

A. DJEBBAR

Quelques aspects mathématiques et culturels dans la science arabe : (exemple de la combinatoire)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1983, fascicule 2

« Séminaires de mathématiques - science, histoire et société contemporaine », , p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1983__2_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES ASPECTS MATHÉMATIQUES ET CULTURELS
DANS LA SCIENCE ARABE :
(EXEMPLE DE LA COMBINATOIRE)

A. DJEBBAR - Université Paris XI

Dans cet exposé sur les activités mathématiques dans la société arabo-musulmane des VIII^e-XIV^e siècles, je tenterai de montrer sur un exemple précis, celui de l'analyse combinatoire, les liens qui ont pu exister entre la production mathématique et certaines préoccupations de cette société, d'une part, et les interactions entre différentes activités scientifiques d'autre part.

Dans cette perspective, l'histoire des mathématiques arabes ne peut être réduite à un simple catalogue de savants illustres, d'ouvrages marquants ou de théorèmes originaux. Du point de vue interne, nous devons nous interroger sur le contenu exact de cette discipline avec son développement, sa diversification, son extension, l'élargissement de ses champs d'application afin de mieux comprendre l'apparition de domaines nouveaux comme la trigonométrie, l'algèbre, l'analyse combinatoire et d'instruments originaux comme les fractions décimales, les techniques d'approximation, le symbolisme. Du point de vue externe, un immense secteur encore inexploré concerne, d'une part, les rapports de l'activité mathématique avec les autres sciences (prises dans le sens arabo-musulman très large qui englobe les sciences physiques, religieuses, linguistiques philosophique et même astrologiques), et d'autre part, le rôle des mathématiques dans la formation d'un individu par l'intermédiaire des institutions et des programmes d'enseignement ainsi que son intervention comme science appliquée dans les secteurs aussi variés que les partages successoraux, les transactions commerciales l'architecture, l'arpentage, le génie civil et enfin les techniques astrologiques.

Tout d'abord, voyons comment l'environnement arabo-musulman et l'état de la société ont, selon les époques, marqué de leurs empreintes la production mathématique et sa diffusion, en les stimulant, en les infléchissant ou en les contrariant.

Il est maintenant admis que le développement important qu'a connu l'astronomie dès le VIII^e siècle, au centre de l'empire et à partir du X^e siècle, dans l'occident musulman, a été favorisé, sinon suscité, par les nécessités de la vie religieuse (direction et moments de la prière), par les besoins du commerce à grand rayon (navigation, position des villes, chagement de calendriers) et enfin par le recours croissant à l'astrologie comme instrument de prévision des événements liés à la vie personnelle ou collective. Par ailleurs, la nature des nouveaux pouvoirs, l'étendue des espaces contrôlés, la diversité ethnique, linguistique et culturelle des peuples gouvernés, ont nécessité le développement d'une importante couche sociale, celle des personnels des différentes administrations centrales ou régionales, dont la formation incluait l'acquisition d'une technicité et d'une culture mathématique non négligeables, à en juger par exemple, par ce que semble avoir retenu un haut fonctionnaire comme Ibn Khaldūn qui était pourtant beaucoup plus un "politique" qu'un "technocrate"! Cela a favorisé le développement du ^CIlm al-Ḥisāb, avec introduction et extension de la numération décimale (avec utilisation des chiffres indiens au centre et des chiffres Ghojar, au Maghreb et en Andalousie), apparition et extension du symbolisme mathématique au Maghreb pour répondre, semble-t-il à un développement quantitatif des calculs, invention des fractions décimales et leur utilisation comme technique d'approximation des racines n^e d'un nombre ou bien comme technique de conversion, en comptabilité.

Ce sont là quelques unes des influences favorables qu'a eu la réalité médiévale sur les mathématiques.

D'autres effets dont on parle moins, parcequ'on les juge négatifs dans une idéalisation de l'histoire ancienne, sont issus des changements profonds que connaîtra la société maghrébine et arabo-musulmane en général, sur les plans économiques et culturels et qui aboutiront (on ignore encore selon quel processus) à un abandon

progressif de certains chapitres ^a mathématiques comme les fractions décimales, l'analyse combinatoire, certaines techniques d'approximations et, parfois, de disciplines entières comme la géométrie des coniques, la théorie des nombres, la théorie géométrique des équations, pour ne parler que des matières dont l'enseignement au Maghreb est attesté par plusieurs ouvrages et qui avaient l'avantage d'avoir bénéficié d'une solide tradition de recherche. Ici aussi, seule une recherche pluridisciplinaire pourrait nous fournir des éléments de réponse.

Une troisième influence sur les activités mathématiques provient du vécu culturel de la société et découle, du moins à l'origine, des interactions entre différentes activités intellectuelles du moment. Mais, avec le temps, ces facteurs premiers s'estompent totalement ou partiellement, pour laisser place à une tradition transmise de maître à élèves et suffisante pour aiguïser la curiosité des mathématiciens et stimuler leurs recherches.

C'est dans le cadre de cette tradition pluridisciplinaire que s'inscrivent les préoccupations combinatoires des mathématiciens arabes. Mais, pour mieux suivre la naissance et les premiers pas de cette nouvelle discipline, il serait peut-être utile d'évoquer, à grands traits, la tradition mathématique dans laquelle va s'insérer cette activité.

Lorsqu'on analyse les mathématiques arabes, du point de vue de leur contenu, à travers les différentes classifications des sciences établies successivement par al-Fārābī, Ibn Sīnā et Ibn Khaldūn, pour ne citer que les plus connues et les plus accessibles, donc les plus lues, on est frappé par un élément de continuité qui se dégage et qui est la fidélité à la conception aristotélicienne de la connaissance et à la classification qui en découle : D'abord la physique puis les mathématiques et enfin la métaphysique.

A leur tour, les sciences mathématiques sont classées selon un ordre qui correspond à une hiérarchie entre ses différentes composantes : D'abord l'arithmétique ou science du nombre, puis la géométrie ou science des grandeurs, puis l'astronomie et enfin la musique identifiée à la science des rapports composés.

A l'intérieur de ce cadre rigide fidèle à la tradition grecque, perpétuée par les philosophes arabes, une analyse détaillée révèle pourtant des différences par rapport au contenu classique attri-

bué aux mathématiques, dans la mesure où des matières nouvelles inconnues des grecs se voient octroyer une place dans la classification des disciplines mathématiques. Il en est ainsi de l'arithmétique indienne que les arabes dénomment al-Ḥisāb al-Hindī et qu'ils distinguent de l'arithmétique tout court (ou théorie des nombres) appelée ^CIlm al-^CAdad dont la double tradition euclidienne et néo-pythagoricienne était connue des savants de l'est et de l'ouest de l'empire, à travers les livres VII, VIII, IX des *Eléments* d'Euclide, d'un côté, et à travers l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque, de l'autre. Ces ouvrages ont bénéficié, dès le IX^e siècle, de traductions en arabe.

Il en est de même de l'algèbre, encore absente du *Kitāb Iḥṣā' al-^CUlūm* d'al-Fārābī et qui apparaît timidement chez Ibn Sīnā, comme une matière secondaire n'ayant droit qu'à une simple remarque de la part du philosophe, à la fin de la partie arithmétique de son *Kitāb ash-Shifā'*, avant de se distinguer comme discipline à part entière chez Ibn Khaldūn.

C'est là d'ailleurs un exemple qui illustre la manière dont une pratique scientifique soutenue et féconde ne se reflète pas totalement dans une rationalisation un peu dogmatique des divers aspects de la connaissance.

Cela étant, si l'on s'en tenait aux classifications des sciences on ne pourrait pas appréhender tous les aspects de l'activité mathématique qui a effectivement eu lieu et ce, pour des raisons qui tiennent non seulement à cette conception grecque de la science que nous venons d'évoquer, mais également au fait que les premières classifications ont été établies à une époque où les mathématiciens innovaient encore en forgeant de nouveaux outils, en étendant des champs d'activité, en posant de nouveaux problèmes et en les résolvant complètement ou en partie, en inaugurant de nouvelles disciplines. Bref, leurs activités multiples transgressaient dans les faits les limites assignées à cette science par la philosophie. En disant cela, j'ai à l'esprit l'extension de l'astronomie et son renouvellement avec, sur le plan pratique, intervention massive de l'observation et, sur le plan théorique, dépassement des méthodes de calcul grecques par l'établissement de théorèmes nouveaux, comme le fameux théorème du quadrilatère complet

(que l'on a surnommé ash-Shakl al-Mughnī -la figure qui dispense- parcequ'il libérait les astronomes des calculs pénibles nécessités par l'utilisation du théorème de "la figure sécante"). Ces progrès seront d'ailleurs favorisés par l'introduction de l'algèbre dans le calcul des tables astronomiques et dans l'étude des éléments du triangle sphérique, favorisant ainsi la naissance, le développement puis l'autonomie d'une nouvelle discipline : La trigonométrie. Je pense également à l'extension du domaine de l'algèbre, par l'utilisation des nombres réels algébriques, l'introduction des courbes dans l'étude de l'existence des solutions d'équations de degré supérieur à deux et la naissance puis le développement de la théorie des polynômes. Cela favorisera, d'un côté, l'établissement de méthodes d'approximations pour résoudre des équations et, de l'autre, le développement de l'analyse diophantienne. Je pense enfin à l'apparition de l'analyse combinatoire, d'abord comme procédés inductifs épars, puis comme chapitre de la science du calcul, avec son domaine et ses méthodes.

L'ANALYSE COMBINATOIRE DU VIII^e AU XV^e SIECLE :

Cette discipline dont on avait coutume de dater les débuts au XVII^e siècle en Europe, a la particularité de n'être pas issue de la tradition grecque mais d'activités en grande partie extérieure aux mathématiques et motivées par une réalité culturelle arabomusulmane. En effet, considérée dans son sens général d'étude des configurations, dans des espaces à une, deux ou trois dimensions, l'analyse combinatoire voit ses débuts, dans la science arabe, se confondre avec les premières études sur la musique, la métrique, la chimie, l'astrologie et la linguistique. En disant cela, je fais référence aux écrits d'al-Fārābī, des Ikhwān as-Ṣafā et d'al-Khalīl Ibn Aḥmad, sur la musique et la métrique, en particulier aux études concernant les combinaisons de rythmes, de notes, de pieds, pour la composition de chants, de mélodies ou de poèmes. Pour la chimie, je pense aux réflexions très originales de Jābir Ibn Ḥayyān et, en particulier, à sa théorie de la balance basée sur le principe que tout est combinaison de nombres et que l'on peut parler d'une morphologie des métaux, par analogie à celle des

mots d'une langue, dans la mesure où il y aurait selon lui une correspondance que l'on qualifierait aujourd'hui de bijective entre les divers constituants du métal et les lettres qui composent le nom de ce métal . Je pense également, pour ce qui est de l'astrologie, aux premiers algorithmes de construction de carrés magiques que l'on trouve chez al-Kindī, chez Abū-l-Wafā et dans les Rasā'il des Ikhwān as-Şafā. Mais, le domaine qui nous intéressera le plus ici est celui de la linguistique avec les premières études sur la langue arabe, son histoire, sa morphologie, les principes combinatoires qui régissent la composition des mots et, comme conséquence, les premiers ouvrages de lexicographie.

Parallèlement à cette activité linguistique, on observe, mais cette fois à l'intérieur de la tradition mathématique, les premières manifestations de calculs combinatoires. A titre d'exemple, citons le livre de Thābit Ibn Qurra, (*ash-Shakl al-Qaṭṭā'*^C), qui repose tout entier sur les dénombrements de rapports composés, le livre d'al-Bīrūnī, (*Maqālīd 'Ilm al-Hay'a*), qui étudie les équations issues du triangle sphérique après les avoir dénombrées et classées en fonction du nombre d'inconnues , et enfin les livres d'algèbre d'Abū Kāmil (*at-Taṣarā'if fī-l-Ḥisāb*) et d'as-Samaw'al al-Maghribī (*al-Bāhir fī-l-Jabr*) qui sont amenés, pour les besoins d'une réflexion sur l'algèbre et sur les objets qu'elle considérait, à dénombrer, par énumération, des équations, des solutions ou des conditions de compatibilité. Il faut remarquer, à propos de ces exemples, que les problèmes combinatoires résolus restent soit élémentaires, soit trop compliqués : Élémentaires dans la mesure où ils font intervenir des combinaisons ou des permutations d'objets en nombre suffisamment petit pour qu'une simple énumération suffise à obtenir le résultat. Compliqués, parcequ'il arrive que des contraintes, liées au problème, perturbent la simplicité du modèle combinatoire et rendent, par là même, impossible la recherche d'algorithmes généraux. Il arrive aussi que l'aspect combinatoire soit complètement masqué par son expression algébrique comme c'est le cas, par exemple, pour les coefficients du binôme d'ordre n , qu'il n'est pas du tout immédiat d'identifier aux combinaisons de n objets p à p .

Paradoxalement, ce n'est pas cette tradition qui a inspiré les mathématiciens du Maghreb qui se sont occupés de combinatoire, mais celle des linguistes. C'est ce qui ressort de la lecture des ouvrages d'Ibn Mun^cim et d'Ibn al-Bannā', deux auteurs dont les préoccupations dans ce domaine ont été les plus conséquentes.

Dans son livre intitulé *Fiqh al-Ḥisāb* (La science du calcul), Ibn Mun^cim (XII^e-XIII^e siècle) commence par établir, à partir d'un ensemble de couleurs de soie qui jouera le rôle de modèle abstrait, une règle permettant de déterminer toutes les combinaisons possibles de n couleurs, p à p .

Ce faisant, il donne, pour la première fois à ma connaissance selon une démarche strictement combinatoire, le fameux triangle arithmétique que les algébristes du centre de l'empire, comme al-Karajī avaient déjà construit par une méthode algébrique, en vue de déterminer les coefficients du binôme.

L'étude se poursuit par l'établissement, selon des démarches combinatoires reposant sur l'induction, des formules relatives aux permutations, avec ou sans répétitions, d'un ensemble de lettres et celles donnant, par récurrence, le nombre de lectures possibles d'un même mot de n lettres, compte tenu de tous les signes (voyelles et sukuns pour l'arabe), utilisés par une langue donnée. C'est le contenu des problèmes II, III et IV.

L'auteur conclut cette première partie en établissant, dans le problème V, une formule des arrangements, sans répétition, de n objets p à p , qui tient compte des signes accompagnant les lettres.

La seconde partie, beaucoup plus longue, vise à dénombrer les combinaisons avec répétitions, en adoptant une démarche analogue à la précédente et qui nécessite le recours à des tableaux de nombres. C'est d'ailleurs cette même démarche que suivra Mersenne, en France au XVII^e siècle.

La troisième partie de la onzième section renferme, en plus de quelques applications, une série de tableaux qui permettent de déterminer, de proche en proche, tous les éléments (P_n , A_n^p , C_n^p , ...) qui interviennent dans le dénombrement des mots qu'il est possible de prononcer, dans une langue donnée.

Dans la deuxième moitié du XIII^e siècle ou au début du XIV^e siècle, un autre mathématicien maghrébin, Ibn al-Bannā', reprendra une partie des résultats d'Ibn Mun^cim, dans au moins deux de ses ouvrages : Le Raf^cal-Hijāb et le Tanbīh al-Albāb. Dans ce dernier, il

ne signale qu'un tableau des combinaisons d'Ibn Mun^cim sans donner de références exactes mais, élément nouveau, il revendique explicitement la démonstration du résultat longtemps attribué à Pascal et qui donne C_n^p en fonction de C_n^{p-1} , permettant ainsi de calculer les combinaisons de n objets p à p , sans récurrence et sans avoir à construire, au préalable, le tableau dressé par Ibn Mun^cim. Dans le même esprit, il déduira l'expression des arrangements sans répétition après avoir calculé les permutations.

A partir de là, on décèle dans les écrits maghrébains deux progrès remarquables : En premier lieu, l'extension du champ d'application de ce formulaire et du raisonnement combinatoire, champ qui ne concerne plus les seuls éléments d'un alphabet puisque ces derniers deviennent un modèle abstrait opérant dans différents domaines mathématiques : En astronomie, par la reformulation et le dénombrement des rapports composés intervenant en trigonométrie sphérique, en géométrie, par la classification des figures et le dénombrement des équations possibles à partir des diverses partitions des ensembles d'éléments de ces figures, en algèbre enfin avec les dénombrements de systèmes d'équations (chez Ibn Haydūr) et d'équations polynomiales de degré supérieur à trois (chez Ibn al-Majdī, dans son commentaire du Talkhis d'Ibn al-Bannā').

Il faut noter à ce sujet qu'à chaque fois que des objets mathématiques sont concernés, les dénombrements effectués accompagnent, en les justifiant, des progrès dans les méthodes de résolution ou dans les algorithmes de calcul.

En second lieu, on assiste à une prise en compte des problèmes de dénombrement en général, dans des domaines très variés et pas toujours mathématiques. Le cas le plus typique étant celui d'Ibn al-Bannā' qui consacra une partie de son Tanbīh al-Albāb à des problèmes de ce type : Enumération des différents cas d'héritage possibles lorsque les héritiers sont n garçons et p filles, énoncé de toutes les situations où l'ablution, avec l'eau est obligatoire et celle où elle est permise par le tayammum, le dénombrement selon

les exigences du rite malékite des prières à effectuer, pour compenser l'oubli de certaines d'entre elles, enfin le dénombrement des 272.160 lectures possibles d'une même phrase selon les règles de la grammaire arabe.

La présence, chez ces différents auteurs, d'un même vocabulaire combinatoire et le fait qu'aucun d'eux n'ait revendiqué explicitement ces résultats, renforcent le caractère de continuité des préoccupations combinatoires depuis Ibn Mun^Cim au moins, continuité rendue possible grâce, en particulier, à la persistance dans le programme d'enseignement, du moins chez les grands professeurs de l'époque, d'un chapitre inauguré peut-être par Ibn Mun^Cim.

Mais si, à nos yeux, une matière et des instruments nouveaux semblent objectivement se constituer, nous ignorons le degré de conscience qu'en avaient ceux qui ont contribué à sa formation et l'importance qu'il avait à leurs yeux. En tout cas, cela n'est pas allé jusqu'à donner un nom à cette activité et à la distinguer des opérations classiques sur les entiers et ce, malgré l'utilisation de ses résultats dans d'autres parties des mathématiques. Les causes sont à chercher dans plusieurs directions à la fois : Etat de la société elle-même et nature de ses activités et de ses préoccupations qui n'auraient pas permis un développement quantitatif de la combinatoire, absence d'institutions locales ou régionales chargées de renouveler les programmes et d'imposer, puis de perpétuer l'enseignement de notions nouvelles et, pourquoi pas, empreinte de certains spécialistes dont l'autorité pouvait à tel ou tel moment influencer sur le contenu d'un enseignement scientifique, en le figeant ou en l'allégeant de certains développements théoriques et de certains chapitres, comme semble l'avoir fait Ibn al-Bannā' dont les arguments révèlent, en fait, la prise en compte par cet auteur, d'une réalité sociale bien précise qui poussait fortement à la consommation d'une mathématique plus appliquée, dirait-on aujourd'hui.

A cela, il faudrait peut-être ajouter le rôle de l'environnement idéologique et politique, incontestable dans certains domaines comme la philosophie ou la grammaire, mais plus difficile à cerner lorsqu'il s'agit d'en suivre les effets éventuels sur l'évolution de la production et de l'enseignement mathématiques ou sur le destin des hommes qui ont oeuvré pour cette science .