DANIEL LE BAIL

Analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 89-120
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985___3_89_0>

CHAPITRE IV

ANALYTICITE LOCALE POUR LES SOLUTIONS DE L'EQUATION D'EULER

LE BAIL Daniel

Université de Rennes I

UER Mathématiques & Informatique

Campus de Beaulieu

35 042 - RENNES - FRANCE

1 - INTRODUCTION

L'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler dans $\mathbb{R}^n$ a été traitée par S. Alinhac et G. Métivier dans [2]. Il s'agit ici de reprendre cette étude au voisinage du bord dans le cas d'un problème aux limites.

La variable de $\mathbb{R}^{n+1}$ sera notée $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On considère un ouvert borné Ω, de bord analytique $\partial\Omega$, inclus dans $\mathbb{R}^n$. Le mouvement d'un fluide parfait incompressible et non homogène à l'intérieur de Ω est régi par les équations suivantes :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u = \dfrac{1}{\rho}\,(\text{grad } P + f) & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (u.\nabla)\rho = 0 & \text{dans } (0,T) \times \Omega \\ u.n_{|\partial\Omega} = 0 & \text{dans } (0,T) \times \partial\Omega \\ u_{|t=o} = u_o & \text{dans } \Omega \\ \rho_{|t=o} = \rho_o & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Les inconnues sont $u = (u_1,\dots,u_n)$, ρ et P à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$. u_o, ρ_o et f sont données, ρ_o étant strictement positive sur $\overline{\Omega}$.

n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega$. Rappelons que $\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$ et que $(u.\nabla)v$ désigne $\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial v}{\partial x_j}$. On notera $\sigma = \frac{1}{\rho}$ et $U = (u,\rho)$.

Soit $\mu > n/2$. Sous les conditions $U_o \in (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}$ et $f \in C^o([0,T_o], (H^{\mu+1}(\Omega))^n)$, on sait qu'il existe des solutions (U,P) dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$ avec $T < T_o$ vérifiant :

$$(1.2)\quad \begin{cases} U \in C^o([0,T], (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}) \\ \dfrac{\partial U}{\partial t} \in C^o([0,T], (H^{\mu}(\Omega))^{n+1}) \\ P \in C^o([0,T], H^{\mu+2}(\Omega)) \end{cases}$$

On renvoie en ce qui concerne le cas homogène à T. Kato [10], D.G. Ebin - J. Marsden [7], J.P. Bourguignon - H. Brezis [6] et R. Temam [13] et pour le cas non homogène à J.E. Marsden [16] et A. Valli - H.B. Daveiga [15].

Dans toute la suite, nous supposerons donc <u>donnée</u> une telle solution (U,P) dans $[0,T] \times \overline{\Omega}$. Pour simplifier les calculs, nous supposerons aussi que μ est entier.

La fonction u est alors bornée et à dérivées bornées sur $[0,T] \times \overline{\Omega}$ et les courbes intégrales du système :

$$(1.3)\qquad \frac{dx}{dt}(t) = u(t,x(t))$$

sont bien définies pour $t \in [0,T]$. En effet, le champ u étant tangent au bord, les courbes intégrales de (1.3) issues de points du bord restent dans le bord et celles issues de points de Ω restent dans Ω. Si l'on note $\phi_{t,s}(x)$ la solution de (1.3) avec condition initiale x en t = s, les $\phi_{t,s}$ sont donc des difféomorphismes de $\overline{\Omega}$ sur lui-même.

Le résultat principal de ce travail peut s'énoncer de la façon suivante :

THEOREME 1

Soit $x_o \in \partial\Omega$ et $\gamma_T(x_o)=\{(t,\phi_{t,o}(x_o), t \in [O,T]\}$. Si U_o est analytique jusqu'au bord au voisinage de x_o, si f est analytique jusqu'au bord au voisinage de $\gamma_T(x_o)$ alors U est analytiques jusqu'au bord au voisinage de $\gamma_T(x_o)$.

L'idée de la preuve est la suivante : on reprend la démonstration de S. Alinhac et G. Métivier dans [2] consistant à dériver l'équation en U et à estimer les dérivées de U grâce à une inégalité d'énergie. Pour cela, on doit évaluer les dérivées de P en fonction de celles de U. Dans [2], cela se fait en utilisant une paramétrixe du Laplacien. Ici, la pression qui est solution du système :

$$(1.4)\quad \begin{cases} \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} P) = \operatorname{div}(u.\nabla)u - \operatorname{div}(\sigma f) & \text{dans } (O,T) \times \Omega \\ \operatorname{grad} P \,.\, n = \rho((u.\nabla)u.n) - f.n & \text{dans } (O,T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

est étudiée par la méthode des ouverts emboîtés de C.B. Morrey et L. Nirenberg [12].

2 - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Admettons tout d'abord le

LEMME 2.1

Sous les hypothèses du théorème 1, U est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_o)$.

dont la preuve est reportée à la fin de cet article.

2a - Notations

On se place alors dans une carte locale : il existe un voisinage ω_1 de x_o, un voisinage $\tilde{\omega}_1$ de O dans R^n et un difféomorphisme analytique θ de ω_1 sur $\tilde{\omega}_1$ tels que $\theta_*(\frac{\partial}{\partial n}) = \frac{\partial}{\partial y_n}$ et $\theta(\omega_1 \cap \bar{\Omega}) = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n \geqslant 0\}$. On note $\tilde{\omega}_1^+ = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n > 0\}$ et $\partial\tilde{\omega}_1^+ = \tilde{\omega}_1 \cap \{y_n = o\}$.

Quitte à découper la courbe intégrale $\gamma_T(x_o)$, on peut supposer que sa projection en x est entièrement contenue dans ω_1, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage ω de x_o tel que $\forall\ t \in [0,T]$, $\phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\Omega}) \subset\subset \omega_1 \cap \bar{\Omega}$. Si l'on note $\mathscr{C}(\omega) = \{(t,x) \in [0,T] \times \bar{\Omega}\ /\ x \in \phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\Omega})\}$, on peut donc prendre pour hypothèses que U_o est analytique jusqu'au bord sur $\bar{\omega} \cap \bar{\Omega}$, f est analytique jusqu'au bord sur $\bar{\mathscr{C}}(\omega)$ et grâce au lemme 2.1, que U et P sont C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{\mathscr{C}}(\omega)$.

Introduisons maintenant quelques notations : nous fixons une fonction réelle δ, C^∞ sur $\tilde{\omega}_1$, équivalente à la distance au bord de $\tilde{\omega}$ et pour $t \in [0,T]$, nous notons $\delta_t(y) = \delta(\theta \circ \phi_{o,t} \circ \theta^{-1}(y))$. Pour $\delta > 0$, $\tilde{\omega}_\delta$ désigne l'ensemble $\{y \in \tilde{\omega}\ /\ \delta(y) > \delta\}$ et $\tilde{\omega}^+_{t,\delta} = \theta \circ \phi_{t,o} \circ \theta^{-1}(\tilde{\omega}^+_\delta)$. On normalise aussi la fonction δ de sorte que : $\forall\ t \in [0,T]$, $\forall(x,y) \in \tilde{\omega}^+_t \times \tilde{\omega}^+_t$, $|\delta_t(x) - \delta_t(y)| \leqslant |x-y|$, $\tilde{\omega}^+_t$ désignant $\theta \circ \phi_{t,o} \circ \theta^{-1}(\tilde{\omega}^+)$. Enfin $\theta(\mathscr{C})(\omega)$ désigne $\{(t,\theta(x))\ /\ (t,x) \in \mathscr{C}(\omega)\}$.

L'entier μ étant fixé, $\mu > \frac{n}{2}$, les espaces $H^\mu(\tilde{\omega}^+_{t,\delta})$ sont des algèbres, munies de leurs normes habituelles qu'on notera $\|\ \|_{\mu,t,\delta}$.

On a alors, pour tous u et v dans $H^\mu(\tilde{\omega}^+_{t,\delta})$

(2.2) $$||u.v||_{\mu,t,\delta} \leq C_o ||u||_{\mu,t,\delta} \cdot ||v||_{\mu,t,\delta}$$

Utilisant l'équivalence des normes $||u \circ \theta||_{H^\mu(\omega)}$ et $||u||_{H^\mu(\tilde{\omega})}$ et les changements de variables $\phi_{t,o}$, il est clair que la constante C_o peut être prise indépendante de $t \in [0,T]$. Pour $t = 0$, cette constante ne dépend que de la géométrie de $\tilde{\omega}_\delta$ et on peut donc trouver δ_o assez petit pour que (2.2) ait lieu avec la même constante C_o pour tout $\delta \in]0,\delta_o]$ et pour tout $t \in [0,T]$.

2b - L'inégalité d'énergie

L'inégalité d'énergie utilisée est inchangée par rapport à [2] : si $V \in C^\infty(\mathscr{C}(\omega))$ est solution dans $\mathscr{C}(\omega)$ de

(2.3) $$\frac{\partial v}{\partial t} + (u.\nabla)v = g$$

alors

$$||v(t,.)||_{L^2(\phi_{t,o}(\omega\cap\bar{\Omega}))} \leq ||v(o,.)||_{L^2(\omega\cap\bar{\Omega})} + 2\int_o^t ||g(s,.)||_{L^2(\phi_{s,o}(\omega\cap\bar{\Omega}))} ds$$

Elle se traduit en carte locale en utilisant l'équivalence de $||u \circ \theta||_{H^\mu(\omega)}$ et $||u||_{H^\mu(\tilde{\omega})}$. Soit $\tilde{v}$ définie par $\tilde{v}(y) = v(x)$. Si $\tilde{v} \in C^\infty(\overline{\theta(\mathscr{C})(\omega)})$ est solution dans $\theta(\mathscr{C})$ de (2.3), écrite en carte locale, alors :

$$||\tilde{v}(t,.)||_{L^2(\theta\circ\phi_{t,o}(\omega\cap\bar{\Omega}))} \leq C(||\tilde{v}(o,.)||_{L^2(\theta(\omega\cap\bar{\Omega}))} + \int_o^t ||\tilde{g}(s,.)||_{L^2(\theta\circ\phi_{s,o}(\omega\cap\bar{\Omega}))} ds)$$

On l'applique à $\theta^{-1}(\tilde{\omega}_\delta^+)$ et on démontre ainsi qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\delta \in]0,\delta_o]$, pour tout $t \in [0,T]$, pour tout $\tilde{v} \in C^\infty(\overline{\theta(\mathscr{C})(\omega)})$ solution de (2.3) :

$$\text{(2.4)} \qquad \|\tilde{v}(t,.)\|_{L^2(\tilde{\omega}^+_{t,\delta})} \leqslant C(\|\tilde{v}(o,.)\|_{L^2(\tilde{\omega}^+_\delta)} + \int_o^t \|\tilde{g}(s,.)\|_{L^2(\tilde{\omega}^+_{s,\delta})} ds)$$

Dans la suite, pour simplifier l'écriture, nous noterons de la même façon les ouverts et les fonctions avant et après le difféomorphisme.

2c - Semi-normes

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on note $m_p = c.\dfrac{p!}{(p+1)^2}$ et $m_\alpha = m_{|\alpha|}$, la constante c étant choisie pour que l'on ait, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\text{(2.5)} \quad \begin{cases} \sum\limits_{o\leqslant\beta\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\beta} m_{\alpha-\beta}\, m_\beta \leqslant m_\alpha & \text{et} \\ \sum\limits_{o<\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} m_{|\beta|-1}\, m_{|\alpha|-|\beta|-1} \leqslant m_{|\alpha|-1} & \end{cases}$$

ε_1, ε_2 et λ étant des paramètres positifs, nous noterons pour M, N et q entiers $\geqslant 0$:

$$\text{(2.6)} \quad \begin{cases} |w|_{M,q,t,\delta} = \sup\limits_{\substack{|\gamma|=M \\ \gamma_n=q}} \|\partial^\gamma w\|_{\mu,t,\delta} \\ \tilde{T}_{M,q,t}(w) = \sup\limits_{o<\delta\leqslant\delta_o} \delta^{(M-1)_+} |w|_{M,q,t,\delta} \\ \tilde{T}_{M,t}(w) = \sup\limits_{o\leqslant q\leqslant M} \varepsilon_2^{(q-1)_+} \tilde{T}_{M,q,t}(w) \\ T_N(w) = \sup\limits_{t\in[0,T]} \sup\limits_{o\leqslant M\leqslant N} \dfrac{(\varepsilon_1 e^{-\lambda t})^{(M-1)_+}}{m_{(M-1)_+}} \tilde{T}_{M,t}(w) \\ \text{La notation } m_+ \text{ désigne } \sup(m,o). \end{cases}$$

2d - Dérivation des équations

On note $a_{jk} = \dfrac{\partial\theta_k}{\partial x_j}$, $A = (a_{jk})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$

$\mathcal{F} = (f,o)$ et $B.\ \mathrm{grad}\ P = (A.\ \mathrm{grad}\ P, 0)$.

En carte locale, les équations (1.1) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j,k} a_{jk}\, u_j \frac{\partial U}{\partial_{y_k}} = \sigma(\mathcal{F} + B.\ \mathrm{grad}\ P) \qquad \text{dans} \quad (0,T) \times \omega^+ \tag{2.7}$$

Le résultat est énoncé dans le lemme suivant qui sera démontré au paragraphe 4.

LEMME 2.8

Il existe des constantes C, C_1 et $\varepsilon_1^* > 0$, il existe un polynôme F de degré $\leqslant 2$, à coefficients positifs, tels que pour $M \geqslant 2$, $q \geqslant 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta| \leqslant \mu$, la fonction $V = \partial_y^{\alpha+\beta} U$ vérifie dans $\theta(\mathcal{C})(\omega)$ une équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j,k} a_{jk}\, u_j \frac{\partial V}{\partial_{y_k}} = G \tag{2.9}$$

où G satisfait, pour tout $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ vérifiant $\varepsilon_1\, T_{M-1}(U) \leqslant C_1$, et pour tous $\varepsilon_2 > 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\delta \in\,]0,\delta_o]$, $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} ||G||_{L^2(\omega^+_{t,\delta})} \leqslant C(M \sup(&|U|_{M,\inf(q+1,M),t,\delta}, |U|_{M,q,t,\delta}, |U|_{M,\sup(o,q-1),t,\delta}) \\ &+ |\mathrm{grad}\ P|_{M,q,t,\delta} \\ &+ (\varepsilon_1 \delta\, e^{-\lambda t})^{1-M}\, \varepsilon_2^{-q}\, m_M\, F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\mathrm{grad}\ P))) \end{aligned}$$

2e - Estimation de la pression

En utilisant la méthode des ouverts emboîtés de C.B. Morrey et L. Nirenberg [12], on obtient le

LEMME 2.10

Il existe des constantes C, ε_1^* et $\varepsilon_2 > 0$, un polynôme F à coefficients positifs tels que pour $M \geqslant 1$, pour tous $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_1^*]$, $\lambda \geqslant 0$ et pour tout $t \in [0,T]$:

$$\tilde{T}_{M+1,t}(\text{grad } P) \leqslant C(\tilde{T}_{M+1,t}(U) + (\varepsilon_1 e^{-\lambda t})^{-M} m_M F(T_M(U),\varepsilon_1 T_M(\text{grad } P)))$$

2f - Estimation des dérivées de U

LEMME 2.11

Il existe des constantes C_1, H_1, λ_1, ε_2 et $\varepsilon_1^* > 0$, il existe des polynômes F_1 et F_2 tels que pour tout $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_1^*]$, pour tout λ vérifiant $\lambda \geqslant \lambda_1$ et pour tout $N \geqslant 2$, la condition $\varepsilon_1 \, T_{N-1}(U) \leqslant C_1$ implique :

$$T_N(U) \leqslant \sup(T_1(U),\ H_1 + \frac{F_1(T_{N-1}(U),T_{N-1}(\text{grad } P))}{\lambda}) \qquad \text{et}$$

$$T_N(\text{grad } P) \leqslant \sup(T_1(\text{grad } P)\ ,\ F_2(T_N(U),\varepsilon_1 \, T_{N-1}(\text{grad } P)))$$

PREUVE

La deuxième inégalité est une conséquence immédiate du lemme 2.10.

Pour démontrer la première, on applique le lemme 2.8 et l'inégalité d'énergie (2.4) à $\partial^{\alpha+\beta}U$, $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, $|\beta| \leqslant \mu$, $M \geqslant 1$. D'après l'analyticité de U_o, on sait qu'il existe ε et $H_1 > 0$ tels que $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$||\partial^\alpha U_o||_{\mu,\delta} \leqslant H_1(\varepsilon_o\delta)^{-(|\alpha|-1)_+} \, m_{(|\alpha|-1)_+}$$

En utilisant le lemme 2.8, en multipliant (2.4) par δ^{M-1} et en prenant le sup en δ, on obtient, si $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ et si $\varepsilon_1 \, T_{M-1}(U) \leqslant C_1$

$$\tilde{T}_{M,q,t}(U) \leqslant C(H_1\varepsilon_o^{1-M}\, m_{M-1} + \int_o^t \{M\, \tilde{T}_{M,\inf(q+1,M),s}(U) + \tilde{T}_{M,q,s}(U)$$

$$+ \tilde{T}_{M,q,s}(\text{grad } P) + (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M}\varepsilon_2^{-q} m_M F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))\}ds)$$

En multipliant par $\varepsilon_2^{(q-1)_+}$ et prenant le sup sur q, il vient que :

$$\tilde{T}_{M,t}(U) \leqslant C(H_1\varepsilon_o^{1-M}\, m_{M-1} + \int_o^t \{M\, \varepsilon_2^{-1}\, \tilde{T}_{M,s}(U) + \tilde{T}_{M,s}(\text{grad } P)$$

$$+ (\varepsilon_1\, e^{-\lambda s})^{1-M}\, \varepsilon_2^{-1}\, m_M\, F(T_{M-1}(U),\, T_{M-1}(\text{grad } P))\}ds)$$

Si $M \geqslant 2$ on utilise le lemme 2.10, ce qui donne, avec une nouvelle fonction polynôme F et ε_2 convenable :

$$\tilde{T}_{M,t}(U) \leqslant C(H_1\varepsilon_o^{1-M} m_{M-1} + M\, \varepsilon_2^{-1}\int_o^t \{\tilde{T}_{M,s}(U) + (\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M} m_{M-1} F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\nabla P))\}ds)$$

Nous appliquons maintenant le

LEMME 2.12 (de Gronwall)

Soient $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, tels que $\forall\, t \in [0,T]$

$f(t) \leqslant A \int_o^t f(s)ds + \int_o^t g(s)ds + B$ alors $\forall\, t \in [0,T]$

$f(t) \leqslant B\, e^{At} + \int_o^t e^{A(t-s)}\, g(s)ds$

On obtient, si $M \geqslant 2$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$:

$$\tilde{T}_{M,t}(U) \leqslant C(H_1\, \varepsilon_o^{1-M}\, m_{M-1}\, e^{CM\varepsilon_2^{-1}t}$$

$$+ \int_o^t e^{CM\varepsilon_2^{-1}(t-s)}\, M\varepsilon_2^{-1}(\varepsilon_1 e^{-\lambda s})^{1-M}\, m_{M-1}\, F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))ds)$$

Multiplions par $\dfrac{\varepsilon_1^{M-1}(e^{-\lambda t})^{M-1}}{m_{M-1}}$ et choisissons $\varepsilon_1 < \inf(\varepsilon_o, \varepsilon_1^*)$:

$$\frac{(\varepsilon_1 e^{-\lambda t})^{M-1}}{m_{M-1}} \tilde{T}_{M,t}(U)$$

$$\leqslant C(H_1\, e^{(CM\varepsilon_2^{-1}-\lambda(M-1))t} + \frac{M\,\varepsilon_2^{-1}}{\lambda(M-1)-CM\varepsilon_2^{-1}}(1-e^{(CM\varepsilon_2^{-1}-\lambda(M-1))t})F(T_{M-1}(U)T_{M-1}(\nabla P)))$$

Soit $\lambda_1 = 6C$. Alors $\lambda\,\varepsilon_2 > \lambda_1$ implique, pour tout $M \geqslant 2$:

$$C\,M\,\varepsilon_2^{-1} - \lambda(M-1) < 0$$

et $$\frac{M\,\varepsilon_2^{-1}}{\lambda(M-1) - C\,M\,\varepsilon_2^{-1}} \leqslant \frac{3}{\lambda\,\varepsilon_2}.$$

Finalement, si $N \geqslant 2$, en modifiant H_1 et F :

$$T_N(U) \leqslant \sup(T_1(U),\, H_1 + \frac{F(T_{M-1}(U), T_{M-1}(\text{grad } P))}{\lambda})$$

2g - DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Les notations étant celles du lemme 3.11, posons $H = \max(T_1(U), 2\,H_1)$ et $K = \max(T_1(\nabla P),\ 2\,F_2(H,o))$, choisissons $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ tel que $F_2(H,\varepsilon_1 K) \leqslant 2\,F_2(H,o)$ et $\varepsilon_1\,H \leqslant C_1$ et λ vérifiant $\lambda \geqslant \max(\lambda_1, \frac{F_1(H,K)}{H_1})$. Alors les inégalités $T_{N-1}(U) \leqslant H$ et $T_{N-1}(\nabla P) \leqslant K$ impliquent, pour $N \geqslant 2$, $T_N(U) \leqslant H$ et $T_N(\nabla P) \leqslant K$. Elles sont donc vraies pour tout $N \geqslant 2$. On en déduit l'analyticité partielle en x de U et P sur $\mathscr{C}(\omega)$. L'analyticité en toutes les variables se récupère en revenant à l'équation (1.1) (cf. le lemme 3.6.1 de [1]).

3 - ETUDE DE L'EQUATION ELLIPTIQUE

3a - Notations

Nous avons vu que la pression était solution du système (1.4) qui s'écrit encore :

$$\begin{cases} \Delta p = \rho \; \{\mathrm{div}(u.\nabla)u - \nabla(\sigma)\; \nabla(P) - \mathrm{div}(\sigma f)\} \\ \dfrac{\partial P}{\partial n} = \rho((u.\nabla)u.n) - f.n \end{cases}$$

Traduisons le en carte locale : il existe un opérateur elliptique Q de la forme $\partial^2_{y_n} + \sum\limits_{\substack{o<|\beta|\leq 2 \\ \beta\neq(o,2)}} a_\beta\, \partial^\beta$, avec les a_β analytiques ne dépendant que de Ω, il existe des coefficients a_{jk} et d'après la condition $u.n_{|\partial\Omega} = 0$, des coefficients ϕ_{jk} ne dépendant que de Ω (voir [13]) et analytiques, tels que :

$$(3.1) \quad \begin{cases} Q\; P = g & \text{dans } (0,T) \times \omega_1^+ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y_n} = h & \text{dans } (0,T) \times \partial\omega_1^+ \end{cases}$$

$$\text{avec } g = \rho\{\sum_{j,k,r,\ell} a_{rj}\, a_{\ell k} \frac{\partial u_k}{\partial y_r} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial y_\ell} - \sum_{j,r,\ell} a_{rj} \cdot a_{\ell j} \cdot \frac{\partial P}{\partial y_\ell} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y_r}$$
$$- \sum_{j,r} \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} a_{rj}\, f_j\} - \sum_{j,\ell} a_{\ell j} \frac{\partial f_j}{\partial y_\ell}$$

$$\text{et } h = -\rho \sum_{j,k} u_j\, u_k\, \phi_{jk} - f.n$$

Nous allons donc reprendre la méthode de C.B. Morrey et L. Nirenberg en contrôlant les puissances de ε_1 et ε_2 ainsi que les factorielles et en tenant compte des décalages et de l'utilisation des espaces H^μ au lieu de L^2.

Dans tout ce qui suit, on omet de noter le temps, étant entendu que les constantes utilisées dans les majorations n'en dépendent pas (en particulier grâce à 1.2).

Introduisons de nouvelles semi-normes compatibles avec (2.6). On pose, pour M,N,q entiers :

$$(3.2)\quad \begin{cases} \tilde{S}_{M,q}(w) = \sup\limits_{0<\delta\leqslant\delta_0} \delta^M |w|_{M,q,\delta} \\ \tilde{S}_M(w) = \sup\limits_{0\leqslant q\leqslant M} \varepsilon_2^q \tilde{S}_{M,q}(w) \\ S_N(w) = \sup\limits_{0\leqslant M\leqslant N} \dfrac{\varepsilon_1^M}{m_M} \tilde{S}_M(w) \end{cases}$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant :

LEMME 3.3

Il existe C, ε_1^*, $\varepsilon_2 > 0$ tels que pour $M \geqslant 1$, pour $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$, et pour P solution de (3.1) on a :

$$\tilde{T}_{M+1}(\nabla P) \leqslant C(\tilde{S}_M(g) + (M+1)\tilde{T}_M(h) + \sup(\tilde{T}_M(h),\tilde{T}_{M+1}(h)) + \varepsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P))$$

3b - Estimation des commutateurs

LEMME 3.4

si a est analytique sur $\overline{\omega^+}$, il existe C et $\varepsilon_1^* > 0$ tels que pour tous $M \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $0 < |\gamma| \leqslant 2$ et $\gamma \neq (0,2)$, et pour tous $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_1^*]$, $\varepsilon_2 > 0$, on a :

$$||\partial^\alpha(a.\partial^\gamma P) - a\partial^{\alpha+\gamma}P||_{H^\mu(\omega_\delta^+)} \leqslant C(\delta\varepsilon_1)^{1-M}\varepsilon_2^{-(q-1)_+} m_M T_M(\nabla P)$$

En effet, ce commutateur vaut :

$$\sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} a \,.\, \partial^{\beta+\gamma} P$$

Puisque a est analytique sur $\overline{\omega^+}$, il existe $H > 0$, $\varepsilon_1^* > 0$ tels que

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \|\partial^\alpha a\|_{H^\mu(\omega_\delta^+)} \leqslant H(\varepsilon_1^*\delta)^{-(|\alpha|-1)_+}\, m_{(|\alpha|-1)_+}$$

La norme H^μ du commutateur se majore par :

$$C \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \|\partial^{\alpha-\beta}a\|_{\mu,\delta}\ \|\partial^{\beta+\gamma}P\|_{\mu,\delta}$$

En utilisant le fait que pour $|\beta+\gamma| \geqslant 1$ on a

$$\|\partial^{\beta+\gamma}P\|_{\mu,\delta} \leqslant \|\partial^{\beta+\gamma-\delta}\nabla P\|_{\mu,\delta} \qquad \text{avec } \delta \leqslant \beta+\gamma \ \text{ et } \ |\delta| = 1$$

On voit qu'on obtient un majorant :

$$C \sum_{\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} (\varepsilon_1^*\delta)^{1-|\alpha|+|\beta|}\, m_{(|\alpha|-|\beta|-1)_+}\ H \cdot (\varepsilon_1\delta)^{-(|\beta|+|\gamma|-|\delta|-1)_+}$$

$$m_{(|\beta|+|\gamma|-2)_+}\ \varepsilon_2^{-(\beta_n+\gamma_n-\delta_n-1)_+}\ T_M(\nabla P)$$

Si $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$, les termes en ε_1 se majorent par ε_1^{1-M}. Les termes en ε_2 se majorent par $\varepsilon_2^{-(q-1)_+}$. Compte tenu de (2.5) et des notations (2.6) on obtient le résultat.

3c - Estimation des dérivées tangentielles

On part de l'inégalité classique pour l'opérateur elliptique Q d'ordre 2 : il existe C > 0 telle que pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^n$, $|\gamma| \leqslant 2$ et pour toute fonction P, C^∞ à support compact dans ω^+ solution de (3.1), on a :

$$\|\partial^\gamma P\|_{L^2(\omega^+)} \leqslant C(\|QP\|_{L^2(\omega^+)} + \|h\|_{H^1(\omega^+)} + \|P\|_{H^1(\omega^+)})$$

Grâce à la normalisation de δ_t (voir paragraphe 2.a), on peut construire pour r et r_1 positifs, une fonction φ, C_o^∞, identique à 1 sur $\omega_{r+r_1,t}$, à support dans $\omega_{r_1,t}$ et vérifiant :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \exists\; C(\alpha) : \sup |D^\alpha \varphi(x)| \leqslant C(\alpha) r^{-|\alpha|}$$

on démontre alors qu'il existe $C > 0$ telle que pour r et $r_1 > 0$, pour $|\gamma| \leqslant 2$, on a :

$$\|\partial^\gamma P\|_{L^2(\omega^+_{r+r_1})} \leqslant C(\|QP\|_{L^2(\omega^+_{r_1})} + \frac{1}{r}\|P\|_{H^1(\omega^+_{r_1})}$$
$$+ \frac{1}{r^2}\|P\|_{L^2(\omega^+_{r_1})} + \|h\|_{H^1(\omega^+_{r_1})} + \frac{1}{r}\|h\|_{L^2(\omega^+_{r_1})})$$

En dérivant tangentiellement, si $|\alpha'| = M$, $|\beta'| \leqslant \mu$, on obtient

$$\|\partial^\gamma \partial^{\alpha'+\beta'} P\|_{L^2(\omega^+_{r+r_1})} \leqslant C(\|\partial^{\alpha'+\beta'} QP\|_{L^2(\omega^+_{r_1})}$$
$$+ \|[Q,\partial^{\alpha'+\beta'}]P\|_{L^2(\omega^+_{r_1})} + \frac{1}{r}\|\partial^{\alpha'+\beta'}P\|_{H^1(\omega^+_{r_1})}$$
$$+ \frac{1}{r^2}\|\partial^{\alpha'+\beta'}P\|_{L^2(\omega^+_{r_1})} + \|\partial^{\alpha'+\beta'}h\|_{H^1(\omega^+_{r_1})} + \frac{1}{r}\|\partial^{\alpha'+\beta'}h\|_{L^2(\omega^+_{r_1})})$$

(On convient ici de noter $\partial^{\alpha'} = \partial^{(\alpha',o)}$ pour $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$).

Le commutateur s'écrit $\sum\limits_{\substack{o<|\delta_1|\leqslant 2 \\ \delta_1 \neq (o,2)}} \{a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} \partial^{\alpha'+\beta'} P - \partial^{\alpha'+\beta'}(a_{\delta_1} \partial^{\delta_1} P)\}$

et chacun de ces termes $\partial^{\alpha'+\beta'}(a_{\delta_1}\partial^{\delta_1}P) - \partial^{\beta'}(a_{\delta_1}\partial^{\alpha'+\delta_1}P) + \partial^{\beta'}(a_{\delta_1}\partial^{\alpha'+\delta_1}P) - a_{\delta_1}\partial^{\delta_1+\alpha'+\beta'}P$. La première différence se majore en norme $L^2(\omega^+_{r_1})$ par $\|\partial^{\alpha'}(a_{\delta_1}\partial^{\delta_1}P) - a_{\delta_1}\partial^{\alpha'+\delta_1}P\|_{\mu,r_1}$. Compte tenu de l'analyticité des a_{δ_1}, elle se majore en utilisant le lemme 3.4 par $C(\varepsilon_1 r_1)^{1-M}\, m_M\, T_M(\nabla P)$ en choisissant $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$. La seconde différence se majore par $C\|a_{\delta_1}\|_{\mu+1,r_1}$ $\|\partial^{\alpha'+\delta_1}P\|_{\mu-1,r_1}$ soit, en modifiant C, par $C \sup(|P|_{M,o,r_1}, |P|_{M+1,o,r_1})$.

Ainsi :

$$||\partial^\gamma \partial^{\alpha'+\beta'} P||_{L^2(\omega^+_{r+r_1})} \leqslant C(|g|_{M,o,r_1} + \sup(|h|_{M,o,r_1}, |h|_{M+1,o,r_1}, |h|_{M+1,1,r_1})$$

$$+ \frac{1}{r^2} |P|_{M,o,r_1} + \frac{1}{r} \sup(|P|_{M,o,r_1} , |P|_{M+1,o,r_1} , |P|_{M+1,1,r_1})$$

$$+ \frac{1}{r} |h|_{M,o,r_1} + m_M(\varepsilon_1\ r_1)^{1-M}\ T_M(\nabla P))$$

En choisissant $\delta = r + r_1$, $r = \frac{\delta}{M+1}$, en multipliant par δ^M et compte tenu des notations (3.2), on obtient le

LEMME 3.5

Il existe $C > 0$, $\varepsilon_1^* > 0$ tels que pour tout $M \geqslant 1$, pour tout $\alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\alpha'| = M$, pour tout $\beta' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $|\beta'| \leqslant \mu$, pour tout γ, $|\gamma| \leqslant 2$, on a, pour tout $\delta \in]0,\delta_o]$, pour tout $\varepsilon_1 \in]0,\varepsilon_1^*]$:

$$\delta^M ||\partial^{\gamma+\alpha'+\beta'} P||_{L^2(\omega^+_\delta)} \leqslant C(\tilde{S}_{M,o}(g) + (M+1)\ \tilde{T}_{M,o}(h) + m_M\ \varepsilon_1^{1-M}\ T_M(\nabla P)$$

$$+ \sup(\tilde{T}_{M,o}(h),\ \tilde{T}_{M+1,o}(h),\ \tilde{T}_{M+1,1}(h)).$$

3d - Estimation des dérivées normales

On revient à l'équation ; si $|\alpha| = M, M \geqslant 1$, $\alpha_n = q$, $|\beta| \leqslant \mu$

$$\partial^2_{y_n} \partial^{\alpha+\beta}_y P = \partial^{\alpha+\beta}_y g - \sum_{\substack{o<|\delta_1|\leqslant 2 \\ \delta_1 \neq (o,2)}} a_{\delta_1} \partial^{\delta_1+\alpha+\beta} P - \sum_{\substack{o<|\delta_1|\leqslant 2 \\ \delta_1 \neq (o,2)}} [\partial^{\alpha+\beta}, a_{\delta_1}] \partial^{\delta_1} P$$

Le commutateur s'étudie comme précédemment en utilisant le lemme 3.4 et le fait que

$$||\partial^{\alpha+\delta_1} P||_{\mu-1,\delta} \leqslant \sup(|\nabla P|_{M,q,\delta}, |\nabla P|_{M-1,(q-1)_+,\delta})$$

On obtient le

LEMME 3.6

Il existe $C, \varepsilon_1^* > 0$ tels que pour $M \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, pour tout α, $|\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$, pour tout β, $|\beta| \leqslant \mu$, on a, pour tous $\delta \in]0,\delta_0]$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ et $\varepsilon_2 > 0$

$$||\partial_{y_n}^2 \partial^{\alpha+\beta} P||_{L^2(\omega_\delta^+)} \leqslant C(|g|_{M,q,\delta} + \sup_{\substack{|\delta_1|\leqslant 2, \delta_1 \neq (0,2) \\ |\beta|\leqslant\mu \\ |\alpha|=M, \alpha_n=q}} ||\partial^{\delta_1+\alpha+\beta} P||_{L^2(\omega_\delta^+)}$$

$$+ (\varepsilon_1\delta)^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-(q-1)_+} T_M(\nabla P))$$

3e - Démonstration du lemme 3.3

Considérons, pour $M \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, la semi-norme $|\nabla P|_{M+1,q,\delta}$. Elle se majore par $\sup(|P|_{M+2,q,\delta}, |P|_{M+2,q+1,\delta})$. En utilisant les lemmes 3.5, 3.6 et le fait que pour $|\eta| \leqslant 2$, $\eta \neq (0,2)$, pour $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, pour $|\beta| \leqslant \mu$ on a

$$||\partial^{\eta+\alpha+\beta} P||_{L^2(\omega_\delta^+)} \leqslant \sup(|\nabla P|_{M-1,(q-1)_+,\delta}, |\nabla P|_{M,(q-1)_+,\delta},$$

$$|\nabla P|_{M,(q-1)_++1,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-1)_+,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-1)_++1,\delta})$$

on trouve que, pour $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$:

$$|\nabla P|_{M+1,q,\delta} \leqslant \sup\{C\delta^{-M}(\tilde{S}_{M,0}(g) + \sup(\tilde{T}_{M,0}(h), \tilde{T}_{M+1,0}(h), \tilde{T}_{M+1,1}(h))$$

$$+ (M+1)\tilde{T}_{M,0}(h) + m_M \varepsilon_1^{1-M} T_M(\nabla P)),$$

$$\sup(|g|_{M,(q-1)_+,\delta}, |g|_{M,(q-2)_+,\delta}) + (\varepsilon_1\delta)^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-(q-2)_+} T_M(\nabla P)$$

$$+ \sup(|\nabla P|_{M+1,(q-3)_+,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-3)_++1,\delta}, |\nabla P|_{M+1,(q-2)_+,\delta},$$

$$|\nabla P|_{M+1,(q-2)_++1,\delta})\}.$$

En multipliant par δ^M et prenant le sup en δ :

$$\tilde{T}_{M+1,q}(\nabla P) \leqslant C(\varepsilon_2^{-(q-1)_+}\tilde{S}_M(g) + \sup(\tilde{T}_M(h),\tilde{T}_{M+1}(h)) + (M+1)\tilde{T}_M(h)$$

$$+ \varepsilon_1^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-(q-2)_+} T_M(\nabla P)$$

$$+ \sup(\tilde{T}_{M+1,(q-2)_+}(\nabla P),\tilde{T}_{M+1,(q-2)_++1}(\nabla P),\tilde{T}_{M+1,(q-3)_+}(\nabla P),$$

$$\tilde{T}_{(M+1),(q-3)_++1}(\nabla P))).$$

Pour estimer $|\nabla P|_{M+1,o}$ et $|\nabla P|_{M+1,1}$, nous avons besoin de $|P|_{M+2,o}$, $|P|_{M+2,1}$ et $|P|_{M+2,2}$.

On utilise le lemme 3.6 en effectuant une récurrence descendante sur le multi-indice β, ainsi que 3.5, ce qui donne :

$$\sup(\tilde{T}_{M+1,o}(\nabla P),\ \tilde{T}_{M+1,1}(\nabla P))$$

$$\leqslant C(\tilde{S}_{M,o}(g) + \sup(\tilde{T}_M(h),\tilde{T}_{M+1}(h)) + (M+1)\tilde{T}_M(h) + \varepsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P))$$

En regroupant toutes ces inégalités, on démontre que :

$$\tilde{T}_{M+1,q}(\nabla P) \leqslant \alpha_o H_{M,q} + \alpha_1 H_{M,q-1} + \dots + \alpha_k H_{M,q-k} + \dots + \alpha_{q-2} H_{M,2}$$

$$+ \alpha_{q-1} H_{M,1}$$

où
$$H_{M,k} = \varepsilon_2^{-(k-1)_+}\tilde{S}_M(g) + \sup(\tilde{T}_M(h),\tilde{T}_{M+1}(h)) + \varepsilon_1^{1-M} m_M \varepsilon_2^{-(k-2)_+} T_M(\nabla P)$$

$$+ (M+1)\tilde{T}_M(h)$$

et où α_k est une suite de terme général majoré par R^{k+1}, R étant une constante assez grande par rapport à C. En multipliant $\varepsilon_2^{(q-1)_+}$ et en choisissant $\varepsilon_2 = \frac{1}{2R}$, on obtient le lemme 3.3.

4 - NORMES FORMELLES

L'objet de ce paragraphe est d'estimer les dérivées de g et de h (voir 3.1) en fonction de celles de U et d'en déduire les lemmes 2.10 et 2.8. S'agissant de dérivées de fonctions composées , nous utilisons la méthode des séries majorantes (Lax [11], Friedman [8], Wagschal [14]).

Dans le lemme qui suit, nous oublions de noter t et δ qui apparaissent comme paramètres. En particulier ω désigne ω_δ^+. Introduisons les notations suivantes :

$$S_{M,q} = \varepsilon_1^{-(M-1)_+} \varepsilon_2^{-(q-1)_+} m_{(M-1)_+} \quad \text{et} \quad S_\alpha = S_{|\alpha|,\alpha_n}$$

Pour $w \in C^\infty(\bar{\omega})$: $\displaystyle |w|_{M,q} = \sup_{\substack{|\alpha|=M \\ \alpha_n=q}} ||\partial^\alpha w||_{H^\mu(\omega)}$

$$[w]_N = \sup_{\substack{o\leqslant M\leqslant N \\ o\leqslant q\leqslant N}} \frac{|w|_{M,q}}{S_{M,q}}$$

LEMME 4.1

Soit $w \in C^\infty(\bar{\omega})$ une fonction réelle, ϕ une fonction analytique au voisinage du compact $w(\bar{\omega})$. Il existe C et L > 0 (ne dépendant que de ϕ et de $||w||_{\mu+1}$) tels que pour tous p, N, entiers positifs, tous $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, la condition $\varepsilon_1[w]_N \leqslant C$ implique :

i) $[\phi(w)]_N \leqslant L[w]_N$

ii) $|\phi(w)|_{N+1,p} \leqslant L(|w|_{N+1,p} + S_{N+1,p}[w]_N)$ $(o\leqslant p\leqslant N+1)$

iii) Pour $|\alpha| = N+1$, $\alpha_n = p$, pour $j = 1,\dots,n$:

$$||\partial^\alpha(\phi(w)\partial_{y_j} w)-\phi(w)\partial^\alpha\partial_{y_j} w||_\mu \leqslant L(N+1)\{S_{N+1,\inf(p+1,N+1)}(1+[w]_N)^2$$
$$+ \sup(|w|_{N+1,\inf(p+1,N+1)}, |w|_{N+1,p}, |w|_{N+1,\sup(o,p-1)})\}$$

Comme nous l'avons déjà dit, la démonstration utilise la méthode des séries majorantes. Nous pouvons adapter la preuve du lemme 3.3.1 de [1] moyennant le résultat suivant :

$$\text{si } \theta(x) = \sum_{\alpha>o} \frac{S_\alpha}{\alpha!} x^\alpha \quad \text{alors } \theta(x) \,.\, \theta(x) << \varepsilon_1 \, \theta(x)$$

Ce dernier résulte de (2.5) et de l'inégalité :

$$(\beta_n-1)_+ + (\alpha_n-\beta_n-1)_+ \leqslant (\alpha_n-1)_+$$

les i) et ii) en découlent immédiatement. Pour iii), on utilise le fait que si $|\alpha| = M+1$, $\alpha_n = q$, si $|\gamma| = 1$:

$$\sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha \\ 2\leqslant|\beta|\leqslant M}} \binom{\alpha}{\beta} S_{|\beta|,\beta_n} S_{|\alpha|-|\beta|+|\gamma|,\alpha_n-\beta_n+\gamma_n} \leqslant (M+1)\, S_{M+1,\inf(q+1,M+1)}$$

Ce lemme s'étend au cas où w est à valeurs dans $\mathbb{R}^\nu$ et aux fonctions $\phi(x,w)$, en prenant $|w|_{M,q} = \sup\limits_{\substack{|\alpha|=M \\ \alpha_n=q}} \sup\limits_{j=1,\dots,\nu} ||\partial^\alpha w_j||_{H^\mu(\omega)}$.

LEMME 4.2

Soit $w = (w_1,\dots,w_\nu)$ une fonction C^∞ sur $\bar{\omega}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\nu$. Soit $\phi(x,w)$ une fonction analytique au voisinage de $\bar{\omega} \times w(\bar{\omega})$, il existe ε_1^*, C et L > 0 tels que pour N, p $\geqslant$ 0 et $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$ la condition $\varepsilon_1[w]_N \leqslant C$ implique :

i) $[\phi(.,w(.))]_N \leqslant L(1+[w]_N)$

ii) $|\phi(.,w(.))|_{N+1,p} \leqslant L\{|w|_{N+1,p} + S_{N+1,p}(1+[w]_N)\}$

iii) pour $|\alpha| = N+1$, $\alpha_n = p$, $j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,\nu$

$$||\partial^\alpha(\phi(x,w)\partial_{y_j}w_k)-\phi(x,w)\partial_y^\alpha\partial_{y_j}w_k||_\mu \leqslant (N+1)L\{S_{N+1,\inf(p+1,N+1)}(1+[w]_N)^2$$
$$+ \sup(|w|_{N+1,\inf(p+1,N+1)},|w|_{N+1,p},|w|_{N+1,\sup(o,p-1)})\}$$

Donnons un dernier lemme qui nous permettra d'aboutir aux estimations de g et h.

LEMME 4.3

Soient v et w $\in C^\infty(\bar{\omega})$ des fonctions réelles, ϕ une fonction analytique au voisinage du compact $v(\bar{\omega})$. Il existe C et L > 0 (ne dépendant que de ϕ et de $||v||_{\mu+1}$) tels que pour $M \geq 1$, $q \geq 0$, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ la condition $\varepsilon_1[v]_M \leq C$ implique, pour $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$:

$$\text{i)}\quad ||\partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w)||_\mu \leq L([v]_1^2|\nabla w|_{M,q} + [v]_o[w]_1|\nabla v|_{M,q} + \varepsilon_1^{-M}\varepsilon_2^{-q} m_M[v]_{M-1}[v]_M[w]_M)$$

$$\text{ii)}\quad ||\partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w)||_\mu \leq L([v]_1^2|\nabla w|_{M,q} + [v]_o[\nabla w]_o|\nabla v|_{M,q} + \varepsilon_1^{1-M}\varepsilon_2^{-q} m_M[v]_{M-1}[v]_M[\nabla w]_{M-1})$$

Démontrons le i). On a :

$$\partial^\alpha(\phi(v)\partial v\partial w) = \phi(v)\partial v\partial^\alpha\partial w + \partial w\phi(v)\partial^\alpha\partial v + \partial w\sum_{o<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma\phi(v)\partial^{\alpha-\gamma}\partial v$$
$$+ \sum_{o<\beta<\alpha}\binom{\alpha}{\beta}[\sum_{o\leq\gamma\leq\beta}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\gamma\phi(v)\partial^{\beta-\gamma}\partial v]\partial^{\alpha-\beta}\partial w$$

Le terme $\phi(v)\partial v\partial^\alpha\partial w$ se majore par $L[v]_1^2|\nabla w|_{M,q}$ compte tenu du lemme 4.1.

Etudions le troisième terme et plus précisément $\sum_{o<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}\partial^\gamma\phi(v)\partial^{\alpha-\gamma}\partial v$. Il se majore en norme H^μ par $C\sum_{o<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}|\phi(v)|_{|\gamma|,\gamma_n}|\nabla v|_{|\alpha|-|\gamma|,\alpha_n-\gamma_n}$ soit par

$$C\sum_{o<\gamma\leq\alpha}\binom{\alpha}{\gamma} S_{|\gamma|,\gamma_n}[\phi(v)]_{|\alpha|}\sup\{S_{|\alpha|-|\gamma|+1,\alpha_n-\gamma_n}, S_{|\alpha|-|\gamma|+1,\alpha_n-\gamma_n+1}\}[v]_{|\alpha|}.$$

Les $S_{M,q}$ sont croissants en M et en q, et puisque

$\sum_{o<\gamma\leqslant\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} s_\gamma\, s_{|\alpha|-|\gamma|+1,\alpha_n-\gamma_n+1} \leqslant \varepsilon_1^{1-|\alpha|}\, \varepsilon_2^{-\alpha_n}\, m_{|\alpha|}$, on obtient en utili-
le lemme 4.1 un majorant en $L\, \varepsilon_1^{1-|\alpha|}\, \varepsilon_2^{-\alpha_n}\, m_{|\alpha|}\, [v]^2_{|\alpha|}$.

Le dernier terme se majore par :

$$\sum_{o<\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left[\sum_{o\leqslant\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} s_\gamma [\phi(v)]_{|\beta|} s_{|\beta|-|\gamma|+1,\beta_n-\gamma_n+1}[v]_{|\beta|+1}\right]$$

$$\times\, s_{|\alpha|-|\beta|+1,\alpha_n-\beta_n+1}[w]_{|\alpha|}$$

En utilisant $\sum_{o\leqslant\gamma\leqslant\beta} \binom{\beta}{\gamma} s_\gamma\, s_{|\beta|-|\gamma|+1,\beta_n-\gamma_n+1} \leqslant \varepsilon_1^{-|\beta|}\, \varepsilon_2^{-\beta_n}\, m_{|\beta|}$ puis

$\sum_{o<\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \varepsilon_1^{-|\beta|}\, \varepsilon_2^{-\beta_n}\, m_{|\beta|}\, s_{|\alpha|-|\beta|+1,\alpha_n-\beta_n+1} \leqslant \varepsilon_1^{-|\alpha|}\, \varepsilon_2^{-\alpha_n}\, m_{|\alpha|}$, on trouve

$L\, \varepsilon_1^{-|\alpha|}\, \varepsilon_2^{-\alpha_n}\, m_{|\alpha|}\, [v]^2_{|\alpha|}\, [w]_{|\alpha|}$. Le ii) se démontre de la même façon, en conservant la forme ∇w.

Remarque

Le lemme 4.3 se généralise au cas des fonctions $\phi(x,w)$ et au cas où w est à valeurs dans $\mathbb{R}^\nu$.

Avant de démontrer le lemme 2.10, rappelons (3.1) que

$$g = \rho\{\sum_{j,k,r,\ell} a_{rj}\, a_{\ell k} \frac{\partial u_k}{\partial y_r} \frac{\partial u_j}{\partial y_\ell} - \sum_{j,r,\ell} a_{rj}\, a_{\ell j} \frac{\partial P}{\partial y_\ell} \frac{\partial \sigma}{\partial y_r} - \sum_{j,r} a_{rj}\, f_j \frac{\partial \sigma}{\partial y_r}\}$$

$$- \sum_{j,\ell} a_{\ell j} \frac{\partial f_j}{\partial y_\ell}$$

et $\qquad h = - \rho \sum_{j,k} u_j\, u_k\, \phi_{jk} - f.n$

Nous pouvons donc nous ramener au cas où g et h s'écrivent :

$$g = \phi_1(U)\ \partial U\ \partial U + \phi_2(U)\ \partial U\ \partial P + \phi_3(U,f)\ \partial U + \phi_4(f)$$

$$h = \phi_5(U) - f.n$$

les fonctions ϕ_i étant analytiques de leurs arguments puisque $\rho(t,y) = \rho_o(t,\phi_{o,t}(y))$ (équation 1.1) est toujours strictement positive.

4.4 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.10

D'après le lemme 3.3, il existe C, ε_1^*, $\varepsilon_2 > 0$ tels que pour $M \geqslant 1$ pour $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^*$:

$$\tilde{T}_{M+1}(\nabla P) \leqslant C(\tilde{S}_M(g) + (M+1)\tilde{T}_M(h) + \sup(\tilde{T}_M(h),\tilde{T}_{M+1}(h)) + \varepsilon_1^{1-M} m_M T_M(\nabla P))$$

Evaluons $\tilde{S}_M(g)$, grâce au ii) du lemme 4.3 pour le terme $\phi_2(U)\partial U\partial P$, et aux lemmes 4.2 et 4.3 pour le reste.

De par l'analyticité de f, il existe ε et $K > 0$ tels que

$$(4.5) \qquad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n \quad ||\partial^\alpha f||_{\mu,t,\delta} \leqslant K(\varepsilon\,\delta\, e^{-\lambda t})^{-(|\alpha|-1)_+} m_{(|\alpha|-1)_+}$$

On en déduit, si $\varepsilon_1 < \varepsilon$ et si ε_1 vérifie les conditions imposées par les lemmes 4.2 et 4.3, pour $|\alpha| = M$ et $\alpha_n = q$

$$||\partial^\alpha g||_{\mu,\delta} \leqslant C(|\nabla P|_{M,q,\delta} + |\nabla u|_{M,q,\delta} + (\varepsilon_1\delta)^{-M} \varepsilon_2^{-q}\, m_M\, F(T_M(U),\varepsilon_1 T_{M-1}(\nabla P)))$$

ce qui donne : $\tilde{S}_M(g) \leqslant C(\tilde{T}_{M+1}(U) + \varepsilon_1^{-M}\, m_M\, F(T_M(U),\varepsilon_1\, T_M(\nabla P)))$ avec une nouvelle fonction polynôme F.

De la même façon, en utilisant l'analyticité de f et du bord de Ω, on trouve que, pour ε_1 assez petit :

$$\tilde{T}_M(h) \leqslant C(\tilde{T}_M(U) + \varepsilon_1^{-(M-1)_+} m_{(M-1)_+}\, J(T_{M-1}(U)))$$

où J est un polynôme. Le lemme 2.10 s'en déduit immédiatement.

4.6 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.8

La fonction G du lemme 2.8 s'écrit, avec $|\alpha| = M$, $\alpha_n = q$, et les notations du paragraphe 2.d

$$\partial^{\alpha+\beta}(\sigma \mathcal{F} + \sigma \text{ B.grad P}) + \sum_{j,k} a_{jk} u_j \frac{\partial V}{\partial y_k} - \sum_{j,k} \partial^{\alpha+\beta}(a_{jk} u_j \frac{\partial U}{\partial y_k})$$

Le commutateur est une somme de termes de la forme

$\partial^{\alpha+\beta}(a.u\ \partial U) - au\ \partial\ \partial^{\alpha+\beta} U$ qu'on écrit

$$\partial^{\alpha+\beta}(au\ \partial U) - \partial^{\beta}(au\ \partial^{\alpha}\ \partial U) + \partial^{\beta}(au\ \partial^{\alpha}\ \partial U) - au\ \partial^{\alpha+\beta}\ \partial U$$

La première différence, majorée en norme $L^2(\omega^+_{t,\delta})$ par $||\partial^{\alpha}(au\ \partial U) - au\ \partial^{\alpha}\ \partial U||_{\mu,t,\delta}$ s'étudie grâce au lemme 4.2 et donne un majorant de la forme :

$$C\ \{M \sup(|U|_{M,\inf(q+1,M),t,\delta}\ ,\ |U|_{M,q,t,\delta}\ ,\ |U|_{M,\sup(o,q-1),t,\delta})$$
$$+ (\varepsilon_1\ \delta\ e^{-\lambda t})^{1-M}\ \varepsilon_2^{-q}\ m_M\ (1+T_{M-1}(U))^2\}.$$

La seconde se majore par $C||au||_{\mu+1,t,\delta}\ ||\partial^{\alpha}\partial U||_{\mu-1,t,\delta}$ c'est-à-dire un terme inférieur au précédent.

Le terme $\partial^{\alpha+\beta}(\sigma \text{ B.grad P})$ s'étudie en utilisant le lemme 4.3 et donne un majorant :

$$C(|U|_{M,q,t,\delta} + |\nabla P|_{M,q,t,\delta} + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M}\ \varepsilon_2^{-q}\ m_M\ T_{M-1}(U)\ T_{M-1}(\nabla P))$$

Enfin $||\partial^{\alpha}(\sigma \mathcal{F})||_{\mu,t,\delta}$ se majore grâce à (4.5) et au lemme 4.3 lorsque $\varepsilon_1 < \varepsilon$ par :

$$C(|U|_{M,q,t,\delta} + (\varepsilon_1 \delta e^{-\lambda t})^{1-M}\ \varepsilon_2^{-q}\ m_M\ T_{M-1}(U))$$

On en déduit le lemme 2.8.

5 - ETUDE DE LA REGULARITE C^∞

Commençons par étudier le problème de la régularité C^∞ globale, on notera $||U||_s = \sup_{t\in[o,T]} ||U(t)||_{H^s(\Omega)}$ et $||U(t)||_{H^s(\Omega)} = ||U(t)||_s$.

PROPOSITION 5.1

Si U_o est C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{\Omega}$

Si f est $C^\infty([0,T] \times \bar{\Omega})$

Si $U \in C^o([0,T]\ ,\ (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ est solution de (1.1) alors $U \in C^\infty([0,T] \times \bar{\Omega})$.

Il est important de noter que le résultat est établi jusqu'au temps T. Ce résultat est mentionné dans J.E. Marsden [16] et probablement classique. Pour la commodité du lecteur nous en donnons une preuve. La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de régularité de U. Soit k un entier fixé et supposons $U \in C^o([0,T], (H^{\mu+k+1}(\Omega))^{n+1})$ nous avons alors le

LEMME 5.2

Il existe une constante C ne dépendant que de $||U||_{\mu+k+1}$ telle que pour tout $T' \leqslant T$, si $U \in C^o([0,T']\ ,\ (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ alors

$$||U(T')||_{\mu+k+2} \leqslant C(||U(o)||_{\mu+k+2} + \sup_{s\in[0,T']} ||f(s)||_{\mu+k+2})$$

Admettons-le provisoirement et démontrons la proposition 5.1. Le fait que $f \in C^o([0,T]\ ,\ (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ et $U_o \in (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1}$ assure, en utilisant un théorème d'existence et d'unicité [16], qu'il existe un temps maximal $0 < T^* \leqslant T$ pour lequel $U \in C^o([0,T^*[\ ,\ (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$.

D'après le lemme 5.2, il existe $C = C(||U||_{\mu+k+1})$ telle que :

$$\forall\ t \in [0,T^*[\ \ ||U(t)||_{\mu+k+2} \leqslant C(||U(o)||_{\mu+k+2} + \sup_{s\in[0,t]} ||f(s)||_{\mu+k+2})$$

Il en résulte en utilisant $U \in C^o([0,T]\ ,\ (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ que $U(T^*) \in (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1}$ et vérifie cette inégalité. Si $T^* < T$, on applique le théorème d'existence et d'unicité dans $C^o([T^*,T]\ ,(H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$. On a donc nécessairement $T^* = T$ et $U \in C^o([0,T]\ ,\ (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$. On en déduit la régularité C^∞ en x. La régularité en (t,x) s'obtient ensuite de façon classique en revenant à l'équation.

Remarque 5.3

On a aussi démontré le résultat suivant :

Si U_o est C^∞ jusqu'au bord sur $\bar{\Omega}$

Si $f \in C^o([0,T]\ ,\ C^\infty(\bar{\Omega}))$

Si $U \in C^o([0,T]\ ,(H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ est solution de (1.1) alors $U \in C^o([0,T]\ ,\ C^\infty(\bar{\Omega}))$.

Il reste à établir le lemme 5.2. Il va résulter des assertions suivantes :

LEMME 5.4

Soient $g_1 \in C^o([0,T]\ ,\ (L^2(\Omega))^{n+1})$ et $V_o \in (L^2(\Omega))^{n+1}$. Si $V \in C^o([0,T]\ ,\ (L^2(\Omega))^{n+1})$ est solution de

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial t} + (u\ .\ \nabla)V = g_1 \\ \qquad V_{|t=o} = V_o \end{array} \right.$$

alors $\forall\ t \in [0,T]$

$$||V(t)||^2_{L^2(\Omega)} \leq 2T(||V_o||^2_{L^2(\Omega)} + \int_o^t ||g_1(s)||^2_{L^2(\Omega)} ds)$$

Il suffit d'écrire $v(t,y) = v(o,\phi_{o,t}(y)) + \int_o^t g_1(s,\phi_{s,t}(y))ds$ et de majorer $||v(t)||^2_{L^2(\Omega)}$.

LEMME 5.5

Il existe une constante C ne dépendant que de $||U||_{\mu+k+1}$ telle que pour tout $T' \leqslant T$, si $f_1 \in C^o([0,T'], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$, si $U \in C^o([0,T'], (H^{\mu+k+2}(\Omega))^{n+1})$ est solution de

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial t} + (u \cdot \nabla)U = f_1 \\ \qquad U_{|t=o} = U(o) \qquad\qquad \text{alors} \end{array}\right.$$

$$||U(T')||^2_{\mu+k+2} \leqslant C(||U(o)||^2_{\mu+k+2} + \int_o^{T'} ||f_1(s)||^2_{\mu+k+2}ds)$$

En effet si $\alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| = \mu+k+2$, on a

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t} \partial^\alpha U + (u \cdot \nabla)\partial^\alpha U = \partial^\alpha f_1 + (u \cdot \nabla) \partial^\alpha U - \partial^\alpha(u \cdot \nabla)U \\ \text{et } \partial^\alpha U_{|t=o} = \partial^\alpha U(o) \end{array}\right.$$

il suffit alors de montrer que, pour $t \in [0,T']$,

$$||(u \cdot \nabla)\partial^\alpha U(t) - \partial^\alpha(u \cdot \nabla)U(t)||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||U||_{\mu+k+1}||U(t)||_{\mu+k+2}$$

d'utiliser le lemme 5.4 et de conclure par le lemme de Gronwall.

LEMME 5.6

Soient $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $m \geqslant \frac{n}{2} + \varepsilon$. Il existe C telle que, si u et v sont dans $H^m(\Omega)$ alors

$$||u.v||_m \leqslant ||u||_m \, ||v||_{\frac{n}{2}+\varepsilon} + ||v||_m \, ||u||_{\frac{n}{2}+\varepsilon}$$

En appliquant ce lemme à $\frac{1}{\rho}$ (grad P + f), on obtient le lemme 5.2. Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le lemme 2.1.

5.7 - DEMONSTRATION DU LEMME 2.1

Rappelons son énoncé :

si U_o est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de x_o

si f est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_o)$

alors la solution U (vérifiant 1.2) est C^∞ jusqu'au bord sur un voisinage de $\gamma_T(x_o)$.

Comme dans 2.a. on se place dans une carte locale (ω_1,θ) et quitte à découper $\gamma_T(x_o)$, on peut supposer qu'il existe un voisinage ω de x_o tel que $\forall\ t \in [0,T]$, $\phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\Omega}) \subset\subset \omega_1$. On peut donc prendre comme hypothèses que $U_o \in C^\infty(\bar{\omega} \cap \bar{\Omega})$ et que $f \in C^\infty(\overline{\mathscr{C}(\omega)})$. On notera ω_t l'ensemble $\phi_{t,o}(\omega \cap \bar{\Omega})$. La démonstration se fait par régularisation. Pour tout $\omega' \subset\subset \omega$ on construit deux suites $U_{o,\varepsilon}$ et f_ε telles que :

(5.8) $U_{o,\varepsilon} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $U_{o,\varepsilon}$ converge vers U_o dans $H^{\mu+1}(\Omega)$ et il existe $C > 0$ telle que : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ k \geq 0$

$$||U_{o,\varepsilon}||_{H^{\mu+k+1}(\omega' \cap \bar{\Omega})} \leq C\ ||U_o||_{H^{\mu+k+1}(\omega \cap \bar{\Omega})}$$

(5.9) $f_\varepsilon \in C^\infty([0,T] \times \bar{\Omega})$, f_ε converge vers f dans $C^0([0,T]\ ,\ (H^{\mu+1}(\Omega))^n)$ et il existe $C > 0$ t.q : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ k \geq 0$, $\forall\ t \in [0,T]$

$$||f_\varepsilon(t,.)||_{H^{\mu+k+1}(\omega'_t)} \leq C\ ||f(t,.)||_{H^{\mu+k+1}(\omega_t)}$$

Considérons alors l'équation d'Euler associée à ces conditions $U_{o,\varepsilon}$ et f_ε.

D'après [16] et [13], il existe un temps T_ε^* et une unique solution $U_\varepsilon \in C^o([0,T_\varepsilon^*[\ , (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$.

Le temps T_ε^* dépend uniquement d'un majorant de $||U_{o,\varepsilon}||_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ et de $\sup_{t\in[0,T]} ||f_\varepsilon(t)||_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ donc les solutions U_ε existent sur un même intervalle $[0,T^*[$. D'autre part, $U_{o,\varepsilon}$ et f_ε sont C^∞ donc d'après la proposition 5.1, les $U_\varepsilon \in C^\infty([0,T^*[\times \bar{\Omega})$.

Nous pouvons alors utiliser les majorations démontrées dans le lemme 2.11 et reprendre la méthode du paragraphe 2.g, ce qui donne, pour des semi-normes $T_{N,t,\omega'}$ avec $t < T^*$: il existe un polynôme F tel que $\forall\ N \geqslant 1,\ \forall\ t < T^*$

$$T_{N,t}(U_\varepsilon) \leqslant H \quad \text{et} \quad T_{N,t}(\nabla P_\varepsilon) \leqslant K$$

avec $\quad H = \max(T_1(U_\varepsilon)\ ,\ 2 \sup_{k\geqslant o} ||U_{o,\varepsilon}||_{H^{\mu+k+1}(\omega' \cap \bar{\Omega})})$

et $\quad K = \max(T_1(\nabla P_\varepsilon)\ ,\ F(\sup_{\substack{k\geqslant o\\ s\in[0,T]}} ||f_\varepsilon(s)||_{H^{\mu+k+1}(\omega'_s)}))$

Comme les normes $||U_\varepsilon(t)||_{H^{\mu+1}(\Omega)}$ sont majorées indépendamment de ε sur $[0,T]$, on a, en utilisant (5.8) et (5.9) : il existe H et K > 0 t.q $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall\ N \geqslant 1, \forall\ t < T^*, T_{N,t}(U_\varepsilon) \leqslant H$ et $T_{N,t}(\nabla P_\varepsilon) \leqslant K$. Maintenant la condition $\exists\ C > 0\ ,\ \forall\ t \in [0,T^*[,\ ||U_\varepsilon(t)||_{H^{\mu+1}(\Omega)} \leqslant C$ implique, par le théorème d'unicité dans $C^o([0,T^*[\ , (H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1})$ que $\forall\ t < T^*$, $U_\varepsilon(t)$ converge faiblement vers $U(t)$ dans $(H^{\mu+1}(\Omega))^{n+1}$. On en déduit que

$$\forall\ N \geqslant 1,\ \forall\ t < T^*\ ,\ T_{N,t}(U) \leqslant H \text{ et } T_{N,t}(\nabla P) \leqslant K$$

Ainsi $\forall\, t < T^*$, $U(t) \in C^\infty(\omega'_t)$. Ceci étant vrai pour tout $\omega' \subset\subset \omega$, les constantes H et K ne dépendant que de ω (5.8 et 5.9) on en déduit : $\forall\, t < T^*$, $U(t) \in C^\infty(\omega_t)$, et $\forall\, N \geq 1$, $T_{N,t,\omega}(U) \leq H$.

Si l'on considère maintenant une suite $t_n \to T^*$, la condition $U(t_n) \to U(T^*)$ dans $H^{\mu+1}(\Omega)$ implique que $U(t_n,\phi_{t_n,o}(\cdot)) \to U(T^*,\phi_{T^*,o}(\cdot))$ dans $H^{\mu+1}(\omega_\delta)$ pour tout $\delta < \delta_o$. On déduit alors de la majoration $T_{N,t}(U) \leq H$ la convergence faible de $U(t_n,\phi_{t_n,o}(\cdot))$ vers $U(T^*,\phi_{T^*,o}(\cdot))$ dans $H^{\mu+k}(\omega_\delta)$ pour tout k et tout δ, si bien que : $\forall\, N \geq 1$, $T_{N,T^*}(U) \leq H$ et $U(T^*) \in C^\infty(\omega_{T^*})$.

Ensuite, comme dans la démonstration de 5.1, $T^* = T$ et $\forall\, t \in [0,T]$, $U(t) \in C^\infty(\omega_t)$.

La régularité locale en toutes les variables, c'est à dire $U \in C^\infty(\mathcal{C}_T(\omega))$ s'obtient alors de façon classique. On raisonne de même pour la pression.

REFERENCES

[1] : S. ALINHAC - G. METIVIER : "Propagation de l'analyticité des solutions de systèmes hyperboliques non linéaires". Invent. Math 75 (1984) 189-204

[2] : S. ALINHAC - G. METIVIER : "Propagation de l'analyticité locale pour les solutions de l'équation d'Euler". Arch. for Rational Mechanics and Analysis (à paraître).

[3] : C. BARDOS : "Analyticité de la solution de l'équation d'Euler dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$". C.R.A.S. Paris, t 283 (1976), 255-258

[4] : C. BARDOS - S. BENACHOUR - M. ZERNER : "Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension deux". C.R.A.S. Paris, t 282 (1976), 995-998.

[5] : S. BENACHOUR : "Analyticité des solutions périodiques de l'équation d'Euler en dimension trois". C.R.A.S. Paris (1976), t 283, 107-110

[6] : J.P. BOURGUIGNON - H. BREZIS : "Remarks on the Euler equation". J. Functional Analysis, 15 (1974) 341-363.

[7] : D.G. EBIN - J. MARSDEN : "Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid". Ann. of Math. 92 (1976) 102-163.

[8] : A. FRIEDMAN : "On the regularity of the solutions of non linear elliptic and parabolic systems of partial differential equations". J. Math. Mech. 7 (1958) 43-60.

[9] : L. HÖRMANDER : "Linear partial differential operators". Springer Verlag (1969).

[10]: T. KATO : "Non stationnary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$". J. Functional Analysis 9 (1972) 296-305.

[11] : P.D. LAX : "Non linear hyperbolic equations". Comm. on Pure Appl. Math. ; 6 (1953), 231-258.

[12] : C.B. MORREY - L. NIRENBERG : "On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of P.D.E.". C.P.A.M., Vol X, (1957), 271-290.

[13] : R. TEMAM : "On the Euler equations of incompressible perfect fluids". J. Functional Analysis 20 (1975), 32-43.

[14] : C. WAGSCHALL : "Le problème de Goursat non linéaire". Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-79, Ecole Polytechnique.

[15] : A. VALLI - H.B. DAVEIGA : "On the motion of a non homogeneous ideal incompressible fluid in an external force field". Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol 59 (1978).

[16] : J.E. MARSDEN : "Well-Posedness of the equations of a non-homogeneous perfect fluid". Comm. Part. Dif. equ. vol 1, (1976), 215-230.

[17] : R. TEMAM : "Local existence of C^∞ solutions of the Euler equations of incompressible perfect fluids". Lect. Notes in Math., vol 565, Springer Verlag, p. 184.