

XUE PING WANG

Opérateurs de temps-retard dans la théorie de la diffusion

Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes, 1985, fascicule 3
« Équations aux dérivées partielles », , p. 230-240

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1985__3_230_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes,
1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHAPITRE VII

OPERATEURS DE TEMPS-RETARD DANS LA THEORIE DE LA DIFFUSION

WANG Xue Ping

Université de Nantes

UER Mathématiques & Informatique

2, Chemin de la Houssinière

44 072 - NANTES CEDEX - FRANCE

OPERATEURS DE TEMPS-RETARD DANS LA THEORIE DE LA DIFFUSION

I - INTRODUCTION

Considérons l'opérateur de Schrödinger $H^h = H_0^h + V_h$, où $H_0^h = -\frac{h}{2} \Delta$ et $V_h(x) = V(\frac{1}{h^2}x)$, V étant un potentiel réel C_0^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et h un paramètre positif proportionnel à la constante de Planck. Désignons par $U_0^h(t)$ et $U^h(t)$ le groupe unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ engendré par H_0^h et H^h respectivement : $U_0^h(t) = \exp(-i h^{-1} t H_0^h)$, $U^h(t) = \exp(-i h^{-1} t H^h)$, $t \in \mathbb{R}$.

Alors il est bien connu que les opérateurs d'onde $\Omega_{\pm}^h(h)$ définis par :

$$\Omega_{\pm}^h(h) = \text{s-lim}_{t \rightarrow \pm\infty} U^h(t)^* U_0^h(t) \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

existent et sont complets, c'est à dire que l'image de $\Omega_+(h)$ et $\Omega_-(h)$ sont tous égaux au sous-espace spectral continu pour H^h dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur de diffusion $S(h) : S(h) = \Omega_+(h)^{-1} \Omega_-(h)$, est un opérateur unitaire qui commute avec $U_O^h(t)$. Donc si l'on désigne par $F_h : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = L^2(S^{n-1})$, une représentation spectrale pour H_O^h :

$$(F_h H_O^h F_h^{-1} f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$$

On a alors : $(F_h S(h) F_h^{-1} f)(\lambda) = S(\lambda, h) f(\lambda)$, où $S(\lambda, h)$ est une multiplication en λ à valeurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{P})$. Sous les hypothèses ci-dessus sur V , $S(\lambda, h)$ est C^∞ en $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Alors l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner $T(h)$ est défini par :

$$(1.1) \quad (F_h T(h) F_h^{-1} f)(\lambda) = -i S(\lambda, h)^* \frac{dS}{d\lambda}(\lambda, h) f(\lambda)$$

pour $f \in C_0(\mathbb{R}_+ ; \mathcal{P})$. $T(h)$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pour de divers aspects concernant l'opérateur de temps-retard, on renvoie à Jensen [1], Martin [2], Narnhofer [3], [4].

Pour motiver notre travail, rappelons aussi la notion du temps-retard dans la diffusion de particules classiques : on note par $\{x(t), \xi(t)\}$ la solution du problème

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \xi(t) & x(0) = x_0 \\ \dot{\xi}(t) = -\nabla V(x(t)) & \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

On suppose que $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} |x(t)| = +\infty$. Soit $R > 0$ tel que

$\text{supp } V \subset B_R = \{|x| < R\}$ et $|x_0| < R$. Désignons par $-t_-(t_+)$ le temps auquel

la particule entre (quitte) la boule B_R . Posons $x_- = x(-t_-)$, $\xi_- = \xi(-t_-)$; $x_+ = x(t_+)$, $\xi_+ = \xi(t_+)$. La durée de séjour de la trajectoire $\{x(t), \xi(t)\}$ dans la boule B_R est donnée par T_R :

$$T_R = t_- + t_+$$

En termes des paramètres de la trajectoire, on peut écrire :

$$T_R = \left(\frac{\tilde{x}_- \cdot \xi_-}{|\xi_-|^2} - \frac{\tilde{x}_+ \cdot \xi_+}{|\xi_+|^2} \right) + \left(\frac{x_+ \cdot \xi_+}{|\xi_+|^2} - \frac{x_- \cdot \xi_-}{|\xi_-|^2} \right)$$

On remarque que $|\xi_-|^2 = |\xi_+|^2 = 2\left(\frac{|\xi_0|^2}{2} + V(x_0)\right)$. Pour la trajectoire libre passant par (x_-, ξ_-) , la durée de séjour T_R^0 dans B_R est donnée par :

$$T_R^0 = -2 \xi_- \cdot x_- / |\xi_-|^2$$

Le temps-retard τ pour la trajectoire $(x(t), \xi(t))$ est défini comme la limite de la différence de la durée de séjour $T_R - T_R^0$ lorsque R tend vers $+\infty$: $\tau = \lim_{R \rightarrow +\infty} T_R - T_R^0$. Comme on a $\lim_{R \rightarrow +\infty} (x_+ \cdot \xi_+ + x_- \cdot \xi_-) = 0$, on a aussi l'expression :

$$(1.3) \quad \tau = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{|\xi_-|^2} (\tilde{x}(-t) \cdot \xi(-t) - \tilde{x}(t) \cdot \xi(t))$$

où $\tilde{x}(t) = x(t) - t\xi(t)$. Si l'on note par $\phi^t(x_0, \xi_0)$ la solution de (1.2) et par $\phi_0^t(x_0, \xi_0)$ la solution correspondant à l'hamiltonien libre $p(x_0, \xi_0) = |\xi_0|^2/2 + V(x_0)$, $d(\chi, \xi) = x \cdot \xi$, alors on a :

$$(1.3)' \quad \tau(x_0, \xi_0) = (2p(x_0, \xi_0))^{-1} \left(\lim_{t \rightarrow -\infty} d \circ \phi_0^{-t} \circ \phi^t(x_0, \xi_0) \right. \\ \left. - \lim_{t \rightarrow +\infty} d \circ \phi_0^{-t} \circ \phi^t(x_0, \xi_0) \right)$$

lorsque la limite au deuxième membre de (1.3)' existe.

Vu ces deux notions de temps-retard dans la théorie de diffusion, on peut se demander quelle est la liaison entre le temps-retard classique et le temps-retard quantique. Dans ce travail, on se propose de retrouver le temps-retard classique à partir de l'opérateur de temps-retard quantique.

II - APPROXIMATION SEMI-CLASSIQUE DES OPERATEURS DE TEMPS-RETARD QUANTIQUE

Il est intéressant de rappeler une autre définition de temps-retard quantique due à Narnhofer [3]. On note par $A(h)$ l'opérateur de symbole de Weyl $d(x, \xi)$: $A(h) = d^W(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)$. Par analogie avec le temps-retard classique, Narnhofer [3] a défini l'opérateur de temps-retard quantique $\tilde{T}(h)$ par :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \langle f, {}^h\tilde{T}(h)g \rangle &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle f, U^h(t)^* U_0^h(t) A(h) U_0^h(t)^* U^h(t)g \rangle \\ &\quad - \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle f, U^h(t)^* U_0^h(t) A(h) U_0^h(t)^* U^h(t)g \rangle \end{aligned}$$

pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ lorsque la limite existe. On peut montrer que pour $f, g \in \mathcal{D}(A(h))$ tels que $\chi(H^h)f = f$, $\chi(H^h)g = g$ pour certaine $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, (2.1) est bien défini. On appellera $\tilde{T}(h)$ l'opérateur de temps-retard modifié.

Supposons que V soit à support compact et qu'il existe un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ tel que

(N) pour tout intervalle compact $I \subset J$ et tout $R > 0$, il existe $C, t_0 > 0$ tels que

$$|x(t; y, \eta)| \geq C|t| \quad \text{pour } |t| \geq t_0, (y, \eta) \in p^{-1}(I), |y| \leq R$$

où $(x(t; y, \eta), \xi(t; y, \eta))$ est la solution de (1.2) avec données initiales (y, η) .

Introduisons une classe de symboles $T_{\rho,\delta}^{s,r}$, où $s,r \in \mathbb{R}$ et $\rho,\delta \in [0,1]$.
 $T_{\rho,\delta}^{s,r}$ ont pour éléments des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant :

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1+|x|)^{s+\rho|\beta|} (1+|\xi|)^{r+\delta|\alpha|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Posons : $T^s = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} T_{\rho,\delta}^{s,r}$. On munit $T_{\rho,\delta}^{s,r}$ de la famille de semi-normes naturelles. Pour $a \in T_{\rho,\delta}^{s,r}$, on définit un opérateur $a^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D_x)} : \mathcal{S} \rightarrow C^\infty$ par :

$$(a^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)} f)(x) = \iint_{\mathbb{R}^n} \exp(i(x-y) \cdot \xi) a(h^{\frac{1}{2}}(x+y)/2, h^{\frac{1}{2}}\xi) f(y) dy \, \xi$$

$$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Pour $\rho, \delta \in [0,1[$, $a^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)}$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $\rho = 1$, $\delta \in [0,1[$, $a^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)}$ est un opérateur continu de $\mathcal{S}$ dans $B^{(s)}$, où $B^{(s)}$ est l'espace des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ satisfaisant :
 $|\partial_x^\alpha b(x)| \leq C_\alpha (1+|x|)^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, muni de la famille de semi-normes naturelles.

THEOREME 1

Sous les conditions ci-dessus, soient χ et χ_1 fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec support compact dans J tel que $\chi_1 = 1$ sur $\text{supp } \chi$. Alors $\tilde{T}(h)$ admet un développement semi-classique en termes d'opérateurs pseudo-différentiels :

$$h^{\frac{1}{2}} \tilde{T}(h) \sim \sum_{j \geq 0} h^j p_j^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)}$$

où $p_j \in T_1^1$, $j \geq 0$, au sens que pour tout $\mu > 1/2$, $N \geq 0$

$$\left\| (A(h)^2 + 1)^{-\mu} \chi(h^h) (h^{\frac{1}{2}} \tilde{T}(h) - \sum_{j \geq 0}^N h^j p_j^{w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)}) \chi(h^h) (A(h)^2 + 1)^{-\mu} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_N h^{N+1}$$

En particulier :

$$\left\| (A(h)^2 + 1)^{-u} \chi(H^h) p_j^w(h^{\frac{1}{2}} x, h^{\frac{1}{2}} D) \chi(H^h) (A(h)^2 + 1)^{-u} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} < +\infty$$

pour $j = 0, 1, 2, \dots$. On a $p_0 = (2p\chi_1 op)\tau$, τ étant la fonction de temps-retard classique.

Remarquons que dans le théorème 1, les symboles p_j dépendent de la fonction χ_1 . Comme H^h admet p comme symbole, le théorème 1 montre que $\tilde{T}(h)$ peut être considéré comme une quantification de la fonction 2τ .

Soient $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $p(x_0, \xi_0) \in J$, χ est une fonction $C_0^\infty(J)$ telle que $\chi \circ p(x_0, \xi_0) = 1$. Posons $W_h(x_0, \xi_0) = \exp(+ih^{-\frac{1}{2}}(x \cdot \xi_0 - x_0 \cdot D_x))$. Alors on a :

THEOREME 2

Pour $f, g \in \mathcal{D}(A(h))$, définissons f_h, g_h par :

$$f_h = \chi(H^h) W_h(x_0, \xi_0) f, \quad g_h = \chi(H^h) W_h(x_0, \xi_0) g.$$

Alors on a $\lim_{h \rightarrow 0_+} \langle f_h, \tilde{T}(h) g_h \rangle = 2\tau(x_0, \xi_0) \langle f, g \rangle$

Pour l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner, on a le résultat suivant :

THEOREME 3

Sous les conditions ci-dessus, soient $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, $|\xi_0|^2/2 \in J$, $\chi \in C_0^\infty(J)$ avec $\chi(|\xi_0|^2/2) = 1$. Pour $f, g \in \mathcal{D}(A(h))$, on pose

$$f_h = \chi(H_0^h) W_h(x_0, \xi_0) f, \quad g_h = \chi(H_0^h) W_h(x_0, \xi_0) g$$

Alors on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \langle f_h, T(h)g_h \rangle = \tau \circ \Omega_-^{cl}(x_0, \xi_0) \langle f, g \rangle$$

où Ω_-^{cl} est l'opérateur d'onde classique entrant défini sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \setminus \{0\}$ par

$$\Omega_-^{cl}(x, \xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^{-t} \circ \phi_0^t(x, \xi)$$

Les théorèmes 2 et 3 montrent la différence entre l'opérateur de temps-retard modifié et l'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner. L'opérateur de temps-retard d'Eisenbud-Wigner étant la quantification de la fonction de temps-retard appliqué aux données entrantes.

III - ESTIMATION UNIFORME SUR LA DECROISSANCE DE $U^h(t)$

Le résultat suivant est à la base de l'étude semi-classique des opérateurs de temps-retard :

THEOREME 4

Soit V un potentiel à courte portée :

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha (1+(x))^{-1-|\alpha|-\epsilon} \quad \epsilon > 0.$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Sous la condition (N), pour $\chi \in C_0^\infty(J)$, on a :

$$(3.1) \quad \left\| (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \chi(H^h) U^h(t) (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu (1+(t))^{-\mu}, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

pour $1 < \mu \leq 2$, il existe $\rho > 1$ tel que :

$$(3.2) \quad \left\| (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \chi(H^h) U^h(t) (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu (1+(t))^{-\rho}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Posons $U^h(r,s) = U_0^h(r)^* U^h(s)$. On a alors :

$$(3.3) \quad \left\| (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \zeta(H_0^h) U^h(r,s) \chi(H^h) (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu (1 + |r-s|)^{-\mu},$$

$$0 \leq \mu \leq 1$$

Pour $1 < \mu \leq 2$, il existe $\rho > 1$ tel que :

$$(3.4) \quad \left\| (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \zeta(H_0^h) U^h(r,s) \chi(H^h) (A(h)^2 + 1)^{-\mu/2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C_\mu (1 + |r-s|)^{-\rho}.$$

(3.1) ... (3.4) sont uniformes par rapport à $h \in]0,1]$.

Pour démontrer le théorème 4, on utilise la borne semi-classique pour la résolvante de l'opérateur H^h (voir Robert-Tamura [6]). On renvoie à [7] pour les détails de la démonstration.

Notons que pour $h \in]0,1]$ fixé, les estimations (3.1) ... (3.4) sont encore vraies en remplaçant $\chi \in C_0^\infty(J)$ par $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. Alors on peut déduire la complétude asymptotique des opérateurs d'ordre $\Omega_\pm^h(h)$ pour le potentiel à courte portée. En fait, alors (3.2) entraîne que

$$s - \lim_{t \rightarrow +\infty} U_0^h(t)^* U^h(t) \chi(H^h) \text{ existe dans } L^2(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Cela entraîne que $\text{Im } \Omega_\pm^h(h)$ est égal au sous-espace spectral continu pour H^h .

Maintenant on est en mesure d'esquisser la démonstration des résultats. On renvoie à Wang [7] pour les détails. L'idée essentielle se résume dans la remarque suivante : en général, on peut approcher la solution de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial U^h}{\partial t}(t) = H^h U^h(t) \quad , \quad U^h(0) = I$$

pour des opérateurs intégraux de Fourier, par contre pour la solution de l'équation de Heisenberg :

$$ih \frac{\partial F^h}{\partial t}(t) = [F^h(t), H^h] \quad , \quad F^h(0) = b^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D_x)$$

On peut l'approcher pour des opérateurs pseudo-différentiels (voir [8]). En conséquence, si l'on note : $\Omega(t, h) = U^h(t) * U_0^h(t) A(h) U_0^h(t) * U^h(t)$, sous les conditions du théorème 1, on peut montrer que $\Omega(t, h) \chi_1(h^h)$ admet un développement semi-classique :

$\forall N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\Omega(t, h) \chi_1(h^h) = \sum_{j=0}^N h^j p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D, t) + h^{N+1} R_N(h; t)$$

Utilisant le théorème 4, on a pour tout $s > 1/2$

$$\| |(A(h)^2 + 1)^{-s} \chi(H^h) R_N(t, h) \chi(H^h) (A(h)^2 + 1)^{-s}| \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq C < +\infty$$

uniformément en $t \in \mathbb{R}$ et $h \in]0, 1]$. Pour les $p_j(t)$, on a :

LEMME 1

Pour tout $j \geq 0$, $p_{j, \pm} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} p_j(t)$ existe dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Les $p_{j, \pm}$ sont dans la classe T_1^1 , c'est à dire

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_{j, \pm}(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta, N} (1 + |x|)^{1+|\beta|} (1 + |\xi|)^{-N}$$

pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ et $N > 0$.

D'après le lemme 1, on obtient :

$$\begin{aligned} & \| |(A(h)^2 + 1)^{-s} \chi(H^h) (H^h T(h) - \sum_{j=0}^N h^j p_j^w(h^{\frac{1}{2}}x, h^{\frac{1}{2}}D)) \chi(H^h) (A(h)^2 + 1)^{-s}| \| \\ & \leq C_N h^{N+1} \quad , \quad s > 1/2 \end{aligned}$$

où $p_j = p_{j,-} - p_{j,+}$. Cela montre le théorème 1. Le théorème 2 est une conséquence du théorème 1. Le théorème 3 se démontre de la même manière (voir [7]).

REFERENCES

- [1] - A. JENSEN : "Time-delay in potential scattering theory, some "geometry" results". Comm. Math. Phys. 82 (1981), 435-456.
- [2] - Ph. MARTIN : "Time-delay of quantum scattering processus". Acta Physica Austriaca Suppl. 23 (1981), 157-208.
- [3] - H. NARNHOFER : "Another definition for time-delay". Phys. Rev., D 22 (1980), 2387-2390.
- [4] - H. NARNHOFER : "Time-delay and dilation properties in scattering theory". J. Math. Phys. 25 (1984), 987-991.
- [5] - D. ROBERT - H. TAMURA : "Semi-classical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scattering phase". Comm. P.D.E., 9 (10) (1984), 1017-1058.
- [6] - D. ROBERT - H. TAMURA : "Semi-classical asymptotic for spectral function of Schrödinger operators and applications to scattering problems". In preparation.
- [7] - X.P. WANG : "Etude semi-classique d'observables quantiques". Thèse, Nantes, Mars 1984.
- [8] - X.P. WANG : "Time-delay operators in semi-classical limit, I finite range potentials". A paraître.