposition (3.3):</u> comme précèdemment nous allons considérer les deux cas :

(a) le support de μ contient deux nombres dont le rapport est irrationnel.

(b) le support de μ est contenu dans $\mathbb{Q}.\alpha$, α réel.

<u>Considérons le cas (a):</u>

(i)∘ Supposons que le support de μ contient un élèment négatif α .Soient α_0 et α_1 , $0<\alpha_0<\alpha_1$, deux éléments de rapport irrationnel de A (voir §2).On sait d'après le lemme (3.3) que $S_\lambda.0$ contient l'intervalle $[0,\alpha_1]$. De l'égalité $f_{\alpha_1} \circ f^{p}_{\alpha}(x) = f_{\alpha_1+p\alpha}(x)$, satisfaite pour tout $p \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, il résulte que A contient les éléments $\alpha_1+k\alpha$, $k \geqslant [-\alpha/\alpha_1]+1$, dont les rapports avec α_0 sont irrationnels. Du lemme (3.3) , il résulte que $S_\lambda.0$ contient les intervalles $[0,\alpha_1+k\alpha]$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ donc $S_\lambda.0 = \mathbb{R}_+$.

∘ Lorsque le support de μ est un sous-ensemble non borné de $\mathbb{R}_+$, on peut trouver des couples (α_0,α_1) avec α_1/α_0 irrationnel et α_1 arbitrairement grand . On peut alors appliquer le lemme (3.3) et on en déduit que $S_\lambda.0=\mathbb{R}_+$.

.(ii) Supposons que le support de μ soit un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}_+$. Il existe alors un élément α du support de μ dont le rapport avec s est irrationnel. Du lemme (3.3), il résulte que $S_\lambda.0 = [0,s]$.

Considérons le cas (b):

En appliquant la première assertion du lemme (3.3), on obtient que, pour tout élément p/q de A, $p/q > 1$, $S_\lambda.0$ contient les éléments de la forme $\{kp/q\}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Puisque $pgcd(p,q)=1$, il résulte que $S_\lambda.0$ contient l'ensemble $\{1/q, \ldots, (q-1)/q\}$. Mais A contient une suite $\{p_n/q_n, n \geq 1\}$ vérifiant :

i') $pgcd(p_n,q_n) = 1 \quad \forall n \geq 1$

ii') la suite $\{q_n, n \geq 1\}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$

Il s'ensuit alors que l'intervalle [0,1] est contenu dans $S_\lambda.0$. Le résultat découle alors des inclusions $f^k_{p/q} \circ f_s (S_\lambda.0) \subset S_\lambda.0$, pour $0 \leq k < [p/q]$.

4 - Application du théorème (1.1)

Rappelons les hypothèses faites aux paragraphes 1 et 2 précédents :

(H 1) : $0 < \mathbb{E}(Y_1) < +\infty$

(H 2) : le sous-groupe fermé engendré par le support de μ est égal à $\mathbb{R}$.

Nous avons vu (§ 1) que sous l'hypothèse (H1), il existait une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}_+$, μ-invariante et (§2) que sous l'hypothèse (H2) il existait dans le semi-groupe S_λ engendré par le support de λ une suite contractante $\{\xi_n\ ; n \geqslant 0\}$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème (3.2) **Sous les hypothèses (H1) et (H2), ν est alors l'unique mesure de probabilité P-invariante. Pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$, la suite de fonctions $\{f_{Y_1(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_n(\omega)}(.)\ , n \geqslant 1\}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe une v.a. réelle positive Z de loi ν telle que, pour tout x élément de $\mathbb{R}$, la suite $\{f_{Y_1} \circ \dots \circ f_{Y_n}(x)\ ; n \geqslant 1\}$ converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers Z. De plus, pour tout réel x, la chaine $\{f_{Y_n} \circ \dots \circ f_{Y_1}(x)\ ; n \geqslant 1\}$ est récurrente positive au sens de Harris.**

Notons que la $1^{-\text{ère}}$ assertion du théorème (unicité de la mesure ν) ne constitue pas un fait nouveau puisque ce résultat a été démontré d'une maniére différente de la notre , dans ([5] , Th.2.2).

<u>Démonstration:</u> si le support de μ contient un élément négatif ou si le support de μ est un sous-ensemble non borné de $\mathbb{R}_+$, le théorème résulte du théorème (1.1) , en vertu du (i) de la proposition (3.3).

Considérons le cas où le support de μ est borné dans $\mathbb{R}_+$. Soit s le plus grand élément de ce support. D'après le théorème (1.1) il existe un sous-ensemble Ω_1 de Ω , de $\mathbb{P}$-mesure 1 et une v.a réelle Z tels que pour tout ω élément de Ω_1 la suite de fonctions $[f_{Y_1(\omega)} o \dots o f_{Y_n(\omega)} ; n \geq 1]$ converge vers la fonction constante égale à $Z(\omega)$. De la compacité de $[0,s]$, on en déduit que cette suite converge uniformément sur $[0,s]$ vers la fonction constante égale à $Z(\omega)$.

On peut choisir Ω_1 de sorte que pour tout élément ω de Ω_1 la suite $[(Y_1(\omega)+ \dots +Y_n(\omega))/n ; n \geq 1]$ converge vers $\mathbb{E}[Y_1]$.

Soit ω un élément fixé de Ω_1 : d'après ce qui précède on a,

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon) > 0 : \;\; \forall\, n \geq N(\varepsilon) \;\;\; \forall\, x \in [0,s]$

$$| f_{Y_1(\omega)} o \dots o f_{Y_n(\omega)}(x) - Z(\omega) | < \varepsilon$$

Soit u un réel tel que u > s . Pour tout entier $p \geq 1$ on a:

$$f_{Y_1(\omega)} o \dots o f_{Y_{N+p}(\omega)}(u) = (f_{Y_1(\omega)} o \dots o f_{Y_N(\omega)}) [(f_{Y_{N+1}(\omega)} o \dots o f_{Y_{N+p}(\omega)})(u)]$$

Puisque la suite de v.a $\{ Y_{N+1}(\omega) + \dots + Y_{N+p}(\omega) \, ; p \geq 1 \}$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$, il existe un entier p_0 tel que pour tout $p \geq p_0$ on ait

$$f_{Y_{N+1}(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_{N+p}(\omega)}(u) \in [0,s].$$

En effet si $f_{Y_{N+1}(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_{N+p}(\omega)}(u) > s$ on aurait

$$f_{Y_{N+1}(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_{N+p}(\omega)}(u) = u - (Y_{N+p}(\omega) + \dots + Y_{N+1}(\omega)) > s \, ;$$

c' est à dire que pour tout $p \geq p_0$: $Y_{N+1}(\omega) + \dots + Y_{N+p}(\omega) < u$

Par conséquent pour tout $p \geq p_0$ on a :

$$| f_{Y_1(\omega)} \circ \dots \circ f_{Y_{N+p}(\omega)}(x) - Z(\omega) | < \varepsilon$$

La démonstration de la dernière assertion est identique à celle du corollaire (1.1).

Ce qui démontre le théorème.

APPENDICES

Appendice 1 Nous nous proposons de démontrer le lemme (1.1).

Soit X une partie bornée de $(L, |\cdot|_L)$. Considérons une suite de fonctions $\{h_n\ ;\ n \geq 0\}$ de X. Il existe alors une constante finie $C > 0$ telle que pour tout $n \geq 0$ on ait :

$$|h_n|_L \leq C < +\infty.$$

Puisque pour tout $n \geq 0$, $m(h_n) \leq C$,la suite $\{h_n\ ;\ n \geq 0\}$ est une famille de fonctions équicontinue.Pour tout compact K de $\mathbb{R}^d$, la suite $\{h_{n|_K}\ ;\ n \geq 0\}$ est bornée (c.à.d $\sup_n \sup\{ h_{n|_K}(x)\ ;\ x \in K\} < +\infty$).D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla , on peut extraire de la suite $\{h_n\ ;\ n \geq 0\}$ une sous-suite $\{h_{n_k}\ ;\ k \geq 0\}$ qui converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$ vers une fonction h continue.

$h \in B$ puisque pour tout $n \geq 0$ $\quad \|h_n\|_B \leq C < +\infty$.

Il s'agit maintenant de montrer que la suite $\{h_{n_k}\ ;\ k \geq 0\}$ converge vers h dans $(B, \|\cdot\|_B)$.

Pour tout réel $a > 0$ et tout $k \geq 0$ on a :

$$\|h_{n_k} - h\|_B \leq \operatorname{Sup}\{ \|h_{n_k}(x) - h(x)\| / (1 + \|x\|^2)\ ;\ \|x\| \leq a\}$$
$$+ \operatorname{Sup}\{ \|h_{n_k}(x) - h(x)\| / (1 + \|x\|^2)\ ;\ \|x\| > a\}.$$

Le second terme du membre de droite peut être majorer par :

$$\operatorname{Sup}\{ \|x\| / (1 + \|x\|^2)\ ;\ \|x\| > a\} + \|h_{n_k}(0) - h(0)\|.$$

Fixons a de sorte que $\sup \{ \| x \| / (1 + \| x \|^2) ; \| x \| > a \} < \varepsilon / 3$.

Il existe alors un entier N_a tel que pour tout $n \geqslant N_a$ on ait

$$\mathrm{Sup} \{ \| h_{n_k}(x) - h(x) \| / (1 + \| x \|^2) ; \| x \| \leqslant a \} < \varepsilon/3.$$

Il résulte alors que pour tout $n \geqslant N_a$ $\| h_{n_k} - h \| < \varepsilon$.

Par conséquent la suite $\{h_{n_k} ; k \geqslant 0\}$ converge vers h dans $(B, \| . \|_B)$. Ce qui démontre le lemme (1.1).

Appendice 2 Nous démontrons dans cet appendice le lemme (3.1).

Considérons la marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ de loi μ ; c'est à dire la chaîne de Markov canonique $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \otimes_{\mathbb{N}} B_{\mathbb{R}}, (Z_n)_{n\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in\mathbb{R}})$ de probabilité de transition $P(x, dy) = \varepsilon_x * \mu(dy)$.

Pour tout $n\geq 1$,posons : $Y_n = Z_n - Z_{n-1}$. Les v.a Y_n , $n\geq 1$, sont indépendantes et de loi μ .

Pour tout $n\geq 1$, on a $Z_n = Z_0 + Y_1 + \dots + Y_n$

où $Z_0 = x$ $\qquad \mathbb{P}_x$- ps

Soient $f_1, \dots, f_p$ des fonctions boréliennes, bornées sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\mathbb{E}_x[\ \prod_{1\leq k\leq p} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ ]$$

$$= \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_x[\ \prod_{1\leq k\leq p} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ | \quad {}_{S_{p-1}}]]$$

$$= \mathbb{E}_x[\ \prod_{1\leq k\leq p-1} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ \mathbb{E}_{Z_{S_{p-1}}}[f_p(Z_{S_1} - Z_{S_0})]]\ (\text{Prop. de Markov forte})$$

Mais, pour tout réel u , $\mathbb{E}_u[f_p(Z_{S_1} - Z_{S_0})]$ ne dépend pas de u et on a :

$$\mathbb{E}_u[f_p(Z_{S_1} - Z_{S_0})] = \mathbb{E}_0[f_p(Z_{S_1})] \quad \text{car } Z_0 = 0 \quad \mathbb{P}_0\text{-p.s}$$

d'où $\mathbb{E}_x[\prod_{1\leq k\leq p} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})] = \mathbb{E}_x[\prod_{1\leq k\leq p-1} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})]\,\mathbb{E}_0[f_p(Z_{S_1})]$

Par le même raisonnement il s'ensuit que :

$$\mathbb{E}_x[\prod_{1\leq k\leq p} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})] = \prod_{1\leq k\leq p} \mathbb{E}_0[f_k(Z_{S_1})]$$

Puisque pour tout $k=1,\dots,p$

$$\mathbb{E}_x[\ f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ ] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{Z_s}[f_k(Z_{S_1} - Z_{S_0})]] = \mathbb{E}_0[f_k(Z_{S_1})] \quad (*),$$

on en déduit que :

$$\mathbb{E}_x[\ \prod_{0\leq k\leq p} f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ ] = \prod_{0\leq k\leq p} \mathbb{E}_x[\ f_k(Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}})\ ].$$

ce qui démontre l'indépendance des v.a.r. $Z_{S_n} - Z_{S_{n-1}}$, $n \geqslant 1$.

De (*) on en déduit en posant $f_k = \mathbf{1}_A$ où A est un borélien de $\mathbb{R}_+$, que pour tout $k \geqslant 1$

$$\mathbb{P}_x [Z_{S_k} - Z_{S_{k-1}} \in A] = \mathbb{P}_0 [Z_{S_1} \in A] = \beta(A).$$

Ce qui prouve que les v.a.r. $Z_{S_n} - Z_{S_{n-1}}$, $n \geqslant 1$ sont de même loi β.

Simulation d'une loi uniforme sur [0,1]

La figure 1 représente les fonctions π_n de [0,1] dans [0,1] pour n=1 à 5

La figure 2 représente les fonctions π_n de [0,1] dans [0,1] pour n=6 à 10

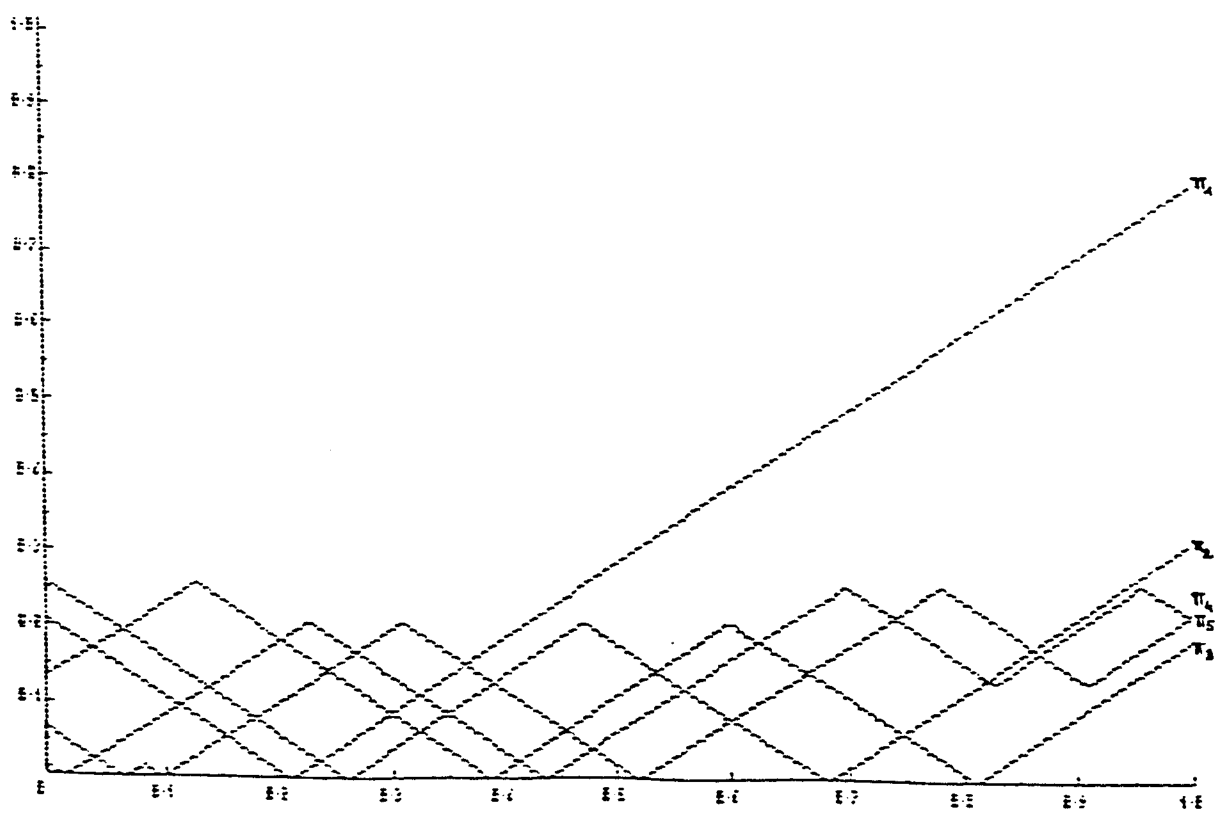
La figure 3 représente les fonctions π_n de [0,0.1] dans [0,0.1] pour n=16,32,64,128,256

La figure 4 représente les fonctions π_n de [0,0.1] dans [0,0.1] pour n=256,512,768

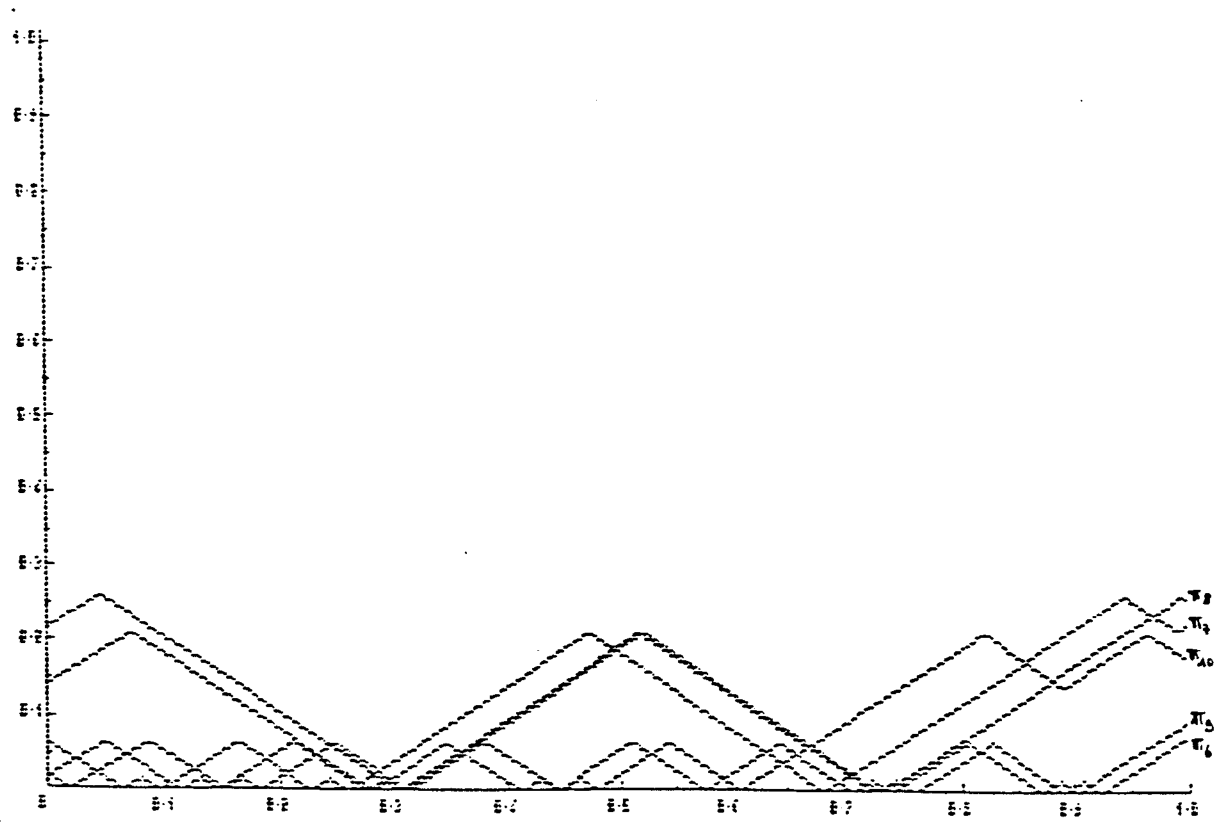
La figure 5 représente les fonctions π_n de [0,0.1] dans [0,0.1] pour n=800,900

On voit que la suite de fonctions { π_n , n≥0 } converge (au sens du théorème (3.2)) vers une fonction constante dont la valeur est comprise entre 0,05 et 0,07.

Figure 1 : graphes des fonctions π_1 à π_5



<u>Figure 2</u> : graphes des fonctions π_6 à π_{10}



<u>Figure 3</u> : graphes des fonctions $\pi_{16}, \pi_{32}, \pi_{64}, \pi_{128}, \pi_{256}$

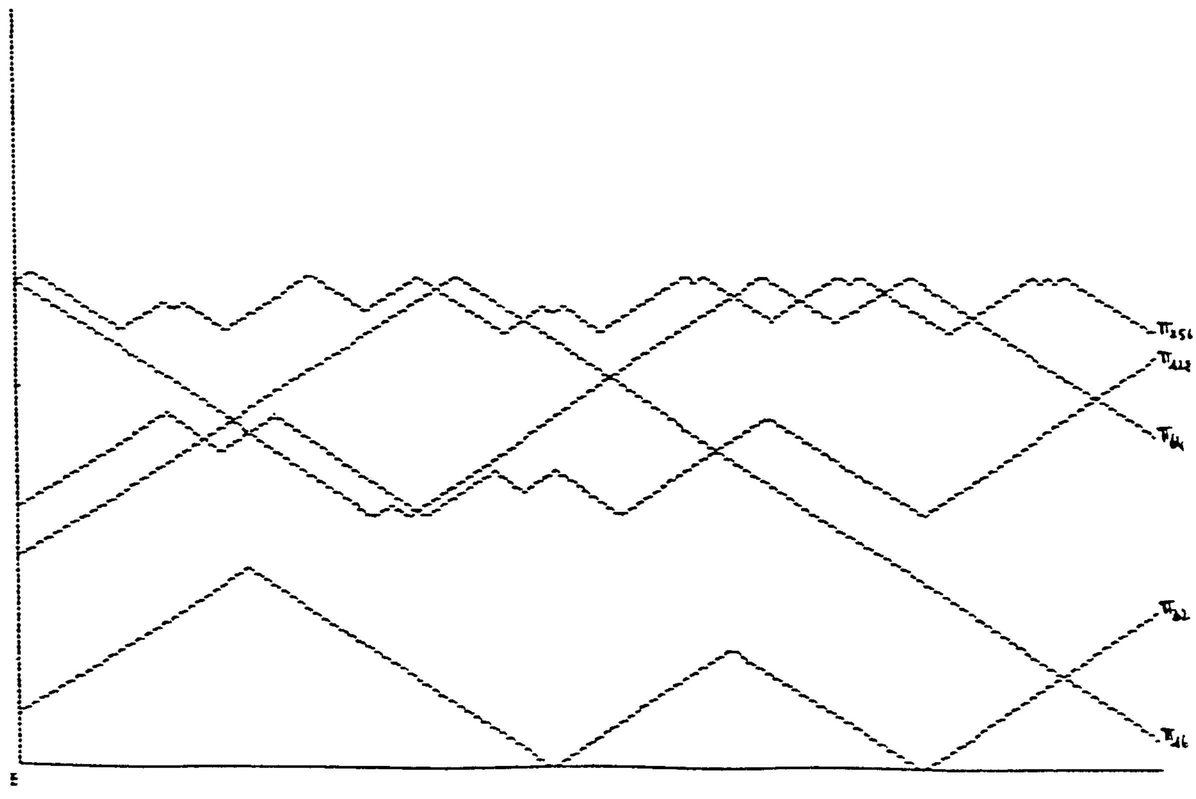


Figure 4 : graphes des fonctions $\pi_{256}, \pi_{512}, \pi_{768}$

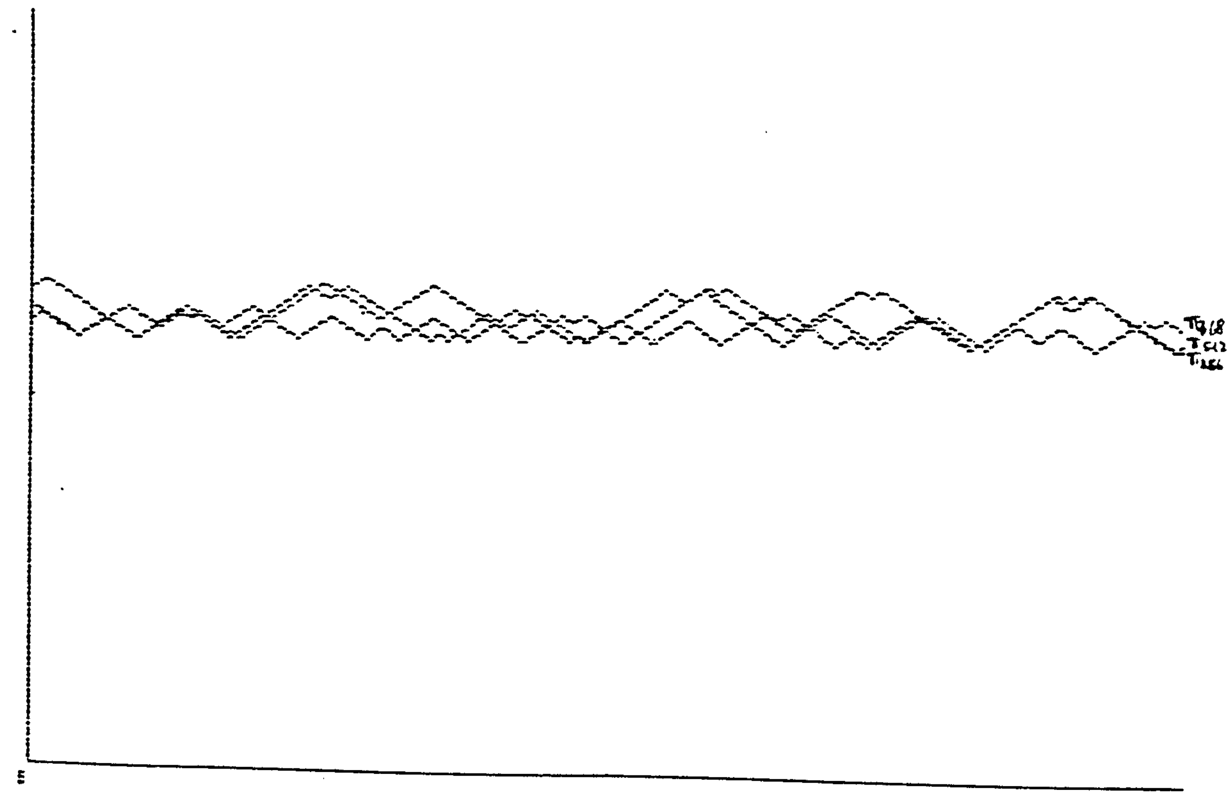
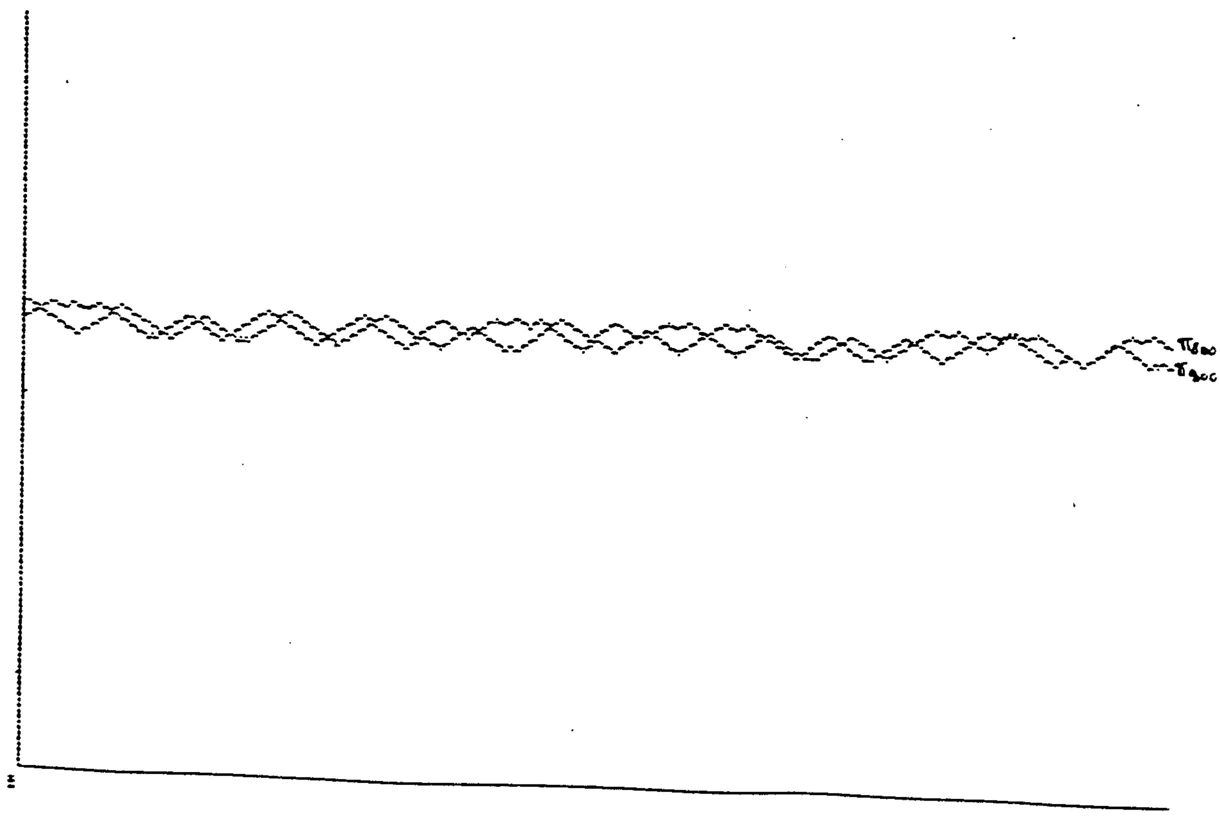


Figure 5 : graphes des fonctions π_{800}, π_{900}



BIBLIOGRAPHIE

[1] M.A. BOUDIBA : "La chaîne de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ où les v.a. $(Y_n)_{n \geq 0}$ sont i.i.d" CRAS Paris, t. 301, série **I** n° 10 (1985)

[2] M.A. BOUDIBA : "Sur la chaine de Feller $X_{n+1} = |X_n - Y_{n+1}|$ et les chaines associées" Thèse 3ème cycle Université Paul Sabatier Toulouse (1986).

[3] W. FELLER : "An introduction to probability theory and its applications" Vol. **II**, New York, J. Wiley (1971)

[4] Y. GUIVARC'H - A. RAUGI : "Frontière de Furstenberg,propriétés de contractions et théorèmes de convergence. Zeït. für. Wahr. n° 69, p. 187-242 (1985)

[5] F.B. KNIGHT : "On the absolue difference chains" Zeït. für. Wahr. n° 43, p. 57-63 (1977)

[6] NORMAN : "Markov processes and learning models" Academic Press, New York (1972).

[7] A. RAUGI : "Périodes des fonctions harmoniques bornées" Séminaire de Probabilités, Rennes (1978)

[8] D. REVUZ : "Markov Chains" North-Holland/Mathematical Library

[9] VON SCHELLING : "Über die Verteilung Kopplungswerte in gerkreuzten Ferumeldekabeln grosser Länge" Elektrische Nachrichten Technik 11/12 Nov./Dez. 1943 20 , 251 - 259