

HUBERT HENNION

Comportement des exposants de Lyapounov d'une matrice perturbée par des rotations

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1986, fascicule 1
« Probabilités », , p. 89-98

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1986__1_89_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT DES EXPOSANTS DE LYAPOUNOV

D'UNE MATRICE PERTURBEE PAR DES ROTATIONS

par H. HENNION

Soit μ une probabilité sur $GL(d, \mathbb{R})$ et $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de matrices aléatoires indépendantes de lois μ , telles que :

$$E [\sup (\text{Log}^+ \|X_1\|, \text{Log}^+ \|X_1^{-1}\|)] < +\infty,$$

la loi des grands nombres de Furstenberg-Kesten [6] affirme que

$$\lim_n \text{p.s.} \frac{1}{n} \text{Log} \|X_n \dots X_1\| = \gamma(\mu).$$

Si $(\mu_s)_{s>0}$ est une famille de probabilités irréductibles sur $GL(d, \mathbb{R})$ satisfaisant à l'hypothèse d'intégrabilité ci-dessus et convergeant vers μ lorsque s tend vers 0, la convergence de $\gamma(\mu_s)$ vers $\gamma(\mu)$ qui est facilement établie lorsque μ est irréductible peut être mise en défaut dans le cas contraire, comme le montre le cas où :

$$\mu = \delta_a, \quad \mu_s = (1-s)\delta_a + s\delta_b, \quad 0 < s \leq 1,$$

$$a = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 1, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le problème posé est alors celui d'énoncer des conditions sur $(\mu_s)_{s>0}$ propres à rétablir un comportement continu de $\gamma(\mu_s)$. On trouve des éléments de réponse dans [3], [4], [5].

L'objet de ce qui suit est l'étude de ce problème pour des matrices 2×2 lorsque $\mu_s = m_s * \delta_a$ que a désigne la matrice diagonale définie ci-dessus et que $(m_s)_s$ est une famille de probabilités irréductibles portées par le sous-groupe $SO(2)$ des rotations de $\mathbb{R}^2$ et convergeant vers la matrice identité. A la lecture de la preuve, il apparaîtra que la méthode utilisée peut s'appliquer à des situations plus générales, aussi cette rédaction n'a-t-elle d'autre but que de marquer une étape d'un travail en cours, le résultat énoncé ci-après n'en est pas moins, à la connaissance de l'auteur, original.

Notations : si $r \in SO(2)$, $\Theta(r)$ désigne la mesure modulo π dans $]-\pi/2, +\pi/2]$ de l'angle de la rotation r , pour $0 < \Theta < \pi/2$, on pose :

$$L_\Theta = \{ r : r \in SO(2), |\Theta(r)| \geq \Theta \}$$

et l'on définit les probabilités m^Θ par :

$$m^\Theta(A) = \frac{m_s(A \cap L_\Theta)}{m_s(L_\Theta)}.$$

Théorème 1.

Supposons qu'il existe Θ_0 , $0 < \Theta_0 < \pi/2$, tel que toutes les valeurs d'adhérence, s tendant vers 0, des probabilités $(m_s^{\Theta_0})_s$ satisfassent à la condition :

$$m(\{ r : \Theta(r) = \pi/2 \}) = 0,$$

alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \gamma(\mu_s) = \gamma(\delta_a) = \text{Log } \lambda.$$

Notons $Gl(2, \mathbb{R})$ le groupe des matrices 2×2 inversibles, $\mathbb{P}_1$ la droite projective et $g.x$ l'action projective de $g \in Gl(2, \mathbb{R})$ sur $x \in \mathbb{P}_1$; l'opérateur markovien P_S , $P_S f(x) = \int f(g.x) \mu_S(dg)$, f mesurable bornée sur $\mathbb{P}_1$, définit la marche aléatoire de loi μ_S sur $\mathbb{P}_1$; puisque m_S donc μ_S est irréductible, l'on sait, d'après Furstenberg [7], que :

$$\gamma(\mu_S) = \int \text{Log } \rho(g, x) \mu_S(dg) \nu_S(dx)$$

où ν_S est une probabilité P_S -invariante sur $\mathbb{P}_1$ et où $\rho(g, x)$ est la fonction sur $Gl(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{P}_1$ obtenue par factorisation de la fonction $q(g, x) = \|gx\| \cdot \|x\|^{-1}$ définie sur $Gl(2, \mathbb{R}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

Puisque le support de $\mu_S \otimes \nu_S$ reste contenu dans un compact fixe, il suffit pour établir le théorème de montrer que les familles $(\nu_S)_S$ convergent vers δ_u où u désigne l'image dans $\mathbb{P}_1$ du vecteur $(1, 0)$ de $\mathbb{R}^2$, ainsi le théorème 1 est-il conséquence de

Théorème 2.

Sous les hypothèses du théorème 1, si $(\nu_S)_S$ est une famille de probabilités sur $\mathbb{P}_1$ satisfaisant à $\nu_S P_S = \nu_S$, alors

$$\lim_{S \rightarrow 0} \nu_S = \delta_u .$$

Il s'agit donc de fait d'étudier les mesures invariantes de perturbations markoviennes du système dynamique $(\mathbb{P}_1, a)$. Nous avons été inspiré dans cette étude par un article de Göra [2] reprenant dans le cas des systèmes dynamiques des éléments des travaux de Wentzell et Freidlin sur les flots [1].

Un passage à la limite dans l'égalité $v_s p_s = v_s$, montre que les valeurs d'adhérence de $(v_s)_s$ sont a -invariantes et donc de la forme $(1-w)\delta_u + w\delta_v$ où v est l'image projective de $(0,1) \in \mathbb{R}^2$, il faut donc prouver que $w = 0$; à noter que, puisque $\lim_s \gamma(\mu_s) \geq 0$, $w \leq 1/2$.

La preuve consiste à appliquer à des chaînes de Markov à espace d'état fini, associées aux chaînes $(p_s)_s$ et à une partition de $\mathbb{P}_1$, un énoncé concernant le comportement des probabilités invariantes d'une famille de chaînes irréductibles convergeant vers une chaîne réductible.

1. La clé.

Proposition :

Soit $p_s = [p_s(i, j)]_{i=1 \dots r, j=1 \dots r}$, $s > 0$, une famille de probabilités de transition irréductibles sur $\{1 \dots r\}$ et λ_s les probabilités invariantes correspondantes.

On suppose que :

$$(a) \lim_{s \rightarrow 0} p_s(i, j) = \delta_{i-1, j} \quad i = 2 \dots r-1$$

$$(b) \lim_{s \rightarrow 0} p_s(1, j) = \delta_{1, j} \quad j = 1 \dots r$$

$$(c) \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{1 - p_s(1, 1)}{1 - p_s(r, r)} = \rho_1$$

$$(d) \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{p_s(1, r)}{1 - p_s(1, 1)} = \rho_2$$

alors

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \lambda_s(r) \leq \rho_1 \rho_2.$$

Démonstration de la proposition.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (X_n)_{n=0}^{\infty}, (p_i^s)_{i \in \{1 \dots r\}})$ la chaîne de Markov de transition p_s et $\tau = \inf \{n : n \geq 1, X_n \in \{1, r\}\}$, on a :

Lemme :

Si $c(s) = \sup_{i=2 \dots r-1} p_i^s([X_\tau = r])$ alors $\lim_{s \rightarrow 0} c(s) = 0$.

Démonstration du lemme.

On a

$$p_i^s([X_\tau = r]) \leq p_i^s([X_\tau = r, \tau \leq r-2]) + p_i^s([\tau > r-2])$$

et

$$\begin{aligned} p_i^s([\tau > r-2]) &\leq p_i^s(\bigcup_{n=0}^{r-2} [X_n \in \{2 \dots r-2\}, X_{n+1} \geq X_n]) \\ &\leq \sum_{n=0}^{r-2} p_i^s([X_n \in \{2 \dots r-2\}, X_{n+1} \geq X_n]) \\ &\leq (r-1) \sup_{j=2 \dots r-1} [\sum_{k=j}^r p_s(j, k)], \end{aligned}$$

on conclut d'après (a).

Soit $\tilde{p}_s$ la chaîne induite sur $\{1, r\}$ par p_s , on a :

$$\frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} = \frac{\tilde{p}_s(1, r)}{\tilde{p}_s(r, 1)} = \frac{p_s(1, r) + \sum_{i=2}^{r-1} p_s(1, i) p_i^s([X_\tau = r])}{1 - p_s(r, r) - \sum_{i=2}^{r-1} p_s(r, i) p_i^s([X_\tau = r])}$$

d'où

$$\frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} \leq \frac{p_s(1, r) + c(s)(1 - p_s(1, 1) - p_s(1, r))}{1 - p_s(r, r) - c(s)(1 - p_s(r, 1) - p_s(r, r))} \leq \frac{p_s(1, r) + c(s)(1 - p_s(1, 1))}{1 - p_s(r, r) - c(s)(1 - p_s(r, r))}$$

$$\leq \frac{1 - p_s(1, 1)}{1 - p_s(r, r)} \frac{1}{1 - c(s)} \left(\frac{p_s(1, r)}{1 - p_s(1, 1)} + c(s) \right)$$

finalement

$$\limsup_s \frac{\lambda_s(r)}{\lambda_s(1)} \leq \varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \blacksquare$$

2. Chaines de Markov moyennes.

Si $x \in \mathbb{P}_1$ est représenté par le vecteur $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on note :

$$t(x) = \left| \frac{x_2}{x_1} \right| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Soit $t_1 > 0$ et et $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 3$, on pose :

$$t_i = \left(\frac{\lambda^2 + 1}{2} \right)^{i-1} t_1, \quad i = 1 \dots r-1$$

$$\alpha_1 = \text{Arctg } t_1, \quad \alpha_r = \pi/2 - \text{Arctg } t_{r-1},$$

$$\beta_1 = \text{Arctg } t_1 - \text{Arctg } \frac{t_1}{\lambda^2}, \quad \beta_r = \text{Arctg } t_{r-1} - \text{Arctg } \frac{t_{r-1}}{\lambda^2}.$$

et l'on associe au couple (t_1, r) la partition $\mathcal{P}(t_1, r)$ de $\mathbb{P}_1$ définie par :

$$c_1 = \{ x : t(x) \leq t_1 \}$$

$$c_i = \{ x : t_{i-1} < t(x) \leq t_i \}, \quad i = 2 \dots r-1.$$

$$c_r = \{ x : t_{r-1} < t(x) \}.$$

Soit ν_s une probabilité P_s invariante sur $\mathbb{P}_1$, on note P_s la chaîne sur $\{1 \dots r\}$ définie par :

$$p_s(i, j) = \frac{1}{\nu_s(c_i)} \int_{c_i} P_s(x, c_j) \nu_s(dx), \quad \text{si } \nu_s(c_i) > 0$$

$$p_s(i, j) = \delta_{i, i-1}, \quad \text{si } i = 2 \dots r-1 \quad \text{et} \quad \nu_s(c_i) = 0$$

(puisque $w \leq 1/2$, $\nu_s(c_i) > 0$ pour s assez petit) :

l'on vérifie sans peine que la probabilité λ_s définie par :

$$\lambda_s(i) = \nu_s(c_i)$$

est p_s invariante.

3. Application de la proposition aux chaînes moyennes.

Puisque $t(ax) = \frac{1}{\lambda^2} t(x)$, on a

$$a(c_i) = \left\{ x : \frac{1}{\lambda^2} t_{i-1} < t(x) \leq \frac{1}{\lambda^2} t_i < t_{i-1} \right\}, \quad i = 2 \dots r-1,$$

$$a(c_1) = \left\{ x : t(x) \leq \frac{1}{\lambda^2} t_1 \right\}$$

de sorte que, utilisant, lorsque $\nu_s(c_i) > 0$, la double inégalité :

$$\inf_{x \in c_i} P_s(x, c_j) \leq p_s(i, j) \leq \sup_{x \in c_i} P_s(x, c_j)$$

l'on peut affirmer que, d'après la convergence de $(m_s)_s$ vers l'identité, $(p_s)_s$ satisfait aux conditions (a) et (b) de la proposition, tandis que le caractère géométrique particulier des rotations permet les estimations.

- (1) $1 - p_s(1, 1) \leq m_s(\{r : |r(\Theta)| > \beta_1\})$,
 (2) $1 - p_s(1, 1) \geq m_s(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_1\})$,
 (3) $p_s(1, r) \leq m_s(\{r : |r(\Theta)| > \frac{\pi}{2} - \alpha_1 - \alpha_r + \beta_1\})$,
 (4) $1 - p_s(r, r) \geq m_s(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_r + \beta_r\})$,

Choisissons maintenant les nombres t_1 et r qui définissent la partition $\mathcal{S}(t_1, r)$ de telle façon que, Θ_0 étant la donnée de l'énoncé du théorème 1,

$$(5) \quad 2\alpha_1 < \Theta_0, \quad \eta = (\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_r < \pi/2 - \Theta_0, \quad 2\alpha_r + \beta_r \leq \beta_1$$

(il suffit pour cela de choisir $\alpha_1 < \inf\{\Theta_0/2, 1/2(\pi/2 - \Theta_0)\}$, puis r assez grand pour que $\alpha_r < 1/2(\pi/2 - \Theta_0)$ et $2\alpha_r + \beta_r \leq \beta_1$); on déduit alors de (1) et (4) que :

$$\frac{1 - p_s(1, 1)}{1 - p_s(r, r)} \leq \frac{m_s(\{r : |r(\Theta)| > \beta_1\})}{m_s(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_r + \beta_r\})} \leq 1$$

puis de (2) et (3) que :

$$\frac{p_s(1, r)}{1 - p_s(1, 1)} \leq \frac{m_s(\{r : |r(\Theta)| > \pi/2 - \eta\})}{m_s(\{r : |r(\Theta)| > 2\alpha_1\})} = \frac{m_s(L_{\pi/2-\eta})}{m_s(L_{2\alpha_1})}$$

puisque $\pi/2 - \eta > \Theta_0$ et $2\alpha_1 < \Theta_0$

$$\frac{p_s(1, r)}{1 - p_s(1, 1)} \leq \frac{m_s(L_{\pi/2-\eta} \cap L_{\Theta_0})}{m_s(L_{\Theta_0})} \frac{m_s(L_{\Theta_0})}{m_s(L_{2\alpha_1})} \leq m_s^{\Theta_0}(L_{\pi/2-\eta})$$

La proposition permet alors de conclure que :

$$\limsup_s v_s(c_r) = \limsup_s \lambda_s(r) \leq \limsup_s m_s^{\Theta_0}(L_{\pi/2-\eta}) = c(\eta)$$

4. Enfin.

Puisque c_r est ouvert, si $(v_{s_k})_k$ converge vers v , on a :

$$v(\{v\}) \leq v(c_r) \leq \lim_k v_{s_k}(c_r) \leq c(\eta),$$

en faisant tendre t_1 vers 0 et r vers l'infini de façon à respecter les conditions (5), il vient :

$$v(\{v\}) \leq \lim_{\eta} c(\eta),$$

l'hypothèse du théorème implique $\lim_{\eta} c(\eta) = 0$. ■

Références

- 1 M.I. Freidlin - A.D. Wentzell : Random perturbations of dynamical systems. Springer-Verlag.
- 2 P. Gora : Random composing of mappings, small stochastic perturbations and attractors. Zeit. f. Wahrsch. 69, 137-160, 1985.
- 3 H. Hennion : Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes. Zeit. f. Wahrsch. 67, 265-278, 1984.
- 4 Y. Kifer : Perturbations of random matrix products. Zeit. f. Wahrsch. 61, 83-95, 1982.
- 5 E.V. Slud : Stability of exponential rate of growth of products of random matrices under local random perturbations. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) 180-192.
- 6 H. Furstenberg - H. Kesten : Products of random matrices. An. Math. Stat. 31, 457-469, 1960.
- 7 H. Furstenberg : Non commuting random products. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 108, 1963, 377-428.