EMILE LE PAGE

Répartition d'état d'un opérateur de Schrödinger aléatoire Distribution empirique des valeurs propres d'une matrice de Jacobi

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-60

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982__1_A8_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REPARTITION D'ETAT
D'UN OPERATEUR DE SCHRÖEDINGER ALEATOIRE

DISTRIBUTION EMPIRIQUE DES VALEURS PROPRES
D'UNE MATRICE DE JACOBI

Emile LE PAGE

I - INTRODUCTION

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi μ à support compact définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Considérons l'opérateur aux différences aléatoires défini sur

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{u = (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} / \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2 < +\infty\}$$

$$(H(\omega) u)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + x_n(\omega) u_n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

L'opérateur $H(\omega)$ est auto-adjoint. Notons E_t^ω la résolution de l'identité de $H(\omega)$.

D'autre part, pour tout entier $L \geq 0$, soit $J_L(\omega)$ l'opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par la restriction de la matrice de $H(\omega)$ à $[-L, L]$ c'est-à-dire par la matrice de Jacobi :

$$J_L(\omega) = \begin{pmatrix} x_{-L} & -1 & & & (0) \\ & -1 & & & \\ & & x_{-L+1} & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & -1 & x_L \end{pmatrix}$$

Notons alors $N_L^{(\omega)}$ la fonction de répartition de la distribution empirique des valeurs propres $(\lambda_i^L(\omega))_{-L \leq i \leq L}$ de la matrice $J_L(\omega)$:

$$N_L^{(\omega)}(t) = \frac{1}{2L+1} \sum_{i=-L}^L 1[\lambda_i^L(\omega) \leq t]$$

On peut alors énoncer en notant $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la base économique de $\ell^2(\mathbb{Z})$, et $\langle u, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \bar{v}_n$ où $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ le

théorème (1-1)

1) Il existe un ensemble $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(\Omega_0) = 1$ et tel que pour tout $\Omega \in \Omega_0$ on ait :

$$\lim_L \sup_{t \in \mathbb{R}} |N_L^{(\omega)}(t) - N(t)| = 0$$

où $N(t) = E \langle E_t e_0, e_0 \rangle$, est continue.

2) Le spectre de presque tout opérateur $H(\omega)$ est égal au support de la probabilité de fonction de répartition $N(t) = E \langle E_t e_0, e_0 \rangle$ et ce support est $[-2, 2] + \text{support de } \mu$.

La fonction de répartition $N(t)$ figurant dans l'énoncé précédent est appelée répartition d'état de l'opérateur H .

Les résultats figurant dans le théorème (1-1) sont contenus dans [15] et [7].

Soit J un intervalle compact de $\mathbb{R}$ tel que $[-2, 2] + \text{support } \mu \subset J$.

Considérons la suite de processus $Y_L(t) = \sqrt{2L+1} [N_L(t) - N(t)]$ $L \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $L \geq 1$, $t \notin J$ on a $Y_L(t) = 0$.

L'objet du présent travail est de préciser la convergence figurant au 1) du théorème (1-1), en étudiant la suite de processus $Y_L(t)$ $L \geq 1$ $t \in J$ à valeurs dans l'espace $\mathcal{D}(J)$ des fonctions de J dans $\mathbb{R}$ continues à

droite et possédant une limite à gauche, muni de la topologie de skorokhod [2] ?

Cette étude est menée au paragraphe 1, sous l'hypothèse supplémentaire que μ admette une densité continue : on établit la convergence en loi de la suite de processus $(Y_L)_{L \geq 1}$ vers un processus gaussien Y , presque sûrement à trajectoire continue. Notons que le résultat obtenu est analogue au théorème classique concernant la distribution empirique de variables aléatoires réelles indépendantes, qui correspond à l'étude de la distribution empirique d'une matrice diagonale.

La méthode utilisée pour établir le résultat précédent nécessite l'étude de certains produits de matrices aléatoires indépendantes 2×2 de déterminant un dépendant d'un paramètre, et de chaînes de Markov définies à partir de ces produits. Les techniques mises en place à cette occasion nous permettront de prouver la formule de Thouless [6] au paragraphe 2.

L'étude de la suite de processus $(Y_L)_{L \geq 0}$ a été abordée dans [15].

Paragraphe 2 - DISTRIBUTION EMPIRIQUE DES VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE de Jacobi :

2-1 Avec les notations définies au paragraphe 1, et en appelant de plus S_μ le support de μ nous pouvons énoncer le :

Théorème (2-1) : Si μ admet une densité continue p à support compact :

La suite de processus $(Y_L)_{L \geq 0}$ converge en loi dans $\mathcal{D}(J)$ vers un processus gaussien centré Y .

De plus si $t_1 < t_2 < \dots < t_k \in]-2, 2[+ S_\mu$

la matrice de covariance de $(Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_k))$ est positive non dégénérée.

Enfin pour tout $\gamma < 1/2$ on a :
$$p \leq \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\gamma} \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ t, s \in J}} |Y(t) - Y(s)| = 0$$

et en particulier Y est presque sûrement à trajectoires continues.

2-2) Démonstration du théorème (2-1) :

Il est clair que l'étude des distributions empiriques des valeurs propres des matrices $J_L(\omega)$ $L \geq 1$ est équivalente à l'étude des distributions empiriques des matrices

$$J_{L+1}(\omega) = \begin{pmatrix} X_0(\omega) & -1 & & (0) \\ -1 & X_1(\omega) & & -1 \\ & & \ddots & \\ (0) & & -1 & X_L(\omega) \end{pmatrix} \quad L \geq 0$$

Nous nous placerons désormais dans ce cadre, les notations adoptées précédemment étant modifiées de façon convenable par l'adjonction d'un tilde.

Soit $p_{L+1}(t)$ le polynome caractéristique de J_{L+1}

on a la relation :

$$p_{L+1}(t) = (X_L - t) p_L(t) - p_{L-1}(t) \quad L \geq 0$$

$$\text{avec } p_{-1}(t) = 0 \quad p_0(t) = 1$$

c'est-à-dire que pour tout $L \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} p_{L+1}(t) \\ p_L(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_L^t & g_{L-1}^t & \cdots & g_0^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } g_k^t = \begin{pmatrix} X_k - t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 \leq k \leq L.$$

Les valeurs propres de J_{L+1} sont les zéros de $p_{L+1}(t)$. De plus nous pouvons énoncer la proposition suivante dont la justification figure dans [1].

Proposition (2-1) :

- a) $p_{L+1}(t)$ possède $(L+1)$ zéros réels deux à deux distincts $t_0 < t_1 < \dots < t_L$.
- b) Le nombre de changements de signes de la suite $\{p_0(t), p_1(t), \dots, p_{L+1}(t)\}$ est égal à 0 si $t < t_0$, $r+1$ si $t_r < t < t_{r+1}$ $0 \leq r \leq L$, et à $(L+1)$ si $t > t_L$.

Si l'on note $P(\mathbb{R}^2)$ l'espace projectif de $\mathbb{R}^2$,

$$I = \{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^2) \mid x = (\cos \theta, \sin \theta) - \frac{\pi}{2} < \theta \leq 0\}$$

et $\bar{x}_0$ l'image dans $P(\mathbb{R}^2)$ du vecteur $x_0 = (1, 0)$. On en déduit le :

corollaire (2-1) :

1) $\forall t \in \mathbb{R}$

$$|\tilde{N}_L(t) - \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L l_I(g_k^t g_{k-1}^t g_0^t \bar{x}_0)| \leq \frac{1}{L+1}$$

2) Dans le cas où la loi de μ est diffuse, on a de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \text{ps} \quad \tilde{N}_L(t) = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L l_I(g_k^t \dots g_0^t \bar{x}_0)$$

où $g_0 \bar{x}$ désigne l'action de la matrice g de $SL(2, \mathbb{R})$ sur l'élément $\bar{x}$ de $P(\mathbb{R}^2)$.

L'assertion 2 du corollaire (2-1) est une conséquence immédiate de la proposition (2-1), et l'assertion 2 résulte du fait que si la loi de μ est diffuse, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ $P(p_k(t)=0) = 0$

Remarquons que les énoncés précédents sont analogues au théorème d'oscillation de Sturm dans la théorie des équations différentielles du second ordre.

Le corollaire 1 permet de ramener l'étude du comportement asymptotique de $\tilde{N}_L(t), L \geq 1$ à celui d'une fonctionnelle additive des états d'une chaîne de Markov.

Nous allons scinder la preuve du théorème (2-1) en deux parties :

- I) On commence par étudier pour un nombre fini de réels $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ le comportement en loi de la suite de vecteurs aléatoires $(\tilde{Y}_n(t_1), \tilde{Y}_n(t_2), \dots, \tilde{Y}_n(t_k))$, où $\tilde{Y}_n(t) = \sqrt{n+1} [\hat{N}_n(t) - N(t)]$ $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$.
- II) On établit la relative compacité faible des lois de la suite de processus $\tilde{Y}_n(t)$ $t \in J$, $n \geq 1$, à valeurs dans $\mathcal{D}(J)$ muni de la métrique de Skorokhod [2].

2-2-1) PREMIERE PARTIE :

On étudie pour $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ le comportement en loi de la suite de vecteurs aléatoires $(\tilde{Y}_n(t_1), \tilde{Y}_n(t_2), \dots, \tilde{Y}_n(t_k))$ qui en raison du corollaire (2-1) est le même que celui du vecteur aléatoire.

$$\left(\sum_{j=0}^n \frac{1_I(g_j^{t_1} g_{j-1}^{t_1} \dots g_1^{t_1} \cdot x_0) - (n+1) N(t_1)}{\sqrt{n+1}} \right)_{1 \leq i \leq k}$$

Pour cela considérons la chaîne de Markov $(\tilde{x}_j^t)_{j \geq 0}$, à valeurs dans $X^k = [P(\mathbb{R}^2)]^k$ de probabilité de transition définie de la façon suivante :

si $\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ et $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$

$$\begin{aligned} P_{\underline{t}} f(\bar{x}) &= \int f(g_1^{t_1}(\omega) \cdot x_1, g_1^{t_2}(\omega) \cdot x_2, \dots, g_1^{t_k}(\omega) \cdot x_k) dP(\omega) \\ &= \int f(g \cdot \bar{x}) d\mu_{\underline{t}}(g) \end{aligned}$$

où $\mu_{\underline{t}}$ désigne la loi du vecteur aléatoire $(g_{t_1}(\omega), g_{t_2}(\omega), \dots, g_{t_k}(\omega)) \in [SL(2, \mathbb{R})]^k$ et f une fonction borélienne bornée sur X^k .

Nous noterons $P_{x, \underline{t}}$ $x \in X$, (resp. $P_{\nu, \underline{t}}$ où ν est une probabilité sur X) la loi sur X^N des trajectoires de $(X_j^{\underline{t}} \quad j \geq 0)$ issues de x (resp. de loi de départ ν).

Soit $\mathcal{C}(X^k)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur X^k muni de la norme de la convergence uniforme sur X^k $|f| = \sup_{x \in X^k} |f(x)|$
 $P_{\underline{t}}$ opère sur $\mathcal{C}(X^k)$ et possède les propriétés suivantes :

Proposition (2-2) Si μ admet une densité, l'opérateur $P_{\underline{t}}$ est quasi compact sur $\mathcal{C}(X^k)$ et l'on a :

$$\forall n \geq 1 \quad \forall f \in \mathcal{C}(X^k)$$

$$P_{\underline{t}}^n f = \nu_{\underline{t}}(f) + Q_{\underline{t}}^n(f)$$

où $\nu_{\underline{t}}$ est l'unique probabilité $P_{\underline{t}}$ invariante portée par X^k et $Q_{\underline{t}}$ est un opérateur de rayon spectral strictement inférieur à 1 et tel que

$$\nu_{\underline{t}} Q_{\underline{t}} = 0$$

Démonstration de la proposition (2-2) :

Commençons par énoncer des résultats utiles pour cette preuve :

a)

Proposition (2-3) Si μ admet une densité, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que la probabilité $\mu_{\underline{t}}^{n_0}$ obtenue en convolant n_0 fois $\mu_{\underline{t}}$ dans le groupe $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ possède une densité dans $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ qui sera justifiée à la fin du paragraphe (2-2-1).

b)

Proposition (2-4) Si μ charge au moins 2 points ; $\mu_{\underline{t}}$ admet une unique probabilité invariante $\nu_{\underline{t}}$ sur X^k et l'on a

$$\forall f \in \mathcal{C}(X^k) \quad \sup_{x \in X^k} |P_{\underline{t}}^n f(x) - \nu_{\underline{t}}(f)| = 0$$

Démonstration de la proposition (2-4) :

Pour $1 \leq j \leq k$ notons μ_{t_j} la loi de la matrice aléatoire $g_{t_j}(\omega) \in SL(2, \mathbb{R})$. Si μ charge au moins deux points, le sous-groupe fermé H_j de $SL(2, \mathbb{R})$ engendré par le support de μ_j est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action irréductible sur $\mathbb{R}^2$ [13]. Munissons $\mathbb{R}^2$ de la structure euclidienne définie par la norme $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ où $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, et définissons la distance d sur $P(\mathbb{R}^2)$ par

$$d(x, y) = |\sin \theta(\tilde{x}, \tilde{y})|$$

où $\tilde{x}, \tilde{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de norme 1, d'image x, y dans $P(\mathbb{R}^2)$, et $\theta(\tilde{x}, \tilde{y})$ est l'angle de ces deux vecteurs.

On a alors : [9]

$$\forall 1 \leq j \leq k \quad \lim_n \sup_{x, y \in P(\mathbb{R}^2)} \int d(g.x, g.y) \mu_{t_j}^n(dg) = 0$$

Par conséquent si maintenant d_k est la distance sur X^k définie par

$$d_k(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^k d(x_i, y_i) \quad \text{où } \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k \\ \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k) \in X^k$$

il en résulte que

$$\lim_n \delta_n = \lim_n \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in X^k} \int d_k(g.\bar{x}, g.\bar{y}) \mu_t^n(dg) = 0$$

Pour toute fonction f Lipschitzienne sur X^k et toute suite $(\bar{x}_n)_{n \geq 1}$ de X^k on a : $\forall n, m \geq 1$

$$|p_{\underline{t}}^{n+m} f(\bar{x}_{n+m}) - p_{\underline{t}}^n f(\bar{x}_n)| \leq 2 \delta_n$$

Il en résulte que pour toute fonction f Lipschitzienne, la suite de fonctions $(p_{\underline{t}}^n f)_{n \geq 1}$, converge uniformément vers une constante $I(f)$ sur X^k . Par densité, le résultat reste vrai pour toute fonction f de $\mathcal{C}(X^k)$. Clairement la fonctionnelle $f \rightarrow I(f)$ de (X^k) dans $\mathbb{R}$ définit l'unique probabilité $P_{\underline{t}}$ invariante portée par X^k ; d'où la proposition (2-4).

c)

X^k est un espace homogène compact de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$; comme $\mu_{\underline{t}}^{\text{no}}$ admet une densité dans $[SL(2, \mathbb{R})]^k$, il en résulte que l'opérateur $p_{\underline{t}}^{\text{no}}$ est un opérateur compact sur (X^k) [17]; par conséquent, $P_{\underline{t}}$ est une contraction, quasi-compacte sur $\mathcal{C}(X^k)$. Les seules valeurs spectrales de $P_{\underline{t}}$ de module 1 sont alors des pôles simples. Le résultat de la proposition (2-4) montre que 1 est la seule valeur spectrale de module 1. Les autres valeurs spectrales de $P_{\underline{t}}$ ayant toutes un module - majoré par un nombre strictement inférieur à 1, on en déduit la proposition (2-2). La chaîne de Markov définie par $P_{\underline{t}}$ satisfait donc à la condition de Doeblin.

Adoptons maintenant les notations : pour $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$

$$\lambda' = (\lambda'_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathbb{R}^k \quad \langle \lambda, \lambda' \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i \lambda'_i$$

et pour $\bar{x} \in X^k$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ $F_I(\bar{x}) = (I(x_1), I(x_2), \dots, I(x_k))$

et considérons alors l'opérateur $p_{\underline{t}}^{\text{no}}(\lambda)$ défini par

$$p_{\underline{t}}^{\text{no}}(\lambda) f(\bar{x}) = \int e^{i \langle \lambda, F_I(g\bar{x}) \rangle} f(g\bar{x}) p_{\underline{t}}^{\text{no}}(dg) \quad \text{où } f \in \mathcal{C}(X^k), \lambda \in \mathbb{R}^k$$

$p_{\underline{t}}^{\text{no}}$ opère sur $\mathcal{C}(X^k)$ car p^{no} a une densité dans $[SL(2, \mathbb{R})]^k$.

Par ailleurs $P_{\underline{t}}^{no}(X)$ est un opérateur qui est obtenu par perturbation analytique de l'opérateur $P_{\underline{t}}^{no}(o) = P_{\underline{t}}^{no}$. Si l'on désigne par $r(L)$ le rayon spectral d'un opérateur L sur $\mathcal{C}(X^k)$, on peut alors en tenant compte de la proposition (2-2) et des résultats de la théorie des perturbations analytiques d'opérateurs [3], [10] conclure que : il existe un voisinage V de o dans $\mathbb{R}^k$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(X^k) \quad \forall \lambda \in V \quad \forall p \geq 1$$

$$(1) \quad [P_{\underline{t}}^{no}(\lambda)]^p f = \tilde{k}_{\underline{t}}^p(\lambda) \tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda) f + \tilde{Q}_{\underline{t}}^p(\lambda) f$$

où $\tilde{k}_{\underline{t}}(\lambda)$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $P_{\underline{t}}^{no}(\lambda)$ et vérifie $|\tilde{k}_{\underline{t}}(\lambda)| > \frac{2+r(Q^{no})}{3}$

$\tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda)$ est la projection sur le sous-espace propre de dimension 1 correspondant à $\tilde{k}_{\underline{t}}(\lambda)$

$\tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda)$ est un opérateur de $\mathcal{C}(X^k)$ de rayon spectral $r(\tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda)) \leq \frac{1+r(Q^{no})}{3}$ vérifiant $\tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda) \tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda) = 0$.

De plus les applications $\lambda \rightarrow \tilde{k}_{\underline{t}}(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \tilde{N}_{\underline{t}}(\lambda)$, $\lambda \rightarrow \tilde{Q}_{\underline{t}}(\lambda)$ sont analytiques.

La décomposition précédente va nous permettre de justifier la

Proposition (2-5) :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X^k$ on a :

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{ps} \lim_n \left(\frac{1}{n} \sum_{p=1}^n 1_I(g_p^{t_j} g_{p-1}^{t_j} \dots g_1^{t_j} x_j) \right) &= (v_{t_j}(I)) = (N(t_j)) \\ &= \left(\frac{1}{n_o} \left[\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \lambda_j} [k_{\underline{t}}](o) \right] \right)_{1 \leq j \leq k} \end{aligned}$$

2) Le vecteur aléatoire $(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^n 1_I(g_p^{t_j} g_{p-1}^{t_j} \dots g_1^{t_j} x_j) - n N(t_j))_{1 \leq j \leq k}$

converge en loi vers une loi de Gauss $Y_{\underline{t}}$ centrée portée par $\mathbb{R}^k$
et de matrice de covariance $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$

définie par : $1 \leq i,j \leq k$

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{n_{02}} \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} [k_{\underline{t}}](0) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} [k_{\underline{t}}](0) \frac{\partial [k_{\underline{t}}]}{\partial \lambda_j} (0) \right\}$$

$$= \int_{X^2} [f_i f_j - P_{t_i} f_i P_{t_j} f_j] dv_{t_i, t_j}$$

$$\text{où } f_i = \sum_{n=0}^{\infty} P_{t_i}^n (1_I - v_{t_i}(I)) = (I - P_{t_i})^{-1} (1_I - v_{t_i}(I))$$

Démonstration de la proposition (2-5).

L'existence des limites précédentes se déduisent de résultats connus [10] concernant le comportement asymptotique des fonctionnelles additives d'états de chaînes de Markov satisfaisant à la condition de Doeblin. Par ailleurs l'expression de ces limites à l'aide de dérivées de $k_{\underline{t}}(\lambda)$ s'obtient en passant à la limite selon la sous-suite $(n_{n \geq 1})$ et en utilisant la décomposition (1) : (voir [10] et [17] pour une étude détaillée).

Nous achèverons la première partie en prouvant la

proposition (2-6) :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) pour tous $t_1 < t_2 < \dots < t_k \in]-2, 2[+ S\mu$
 $Y_{\underline{t}}$ est non dégénérée.

Démonstration de la proposition (2-6) :

Elle repose sur plusieurs lemmes.

1) lemme (2-1) :

Sous les hypothèses du théorème (2-1), si $t_1 < t_2 < \dots < t_k \in]-2, 2[+ S_\mu$ le support de $v_{\underline{t}}$ est égal à X^k .

dont nous donnerons la preuve à la fin du paragraphe 2-2-1.

2) lemme (2-2) :

sous les hypothèses du théorème (2-1), si $t_1 < t_2 < \dots < t_k \in]-2, 2[+ S_\mu$ il existe une boule B centrée en 0 dans $\mathbb{R}^k$ telle que pour $\lambda \in B - \{0\}$ on ait $|k_{\underline{t}}(\lambda)| < 1$.

Démonstration du lemme (2-2) :

Pour tout $\lambda \in V$, il existe une fonction $\phi_\lambda \in \mathcal{C}(X^k)$ telle que pour tout $n \geq 1$:

$$(2) \quad [p_{\underline{t}}^{no}(\lambda)]^n \phi_\lambda = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n \phi_\lambda \quad \phi_\lambda \neq 0.$$

Supposons que $\lambda \neq 0$ et $|k_{\underline{t}}(\lambda)| = 1$; il résulte alors de (2) que pour tout $n \geq 1$

$$p_{\underline{t}}^{n, no} |\phi_\lambda| \geq |\phi_\lambda|$$

d'où l'on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$, que :

$$(3) \quad v_{\underline{t}} |\phi_\lambda| \geq |\phi_\lambda|$$

De (3) il résulte puisque $|\phi_\lambda| \in \mathcal{C}(X^k)$ et que $\text{supp } v_{\underline{t}} = X^k$ d'après le lemme (2-1) que :

$$(4) \quad \forall x \in X^k \quad |\phi_\lambda(\bar{x})| = \sup_{\bar{y} \in X^k} |\phi_\lambda(\bar{y})| > 0$$

en tenant compte de (2) et (4) on a :

$$\forall \bar{x} \in X^k, \quad \forall n \geq 1 \quad \forall g \in \sup_{\underline{t}} \mu_{\underline{t}}^{n, no}$$

$$e^{i \langle \lambda, F_I(g, \bar{x}) \rangle} \phi_\lambda(g \bar{x}) = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n \phi_\lambda(\bar{x})$$

soit

$$(5) \quad \frac{\phi_{\lambda}(g\bar{x})}{\phi_{\lambda}(x)} = [k_{\underline{t}}(\lambda)]^n e^{-i\langle \lambda, F_{\underline{t}}(g\bar{x}) \rangle}$$

En utilisant le fait que le premier membre de (5) est un cocycle multiplicatif sur $[SL(2, \mathbb{R})]^k \times X^k$, on voit que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall \bar{x} \in X^k, \quad \forall g \in \text{supp } p_{\underline{t}}^{n \text{ no}}$$

$$e^{i\langle \lambda, F_{\underline{t}}(g\bar{x}) \rangle} = 1$$

ce qui dès que $\|\lambda\| < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ entraîne que $\langle \lambda, F_{\underline{t}}(g\bar{x}) \rangle = 0$
 c'est-à-dire que $\forall \bar{x} \in X^k \quad \langle \lambda, F_{\underline{t}}(\bar{x}) \rangle = 0$,
 ce qui est impossible si $\lambda \neq 0$, d'où le lemme (2-2).

3) Lemme (2-3) :

Si $\lambda \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ et si $\sum \lambda = 0$ il existe une mesure de probabilité $\theta_{\lambda}^{\underline{t}}$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour toute fonction ϕ continue bornée sur $\mathbb{R}$ on ait :

$$\lim_n E_{\nu_{\underline{t}}} [\phi(S_{\underline{t}}^{\underline{t}}(\lambda))] = \theta_{\lambda}^{\underline{t}} * \theta_{\lambda}^{\underline{t}}(\phi)$$

$$\text{où } S_{\underline{t}}^{\underline{t}}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \{ \langle \lambda, F_{\underline{t}}(\tilde{X}_j^{\underline{t}}) \rangle - \int \langle \lambda, F_{\underline{t}}(\bar{x}) \rangle \nu_{\underline{t}}(d\bar{x}) \}$$

et $\theta_{\lambda}^{\underline{t}}$ est la probabilité symétrique de $\theta_{\lambda}^{\underline{t}}$

Démonstration du lemme (2-3) :

$$\text{Posons } F_{\lambda} = \langle \lambda, F_{\underline{t}} \rangle - \int \langle \lambda, F_{\underline{t}}(\bar{x}) \rangle \nu_{\underline{t}}(d\bar{x}) ;$$

comme $\nu_{\underline{t}}(F_{\lambda}) = 0$ et en raison du fait que $P_{\underline{t}}$ satisfait à la condition de Doeblin, nous pouvons également définir :

$$h_{\lambda} = \sum_{n \geq 0} P_{\underline{t}}^n(F_{\lambda}) = (I - P_{\underline{t}})^{-1}(F_{\lambda})$$

On a alors :

$$\sigma_{\lambda}^2 = {}^t\lambda \Sigma \lambda = \int \{P_{\underline{t}}(h_{\lambda})^2(\bar{x}) - [P_{\underline{t}} h_{\lambda}(\bar{x})]^2\} \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})$$

D'autre part on a : pour tout $\bar{x} \in X^k$ et tout $j \geq 0$:

$$E_{\bar{x}} [h_{\lambda}(\hat{x}_{j+1}) - P_{\underline{t}} h_{\lambda}(\hat{x}_j)]^2 = P_{\underline{t}}^j [P_{\underline{t}} h_{\lambda}^2 - (P_{\underline{t}} h_{\lambda})^2](\bar{x})$$

Par conséquent si $\sigma_{\lambda}^2 = 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $j \geq 0$:

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} [h_{\lambda}(\hat{x}_{j+1}) - P_{\underline{t}} h_{\lambda}(\hat{x}_j)]^2 \leq K \rho^j$$

c'est-à-dire que pour tout $j \geq 0$

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} [h_{\lambda}(\hat{x}_{j+1}) - h_{\lambda}(\hat{x}_j) + F_{\lambda}(\hat{x}_j)]^2 \leq K \rho^j.$$

d'où l'on déduit à l'aide de l'inégalité de Schwarz que pour tout $j \geq 0$

$$(6) \quad \sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} |h(\hat{X}_{j+1}) - h_{\lambda}(\hat{X}_j) + F_{\lambda}(\hat{X}_j)| \leq \sqrt{K} \rho^{j/2}$$

$$\text{Posons alors } T_{n,n} = \sum_{j=n}^{2n-1} F_{\lambda}(\hat{X}_j)$$

De (6) il résulte que :

$$\sup_{\bar{x} \in X^k} E_{\bar{x}} |T_{n,n} + [h_{\lambda}(\hat{X}_{2n+1}) - h_{\lambda}(\hat{X}_n)]| \leq \sqrt{K} \sum_{j=n}^{2n} \rho^{j/2}$$

On en déduit que la suite de variables aléatoires $(T_{n,n} - [h_{\lambda}(\hat{X}_n) - h_{\lambda}(\hat{X}_{2n})])$ $n \geq 0$ converge vers 0 en $P_{\nu_{\underline{t}}}$ probabilité quand n tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, $\forall k, m \in \mathbb{N}$ on a

$$\int h_{\lambda}^k(\hat{X}_{2n}(\omega)) h_{\lambda}^m(\hat{X}_n(\omega)) P_{\nu_{\underline{t}}}(\omega) = \int P_{\underline{t}}^n(h_{\lambda}^k)(\bar{x}) h_{\lambda}^m(\bar{x}) \nu_{\underline{t}}(d\bar{x})$$

d'où $\forall k, m \in \mathbb{N}$.

$$\lim_n \int h_\lambda^k(\tilde{X}_{2n+1}(\omega)) h_\lambda^m(\tilde{X}_n(\omega)) dP_{v_t}(\omega) = v_t(h_\lambda^k) v_t(h_\lambda^m).$$

La fonction h_λ étant bornée, il existe sur $\mathbb{R}$ une unique probabilité θ_λ^t telle que pour tout $k \geq 0$ $\int x^k \theta_\lambda^t(dx) = v_t(h_\lambda^k)$ et la suite des lois par rapport à P_{v_t} de la suite des variables aléatoires

$$(h_\lambda(\tilde{X}_n) - h_\lambda(\tilde{X}_{2n})) \quad n \geq 1 \quad \text{converge vers} \quad \theta_\lambda^t * \overset{v}{\theta}_\lambda^t.$$

L'assertion du lemme (2-5) résulte immédiatement de ce qui précède car les variables aléatoires $T_{n,n}$ et $S_n^t(\lambda)$ ont même loi par rapport à P_{v_t} .

4) Terminons maintenant la démonstration de la proposition (2-6).

Soit ψ la fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ définie par $\psi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

elle a pour transformée de Fourier

$$\hat{\psi}(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \psi(x) dx = \begin{cases} 1 - |u| & \text{si } |u| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$E_{v_t}(\psi(S_{n n_0}^t(\lambda))) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{X^k} (1 - |u|) e^{-iun n_0 v_t(\langle \lambda, F_I \rangle)} (P_{v_t}^{n_0}(\lambda u))^n e(\bar{x}) du dv_t(\bar{x})$$

où e est la fonction identique à 1 sur X^k .

Si $\lambda \in B - \{0\}$ et si $u \in [-1, 1] - \{0\}$, on a en raison du lemme (2-2) et de (1) :

$$\forall \bar{x} \in X^k \quad \lim_n [P_{v_t}^{n_0}(\lambda u)]^n e(\bar{x}) = 0.$$

En utilisant le théorème de Lebesgue, on peut alors conclure que si $\lambda \in B - \{0\}$

$$\lim_n E_{v_t}(\psi(S_{n n_0}^t(\lambda))) = 0.$$

Comme pour toute probabilité θ sur $\mathbb{R}$, on a $\theta * \check{\theta}(\psi) > 0$, le lemme (2-3) montre alors que si $\lambda \in B - \{0\}$

$${}^t\lambda \Sigma \lambda \neq 0$$

ce qui établit la proposition (2-6).

Les conclusions des propositions (2-5) et (2-6) justifient toutes les assertions contenues dans (2-1) concernant le comportement en loi du vecteur aléatoire $(Y_n(t_1), Y_n(t_2), \dots, Y_n(t_k))_{n \geq 1}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ où $t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

Il nous reste cependant à donner les démonstrations de la proposition (2-3), et du lemme (2-1).

Démonstration de la proposition (2-3)

Elle repose sur les lemmes suivants :

1) lemme (2-4) :

Si μ admet une densité, le sous groupe fermé $G_{\underline{t}}$ de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ engendré par le support de $\mu_{\underline{t}}$ est égal à $[SL(2, \mathbb{R})]^k$

Démonstration du lemme (2-4) :

On raisonne par récurrence sur k .

a) Supposons que $k=1$;

pour $t \in \mathbb{R}$, $q \in \text{supp } \mu$ on a

$$g_t(q) = \begin{pmatrix} q-t & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \exp(q-t)x \quad g_0$$

$$\text{où } x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que si $q, q' \in \text{supp } \mu$

$$g_t^{-1}(q) g_t(q') = \exp(-q'+q)Y \in G_t$$

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } g_t(q) g_t^{-1}(q') = \exp(q-q')X \in G_t$$

Comme le support de $\mu * \bar{\mu}$ ($\bar{\mu}$ étant la probabilité symétrique de μ) contient un voisinage ouvert de 0, l'algèbre de Lie de G_t contient X et Y . Or X et Y engendrent l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ qui est connexe, par conséquent $G_t = SL(2, \mathbb{R})$.

b) Supposons le résultat du lemme (2-4) établi pour tout entier $1 \leq k \leq k_0$

Soient alors $t_1 < t_2, \dots, t_{k_0+1} \in \mathbb{R}^{k_0+1}$;

notons $\underline{t}^{(k_0+1)} = (t_1, t_2, \dots, t_{k_0+1})$ et pour $1 \leq p \leq k_0+1$

$$H_p = I_{p-1} \times SL(2, \mathbb{R}) \times I_{k_0+1-p} \cap G_{\underline{t}}^{(k_0+1)} \text{ où } I_k = (I, I, \dots, I) \text{ } I \text{ étant}$$

la matrice identité de $SL(2, \mathbb{R})$. H_p est un sous-groupe distingué de

$G_{\underline{t}}^{(k_0+1)}$ et en raison du a) également du groupe $I_{p-1} \times SL(2, \mathbb{R}) \times I_{k_0+1-p}$.

Or ce dernier groupe est semi simple, donc on a :

$$\text{soit : } H_p = I_{k_0+1}$$

$$\text{soit : } H_p = I_{p-1} \times SL(2, \mathbb{R}) \times I_{k_0+1-p}$$

Distinguons deux cas :

α) S'il existe un entier p_0 tel que $H_{p_0} = I_{p_0-1} \times SL(2, \mathbb{R}) \times I_{k_0+1-p_0}$,

on peut affirmer compte-tenu du fait que grâce à l'hypothèse de récurrence $G_{\underline{t}}^{(k_0+1)}$ se projette surjectivement sur le groupe

$$[SL(2, \mathbb{R})]^{p_0-1} \times I \times [SL(2, \mathbb{R})]^{k_0+1-p_0}$$

$$\text{que } G_{\underline{t}}^{(k_0+1)} = [SL(2, \mathbb{R})]^{k_0+1}$$

β) Si $\forall p, 1 \leq p \leq k_0+1$ H_p est l'identité de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$, alors compte-tenu de a), il existe des isomorphismes $(\chi_{t_1})_{2 \leq i \leq k_0+1}$ de $SL(2, \mathbb{R})$ sur lui-même tels que tout élément g de $G_{t_1(k_0+1)}$ s'écrive sous la forme :

$$(g_1, \chi_{t_2}(g_1), \chi_{t_3}(g_1), \dots, \chi_{t_{k_0+1}}(g_1)) \quad g_1 \in SL(2, \mathbb{R})$$

Montrons que ceci n'est pas possible, ce qui assurera que seule la situation α) se présente et achèvera la preuve du lemme (2-4).

Pour tout $q \in S_\mu$ on a nécessairement

$$(7) \quad \chi_{t_2}(g_{t_1}(q)) = \exp(t_1 - t_2) X g_{t_1}(q)$$

il en résulte que pour tous $q, q' \in S_\mu$ on a :

$$\chi_{t_2}(g_{t_1}(q) g_{t_1}^{-1}(q')) = \chi_{t_2}(\exp(q - q') X) = \exp(q - q') X$$

$$\chi_{t_2}(g_{t_1}^{-1}(q) q_{t_1}(q')) = \chi_{t_2}(\exp(q - q') Y) = \exp(q - q') Y$$

Le support de $\mu * \tilde{\mu}$ contient un voisinage ouvert de 0, par conséquent pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\chi_{t_2}(\exp h X) = \exp h X, \quad \chi_{t_2}(\exp h Y) = \exp h Y$$

d'où il résulte que pour tout $g \in SL(2, \mathbb{R})$ $\chi_{t_2}(g) = g$,

ce qui en contradiction avec (7) puisque $t_1 \neq t_2$.

2) Soit $\mathfrak{g}_k$ l'algèbre de Lie de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ et notons Ad l'action adjointe de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ sur $\mathfrak{g}_k$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_k$ est égale à la puissance k ème de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$.

Appelons $\tilde{X}$ l'élément $(X, X, \dots, X)$ de $\mathfrak{g}_k$.

Nous pouvons alors énoncer le

Lemme (2-5) :

Soit U une partie de $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ engendrant topologiquement $[SL(2, \mathbb{R})]^k$, il existe alors un entier n_0 et des éléments $g_1, g_2, \dots, g_{n_0}$ de U tels que le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_k$ engendré par les éléments $\{Ad(g_1 \cdot g_2 \cdot g_p)(\tilde{X}) \mid 1 \leq p \leq n_0\}$ soit égal à $\mathfrak{g}_k$.

Démonstration du lemme (2-5) :

Pour $n \geq 1$ et $\omega = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in U^n$ notons $H_n(\omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}_k$ engendré par les éléments $(Ad(g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_p)(\tilde{X}) \mid 1 \leq p \leq n)$.

On a pour tous $m, n \geq 1$ la relation :

$$(8) \quad H_{n+m}(\omega \omega') = H_n(\omega) + Ad(g_1 \cdot g_2, \dots, g_n)(H_m(\omega')) \quad \text{où } \omega' \in U^m.$$

Si $\omega_0 = (g_1, g_2, \dots, g_{n_0}) \in U^{n_0}$ est tel que la dimension de $H_{n_0}(\omega_0)$ soit maximum il résulte alors de la relation (8) que :

$Ad(g_1 \cdot g_2, \dots, g_{n_0})(H_{n_0}(\omega_0)) = H_{n_0}(\omega_0)$ en faisant $\omega = \omega' = \omega_0$; de plus en faisant $\omega = \omega_0$ on voit que $Ad(g_1 \cdot g_2, \dots, g_{n_0})(H_n(\omega')) \subset H_{n_0}(\omega_0)$

et donc d'après la remarque précédente on a $H_n(\omega') \subset H_{n_0}(\omega_0)$.

Par conséquent pour tout $g \in U$, on a $Ad(g)(H_{n_0}(\omega_0)) \subset H_{n_0}(\omega_0)$.

Comme U engendre $[SL(2, \mathbb{R})]^k$, $H_{n_0}(\omega_0)$ est un idéal de $\mathfrak{g}_k$; de plus $H_{n_0}(\omega_0)$ a une projection non réduite à 0 sur chacun des facteurs de $\mathfrak{g}_k$ et donc $H_{n_0}(\omega_0) = \mathfrak{g}_k$.

3) Terminons maintenant la démonstration de la proposition (2-3) :

Soit $q \mapsto g_{\underline{t}}(q)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ définie par

$$g_{\underline{t}}(q) = (g_{t_1}(q), g_{t_2}(q), \dots, g_{t_k}(q))$$

Pour tout $n \geq 1$ l'application M_n analytique de $\mathbb{R}^n$ dans $[SL(2, \mathbb{R})]^k$ définie par

$$M_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = g_{\underline{t}}(q_1) g_{\underline{t}}(q_2) \dots g_{\underline{t}}(q_n)$$

a en tout point $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$ un rang égal à la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les éléments

$$\{\text{Ad} [g_{\underline{t}}(q_1) g_{\underline{t}}(q_2) \dots g_{\underline{t}}(q_p)]^{-1} (\tilde{X}) \quad 1 \leq p \leq n\} \quad \text{de } \mathcal{G}_k.$$

En appliquant le lemme (2-5) à $U = [g_{\underline{t}}(S_\mu)]^{-1}$, ce qui est possible d'après le lemme (2-4), il existe un entier n_0 et des réels $q_1, q_2, \dots, q_{n_0} \in S_\mu$ tels que le rang de M_{n_0} au point $(q_1, q_2, \dots, q_{n_0}) \in S_\mu$ soit égal à la dimension de $\mathcal{G}_k$. L'ensemble des points où le rang de M_{n_0} est strictement inférieur est, puisque M_{n_0} est analytique, une réunion dénombrable de sous-variétés de $\mathbb{R}^{n_0}$ de dimension inférieure ou égale à $n_0 - 1$, et donc négligeable. On en déduit que si μ a une densité, il en est de même pour $\mu_{\underline{t}}^{n_0}$.

Donnons maintenant la :

Démonstration du lemme (2-1) :

Si x_0 est un point de support de $\nu_{\underline{t}}$, en raison du fait que $\nu_{\underline{t}}$ est l'unique probabilité invariante par $\mu_{\underline{t}}$, le support de $\nu_{\underline{t}}$ est égal à $\overline{T_{\mu_{\underline{t}}} \cdot x_0}$ où $T_{\mu_{\underline{t}}}$ est le semi-groupe fermé engendré par le support de $\mu_{\underline{t}}$. La démonstration du lemme (2-1) sera donc achevée si l'on prouve que pour tout élément x de X^k on a $\overline{T_{\mu_{\underline{t}}} \cdot x} = X^k$.

Justifions ce dernier résultat en raisonnant par récurrence sur k .

- 1) La propriété est vraie si $k=1$; en effet sous les hypothèses du lemme (2-1), il existe un élément q de S_μ tel que la matrice $g_{t_1}(q)$ soit elliptique et possède pour valeurs propres $e^{i2\pi\alpha}$ et $e^{-i2\pi\alpha}$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et l'on a alors $\overline{T_{\mu_{t_1}} \cdot x} \supset \overline{\{g_{t_1}^n(q) \cdot x \mid n \geq 0\}} = X$ d'où le résultat.

2) Supposons le résultat établi jusqu'à l'ordre k_0 , et montrons qu'il reste alors vrai à l'ordre $k = k_0 + 1$.

Soit $q_0 \in S_\mu - F$ où $F = \{q / 1 \leq i \leq k_0 + 1 ; |q - t_i| = 2\}$

et soient $T(q_0) = \{i ; 1 \leq i \leq k_0 + 1 \quad |q_0 - t_i| < 2\}$ et

$T'(q_0) = \{i ; 1 \leq i \leq k_0 + 1 \quad |q_0 - t_i| > 2\}$.

On peut supposer que $T(q_0) \neq \emptyset$ d'après les hypothèses du lemme ; on peut également admettre sans restriction que les matrices $g_{t_i}(q_0)$ $t_i \in T(q_0)$ possèdent les valeurs propres $e^{i2\pi\alpha_i}$, et $e^{-i2\pi\alpha_i}$ telles que $(1, \alpha_i) \quad i \in T(q_0)$ soient linéairement indépendants sur les rationnels (en effet sinon il suffit de substituer à q_0 un élément $q \in S_\mu$ voisin de q_0 , choisi de sorte que $T(q) = T(q_0)$, $T'(q) = T'(q_0)$.)

Notons $\text{card}(T(q_0))$ (resp $\text{card } T'(q_0)$) le cardinal de $T(q_0)$ (resp de $T'(q_0)$).

L'orbite de tout élément de $X^{\text{card}(T(q_0))}$ sous les puissances positives de $(g_{t_i}(q_0))_{i \in T(q_0)} \in [SL(2, \mathbb{R})]^{\text{card}(T(q_0))}$ est dense dans $X^{\text{card}(T(q_0))}$.

D'autre part si $\text{card } T'(q_0) \neq 0$ pour tout $y = (y_i)_{i \in T'(q_0)} \in X^{\text{card}(T'(q_0))}$.

la suite $(g_{t_i}^n(q_0) \cdot y_i)_{i \in T'(q_0)} \quad n \geq 0$ converge vers un point z_0 .

Si $\text{card } T'(q_0) = 0$ le résultat cherché est obtenu immédiatement en raisonnant comme dans le 1) ; si $\text{card } T'(q_0) \neq 0$ les considérations précédentes montrent que pour tout $x \in X^{k_0+1}$ $\overline{T_{\mu_t} \cdot x}$ contient la fibre

$z_0 \times X^{\text{card } T(q_0)}$ L'hypothèse de récurrence montre de plus que

$\overline{T_{\mu(\underline{t_i})_{i \in T'(q_0)}} \cdot z_0} = X^{\text{card}(T'(q_0))}$, d'où le résultat cherché.

La démonstration du lemme (2-1) est ainsi achevée.

2-2-2) DEUXIEME PARTIE :

A) Pour terminer la démonstration du théorème (2-1), il reste à établir la relative compacité faible des lois de la suite de processus $\hat{Y}_n(t)$ $t \in J$ $n \geq 1$ à valeurs dans $\mathcal{D}(J)$.

Précisons une condition suffisante permettant d'assurer cette compacité [2].

Donnons tout d'abord quelques notations :

Pour tout intervalle K de $\mathbb{R}$ et toute fonction α de J dans $\mathbb{R}$ on pose :

$$W(\alpha, K) = \sup_{s, t \in K} |\alpha(s) - \alpha(t)|$$

et l'on définit alors pour toute fonction α de J dans $\mathbb{R}$ et $\delta > 0$

$$W_J(\alpha, \delta) = \sup \{W(\alpha, [t, t+\delta]) ; [t, t+\delta] \subset J\}$$

si les conditions (i) et (ii) suivantes sont vérifiées :

(i) il existe un réel $t_0 \in J$, tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un réel $a > 0$ tel que : pour tout $n \geq 1$

$$P(|\hat{Y}_n(t_0)| > a) \leq \varepsilon$$

(ii) Pour tous $\eta > 0$, et $\varepsilon > 0$ il existe un δ , $0 < \delta < 1$ et un entier n_0 tels que pour $n \geq n_0$

$$P(W_J(\hat{Y}_n, \delta) \geq \eta) \leq \varepsilon$$

alors les lois de la suite $(\hat{Y}_n)_{n \geq 1}$ sont relativement compactes pour la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{D}(J)$; de plus toute valeur d'adhérence de cette suite est une loi de processus continu.

La condition (i) résulte immédiatement de la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\hat{Y}_n(t)$ $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$, établie dans la première partie.

D'après le corollaire (2-1), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ $n \geq 1$

$$p_s \quad \tilde{Y}_n(t) = \tilde{Z}_n(t)$$

$$\text{où} \quad \tilde{Z}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\sum_{j=1}^{n+1} 1_I(\tilde{X}_j^t) - (n+1) N(t) \right).$$

Pour démontrer (ii), nous utiliserons en outre les deux propositions suivantes qui seront justifiées ultérieurement.

Proposition (2-7) :

Pour tous $0 < \alpha < 1$ et $p=1,2$ il existe une constante $A_p(\alpha)$ telle que pour tous $n \geq 1$ et $t, s \in J$

$$E(\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s)) \leq A_p(\alpha) (|t-s|^{p\alpha} + \frac{|t-s|^\alpha}{2^{n-1}})$$

Proposition (2-8) :

Sous les hypothèses du théorème (2-1) la répartition d'état N admet une densité continue.

ainsi que lemme suivant [2].

lemme (2-6) :

Soient $(\tilde{Z}_i)_{1 \leq i \leq m}$ des variables aléatoires, $S_k = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + \dots + \tilde{Z}_k$ $1 \leq k \leq m$

$$\text{et} \quad M_m = \sup_{1 \leq k \leq m} |S_k|$$

S'il existe des réels positifs $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$, $\gamma \geq 0$ et $\beta > 1$ tels que

$$E|S_i - S_j|^\gamma \leq \left(\sum_{1 \leq i < j \leq m} u_i \right)^\beta$$

alors pour tout $\lambda > 0$ on a

$$P(M_m > \lambda) \leq \frac{K(\gamma, \beta)}{\lambda^\gamma} (u_1 + u_2 + \dots + u_m)^\beta$$

où $K(\gamma, \beta)$ est une constante.

Pour tout $n \geq 1$ l'application $t \mapsto \tilde{Y}_{2n-1}(t) + \sqrt{2n} N(t)$ est croissante ;
 donc pour $s \leq t \leq s+h \in \mathbb{R}$ on a

$$-\sqrt{2n} [N(s+h) - N(s)] \leq \tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s) \leq \tilde{Y}_{2n-1}(s+h) - \tilde{Y}_{2n-1}(s) + \sqrt{2n} [N(s+h) - N(s)] .$$

On en déduit, en tenant compte du fait (proposition (2-8)) que N a une densité continue à support compact, qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour $s \leq t \leq s+h \in \mathbb{R}$, on ait :

$$|\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| \leq |\tilde{Y}_{2n-1}(s+h) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| + c \sqrt{2n} h$$

et par conséquent pour tous $m \geq 1$ $h > 0$ $s \in \mathbb{R}$

$$(9) \sup_{t \in [s, s+mh]} |\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| \leq 3 \sup_{i \leq m} |\tilde{Y}_{2n-1}(s+ih) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)| + c h \sqrt{2n}$$

$$\text{soit } \frac{1}{2} < \alpha < 1 ; \text{ posons } \varepsilon_1 = \left(\frac{n}{3+c}\right)^\alpha$$

De la proposition (2-7) on déduit que

$$\text{si } \frac{|t-s|^\alpha}{2n-1} \leq \frac{1}{\varepsilon_1} |t-s|^{2\alpha} \quad \text{et si } t, s \in J$$

$$(10) \quad E[\tilde{Y}_{2n-1}(t) - \tilde{Y}_{2n-1}(s)]^4 = E[\tilde{Z}_{2n-1}(t) - \tilde{Z}_{2n-1}(s)]^4 \leq A_2(\alpha) \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right) |t-s|^{2\alpha}$$

Par conséquent si h vérifie les inégalités $\left(\frac{\varepsilon_1}{2n-1}\right)^{1/\alpha} \leq h \leq \frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{\sqrt{2n}}$,

si $[s, s+mh] \subset J$ où m est un entier ≥ 1 , il vient en tenant compte du

(9) et de (10) et en appliquant le lemme (2-6) aux variables aléatoires

$$\tilde{Z}_k = \tilde{Y}_{2n-1}(s+kh) - \tilde{Y}_{2n-1}(s+(k-1)h) \quad 1 \leq k \leq m :$$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & P(\sup_{t \in [s, s+mh]} |\hat{Y}_{2n-1}(t) - \hat{Y}_{2n-1}(s)| \geq (3+c)(\varepsilon_1)^{1/\alpha}) \\
 & \leq P(\sup_{1 \leq m} |\hat{Y}_{2n-1}(s+ih) - \hat{Y}_{2n-1}(s)| > (\varepsilon_1)^{1/\alpha}) \\
 & \leq K(4, 2\alpha) A_2(\alpha) (1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) \frac{(mh)^{2\alpha}}{\varepsilon_1^{4/\alpha}}
 \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $0 < \varepsilon < 1$ de sorte que

$$(12) \quad K(4, 2\alpha) A_2(\alpha) (1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) \frac{\delta^{2\alpha}}{\varepsilon_1^{4/\alpha}} < \varepsilon$$

Comme $\alpha > 1/2$ il existe un entier n_1 tel que pour $n \geq n_1$ il existe un réel h_n et un entier m_n tels que $m_n h_n = \delta$ et $\frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{(2n-1)^{1/\alpha}} \leq h_n \leq \frac{(\varepsilon_1)^{1/\alpha}}{\sqrt{2n}}$

Donc d'après (11) et (12) pour $n \geq n_1$ on a

$$P(W_J(\hat{Y}_{2n-1})\delta) > \eta) < \varepsilon$$

Comme pour tous $n \geq 1$ $t \in \mathbb{R}$ on a de plus :

$$\hat{Y}_{2n}(t) = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}} \hat{Y}_{2n-1}(t) + \frac{\Delta_n(t)}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{où} \quad |\Delta_n(t)| \leq 2$$

on en déduit facilement (ii).

Les résultats de la première partie et la relative compacité pour la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{D}(J)$, des lois $(\hat{Y}_n)$ de la suite de processus $(\hat{Y}_n(t) \ t \in J) \ n \geq 1$ permettent de conclure que la suite $(\hat{Y}_n) \ n \geq 1$ converge faiblement vers la loi d'un processus gaussien Y , centré presque sûrement à trajectoire continue et ayant les propriétés de non-dégénérescence précisés dans l'énoncé du théorème (2-1).

De plus, de la proposition (2-8), il résulte que pour tous $s, t \in J$ $0 < \alpha < 1$, on a :

$$E [Y(s) - Y(t)]^2 \leq A_2(\alpha) |t-s|^\alpha$$

d'où découle [12] la dernière affirmation du théorème (2-1).

La suite de ce paragraphe va être consacrée à la preuve des propositions (2-7) et (2-8). Pour cela il nous sera nécessaire d'introduire et d'étudier les propriétés de certains opérateurs :

B) Pour toute fonction f mesurable bornée sur X^2 tout $u \in \mathbb{R}$, $s, t \in J$, $x = (x_1, x_2) \in X^2$ on définit :

$$P_{s,t}(u) f(x_1, x_2) = \int e^{i u [I(g^s(\omega) \cdot x_1) - I(g^t(\omega) \cdot x_2)]} f(g^s(\omega) \cdot x_1, g^t(\omega) \cdot x_2) P(d\omega)$$

Notons que $P_{t,t}(0)$ n'est plus un opérateur quasi-compact sur $\mathcal{C}(X^2)$ ainsi que l'est $P_{s,t}(0)$ $s \neq t$. Nous ferons donc agir $P_{s,t}(u)$ ou les puissances de $P_{s,t}(u)$ sur un autre espace de Banach.

Pour $0 < \alpha < 1$ et $f \in \mathcal{C}(X^2)$

$$\text{soit } m_\alpha(f) = \sup_{\substack{x, y \in X^2 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_2^\alpha(x, y)}$$

$$\text{et } \mathcal{L}_\alpha = \{f \in \mathcal{C}(X^2) ; \|f\|_\alpha = |f| + m_\alpha(f) < +\infty\}$$

$\mathcal{L}_\alpha$ est une algèbre de Banach unitaire munie de la norme $\|\cdot\|_\alpha$.

Désignons par $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{L}_\alpha$ dans $\mathcal{L}_\alpha$. Si $T \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ on note $\|T\|_\alpha = \sup_{\|f\|_\alpha=1} \|Tf\|_\alpha$. Nous pouvons alors énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition (2-9)

- 1) Pour tout $0 < \alpha < 1$ $P_{s,t}^2(u)$ est un opérateur continu de $\mathcal{L}_\alpha$ dans $\mathcal{L}_\alpha$
 l'application $u \rightarrow P_{s,t}^2(u)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ est analytique ; de
 plus on a pour tout $k \geq 0$

$$\sup_{\substack{s,t \in J \\ u \in \mathbb{R}}} \left\| \frac{d^k}{du^k} (P_{s,t}^2(u)) \right\|_\alpha < +\infty$$

et il existe une constante $C(\alpha)$ telle que

$$\sup_{s,t \in J} \|P_{s,t}^2(u) - P_{s,t}^2(u_1)\|_\alpha \leq C(\alpha) |u - u_1| \quad u, u_1 \in \mathbb{R}.$$

- 2) Pour tous $0 < \alpha < 1$ $0 < r < 1$ il existe une constante $C'(\alpha)$ telle que
 pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$ et tous $s, t \in J$ on ait pour $u \in \mathbb{R}$, $k \geq 0$

$$\left\| \frac{d^k}{du^k} [P_{s,t}^2(u)] \Phi - \frac{d^k}{du^k} [P_{s,s}^2(u)] \Phi \right\|_{(1-r)\alpha} \leq C'(\alpha) |t-s|^{r\alpha} \|\Phi\|_\alpha$$

Proposition (2-10)

Pour tout $0 < \alpha < 1$, $P_{s,t}^2(u)$ est un opérateur quasi-compact de $\mathcal{L}_\alpha$
 dans $\mathcal{L}_\alpha$. Il existe de plus un voisinage compact W de o dans $\mathbb{R}$
 tel que : pour tous $u \in W, f \in \mathcal{L}_\alpha, n \geq 1$ on ait :

$$P_{s,t}^{2n}(u)f = [k_{s,t}(u)]^n N_{s,t}(u)f + Q_{s,t}^n(u)f$$

où $k_{s,t}(u)$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $P_{s,t}^2(u)$
 $N_{s,t}(u)$ est la projection sur le sous-espace propre de dimension 1
 correspondant à $k_{s,t}(u)$

$Q_{s,t}(u)$ est un opérateur de $\mathcal{L}_\alpha$ dans $\mathcal{L}_\alpha$ vérifiant $Q_{s,t}(u) N_{s,t}(u) = 0$.

Il existe par ailleurs une constante $0 < \rho'_2(\alpha) < 1$ telle que $Q_{s,t}(u)$ ait
 un rayon spectral $r_\alpha(Q_{s,t}(u))$ satisfaisant à

$$\sup_{\substack{(s,t) \in J \times J \\ u \in W}} r_\alpha(Q_{s,t}(u)) \leq \frac{1 + 2\rho'_2(\alpha)}{3} < 1$$

et telle que

$$\inf_{(s,t) \in J \times J} |k_{s,t}(u)| \geq \frac{2 + \rho'_2(\alpha)}{3}$$

$$u \in W$$

Par ailleurs les applications $u \mapsto k_{s,t}(u)$, $u \mapsto N_{s,t}(u)$
 $u \mapsto Q_{s,t}(u)$ sont analytiques sur W

Donnons tout d'abord la

démonstration de la proposition (2-9) :

Soient R_k $k = 1, 2, 3, 4$ les sous-ensembles de X^2 définis par

$$R_1 = I \times CI, \quad R_2 = CI \times I, \quad R_3 = CI \times CI, \quad R_4 = I \times I$$

Pour toute fonction f mesurable bornée sur X^2 , $s, t \in J$, $u \in \mathbb{R}$
on a l'égalité :

$$P_{s,t}(u)f(s) = e^{iu} T_{1,s,t} f(x) + e^{-iu} T_{2,s,t} f(x) + T_{3,s,t} f(x) + T_{4,s,t} f(x)$$

$$x \in X^2$$

$$\text{où } T_{k,s,t} f(x) = \int_{R_k} (gx) f(gx) \mu_{s,t}^2(dg) \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Pour établir la proposition (2-9) il suffit de montrer que pour tout
 $k = 1, 2, 3, 4$ $T_{k,s,t}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour tout $0 < \alpha < 1$, $T_{k,s,t}^2$ est un opérateur borné sur $\mathcal{B}_\alpha$, et

$$\sup_{s,t \in J \times J} \|T_{k,s,t}^2\|_\alpha < +\infty$$

(ii) Pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe une constante $C_k(\alpha)$ telle que pour toute
fonction $f \in \mathcal{B}_\alpha$, tout $0 < r < 1$ $s, t \in J$, on ait :

$$\|T_{k,s,t}^2 - T_{k,s,s}^2\|_{(1-r)\alpha} \leq C_k(\alpha) |t-s|^\alpha \|f\|_\alpha$$

Nous nous contenterons d'établir (i) et (ii) dans le cas où $k=4$, la démonstration étant analogue pour les autres valeurs de k . Nous nous appuierons pour cela sur le lemme (2-6).

Lemme (2-6) :

1) Il existe une constante C_4 telle que pour $x, y \in X^2$

$$\sup_{s, t \in J} \int |l_{R_4}(gx) - l_{R_4}(gy)| \mu_{s, t}^2(dg) \leq C_4 d_2(x, y)$$

2) Il existe une constante $C'_4(\alpha)$ telle que pour $f \in \mathcal{Y}_\alpha$, $s, t \in J$ on ait :

$$\sup_{x \in X^2} |T_{4, s, t}^2 f(x) - T_{4, s, s}^2 f(x)| \leq C'_4(\alpha) \|f\|_\alpha |s-t|^\alpha$$

que nous prouverons par la suite.

Soit $f \in \mathcal{Y}_\alpha$ on a facilement : pour $x, y \in X^2$, $s, t \in J$

$$\begin{aligned} |T_{4, s, t}^2 f(x) - T_{4, s, t}^2 f(y)| &\leq m_\alpha(f) \int d_2^\alpha(gx, gy) \mu_{s, t}^2(dy) \\ &\quad + |f| \int |l_{R_4}(gx) - l_{R_4}(gy)| \mu_{s, t}^2(dg) \end{aligned}$$

$$\text{d'où il résulte puisque } K(\alpha) = \sup_{\substack{x, y \in X^2 \\ s, t \in J}} \frac{\int d_2^\alpha(gx, gy) \mu_{s, t}^2(dg)}{d_2^\alpha(x, y)} < +\infty$$

et en raison du lemme (2-6) que pour $s, t \in J$

$$(13) \quad m_\alpha(T_{4, s, t}^2(f)) \leq \|f\|_\alpha (K(\alpha) + C_4)$$

Comme d'autre part on a :

$$|T_{4, s, t}^2 f| \leq |f|$$

la propriété (i) est démontrée pour $T_{4, s, t}$.

Prouvons maintenant (ii). Pour $x, y \in X^2$ $s, t \in J$ on a, en tenant compte de (13) et du lemme (2-6) 2)

$$| [T_{4,s,t}^2 f(x) - T_{4,s,s}^2 f(x)] - [T_{4,s,t}^2 f(y) - T_{4,s,s}^2 f(y)] |$$

$$\leq 2 \|f\|_{\alpha} \inf(C'_4(\alpha) |s-t|^{\alpha}, (K(\alpha) + C_4) d_2^{\alpha}(x,y))$$

$$\leq 2 \|f\|_{\alpha} \sup(C'_4(\alpha), K(\alpha) + C_4) \inf(|s-t|^{\alpha}, d_2^{\alpha}(x,y))$$

d'où il résulte que pour $0 < r < 1$

$$(14) \quad m_{(1-r)\alpha} (T_{4,s,t}^2 f - T_{4,s,s}^2 f) \leq 2 \|f\|_{\alpha} \sup(C'_4(\alpha), K(\alpha) + C_4) |s-t|^{r\alpha}$$

Cette inégalité, jointe au 2) du lemme (2-6) permet de conclure.

Pour terminer, donnons la

démonstration du lemme (2-6)

Pour $x \in P(\mathbb{R}^2)$ notons $\theta(x)$ l'angle de l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2]$ tel que

le vecteur $\begin{pmatrix} \cos \theta(x) \\ \sin \theta(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ait pour image x dans $P(\mathbb{R}^2)$. Soit de plus

$F(x) = \int_{-\infty}^x p(q) dq$ la fonction de répartition de μ .

On a alors : si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X^2$

$$\begin{aligned} \int |1_{R_4}(gx) - 1_{R_4}(gy)| \mu_{s,t}^2(dg) &= \iint |1_{\{q_1 \leq \inf(s + \frac{1}{q_2 - s - \tan \theta(x_1)}, t + \frac{1}{q_2 - t - \tan \theta(x_2)})\}} \\ &- 1_{\{q_1 \leq \inf(s + \frac{1}{q_2 - s - \tan \theta(y_1)}, t + \frac{1}{q_2 - t - \tan \theta(y_2)})\}}| p(q_1) p(q_2) dq_1 dq_2 \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned}
 & \int |l_{R_4}(gx) - l_{R_4}(gy)| \mu_{s,t}^2(dg) \\
 &= \int p(q_2) \left| \inf \left\{ F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta(x_1)}\right), F\left(t + \frac{1}{q_2 - t - \operatorname{tg} \theta(x_2)}\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \inf \left\{ F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta(y_1)}\right), F\left(t + \frac{1}{q_2 - t - \operatorname{tg} \theta(y_2)}\right) \right\} \right| dq_2 \\
 &\leq \int \left| F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta(x_1)}\right) - F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta(y_1)}\right) \right| p(q_2) dq_2 \\
 &\quad + \int \left| F\left(t + \frac{1}{q_2 - t - \operatorname{tg} \theta(x_2)}\right) - F\left(t + \frac{1}{q_2 - t - \operatorname{tg} \theta(y_2)}\right) \right| p(q_2) dq_2
 \end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
 & \int \left| F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta_1}\right) - F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta'_1}\right) \right| p(q_2) dq_2 \\
 &= \int \left| \int_{\operatorname{tg} \theta_1}^{\operatorname{tg} \theta_2} p\left(s + \frac{1}{u-y}\right) \frac{du}{(u-y)^2} \right| p(y+s) ds
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit, puisque p est à support compact, qu'il existe une constante K_1 telle que :

$$\sup_{s \in S} \int \left| F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta_1}\right) - F\left(s + \frac{1}{q_2 - s - \operatorname{tg} \theta'_1}\right) \right| p(q_2) dq_2 \leq K_1 |\sin(\theta_1 - \theta'_1)|$$

On a donc :

$$(15) \quad \sup_{s, t \in J} \int |l_{R_4}(gx) - l_{R_4}(gy)| \mu_{s,t}^2(g) \leq K_1 d(x, y)$$

d'où le 1) du lemme (2-6).

Par ailleurs, on a pour $x = (x_1, x_2) \in X^2$, $s, t \in J$, $f \in \mathcal{L}_\alpha$

$$\begin{aligned}
 & |T_{4,s,t}^2 f(x) - T_{4,s,s}^2 f(x)| \leq m_\alpha(f) \int d_1^\alpha(g_2^t(\omega) g_1^t(\omega) \cdot x_2, g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2) P(d\omega) \\
 &+ |f| \int |l_I(g_2^t(\omega) g_1^t(\omega) x_2) - l_I(g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2)| P(d\omega).
 \end{aligned}$$

Or il existe une constante K_2 telle que

$$\sup_{x_2 \in X} \int d_1^\alpha(g_2^t(\omega) g_1^t(\omega) x_2, g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2) P(d\omega) \leq K_2 |t-s|^\alpha$$

et une constante K_3 telle que

$$\begin{aligned} & \sup_{x_2 \in X} \int |1_I(g_2^t(\omega) g_1^t(\omega) x_2) - 1_I(g_2^s(\omega) g_1^s(\omega) x_2)| P(d\omega) \\ &= \sup_{x_2 \in X} \int p(q) \left| F\left(t + \frac{1}{q-t-\text{tg}\theta(x_2)}\right) - F\left(s + \frac{1}{q-s-\text{tg}\theta(x_2)}\right) \right| dq \\ &\leq K_3 |t-s| \end{aligned}$$

F admettant une dérivée à support compact.

Par conséquent on a :

$$(16) \quad \sup_{x \in X^2} |T_{4,s,t}^2 f(x) - T_{4,s,s}^2 f(x)| \leq \|f\| (K_2 |t-s|^\alpha + K_3 |t-s|)$$

ce qui achève la preuve du lemme (2-6) et de la proposition (2-9).

Démonstration de la proposition (2-10):

1) On commence par établir que les conclusions de la proposition (2-10) sont vérifiées pour la valeur $u=0$.

Pour cela, on utilise le

lemme (2-7) : Pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe une constante $0 < \rho(\alpha) < 1$ telle que

$$\lim_n \left[\sup_{\substack{s,t \in J \\ x \neq y \in X^2}} \int \frac{d_2^\alpha(gx, gy)}{d_2^\alpha(x, y)} \mu_{s,t}^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(\alpha).$$

démonstration du lemme (2-7) :

on a l'inégalité :

$$(17) \quad \sup_{\substack{s, t \in J \\ x \neq y \in X^2}} \int \frac{d_2^\alpha(gx, gy)}{d_2^\alpha(x, y)} \mu_{s, t}^n(dy) \leq 2 \sup_{\substack{s \in J \\ x_1 \neq y_1 \in X}} \int \frac{d_1^\alpha(gx_1, gy_1)}{d_1^\alpha(x_1, y_1)} \mu_s^n(dy)$$

et de plus

$$(18) \quad \sup_{\substack{s \in J \\ x_1 \neq y_1 \in X}} \int \frac{d_1^\alpha(gx_1, gy_1)}{d_1^\alpha(x_1, y_1)} \mu_s^n(d) \leq \sup_{\substack{s \in J \\ x_1 \in X}} \int \frac{1}{\|gx_1\|^{2\alpha}} \mu_s^n(dg)$$

Considérons alors l'opérateur $T_s(2\alpha)$ sur $\mathcal{C}(X)$ défini par

$$(19) \quad T_s(2\alpha)f(\bar{x}) = \int \sigma^{2\alpha}(g, \bar{x}) f(g.\bar{x}) \mu_s(dg) \quad \bar{x} \in X, f \in \mathcal{C}(X), s \in J$$

où $\sigma(g, \bar{x}) = \frac{1}{\|gx\|}$, $\| \cdot \|$ étant la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$, et x un vecteur de norme 1 d'image $\bar{x}$ dans $P(\mathbb{R}^2)$.

Pour $0 < \alpha < 1$, l'opérateur $T_s(2\alpha)$ est de rayon spectral $r_s(2\alpha)$

strictement inférieur à 1 (voir l'appendice). L'application $s \rightarrow T_s(2\alpha)$ est de plus continue ; il en résulte alors que l'application $s \rightarrow r_s(2\alpha)$ est semi-continue supérieurement et donc que pour $0 < \alpha < 1$

$$\sup_{s \in J} r_s(2\alpha) < 1$$

d'où l'on déduit que (20) $\lim_n \left[\sup_{\substack{s \in J \\ x \in X}} T_s^n(2\alpha)e(x) \right]^{1/n} < 1$.

On obtient le lemme (2-7) en tenant compte de (17), (18), (19), (20).

Nous en déduirons alors immédiatement le

lemme (2-8) : Pour tout $0 < \alpha < 1$ il existe un entier $n_0(\alpha) \geq 1$ et une constante $0 < \rho_1(\alpha) < 1$ tels que :

$$\forall f \in \mathcal{L}_\alpha, \forall s, t \in J$$

$$\|P_{s,t}^{n_0(\alpha)}(0) f\|_\alpha \leq \rho_1(\alpha) \|f\|_\alpha + |f|$$

Par ailleurs si L est une partie bornée de $(\mathcal{L}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ $P_{s,t}^n(0)(L)$ est une partie bornée et équicontinue de $\mathcal{C}(X^2)$ et donc d'après le théorème d'Ascoli une partie compacte de $(\mathcal{C}(X^2), \|\cdot\|)$.

En tenant compte du fait que $P_{s,t}(0)$ est une contraction de $(X^2, \|\cdot\|)$, on déduit alors du lemme (2-8), et de la remarque précédente, à l'aide du théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu [13] que $P_{s,t}(0)$ est un opérateur quasi-compact sur $\mathcal{L}_\alpha$. Comme d'après la proposition (2-4), 1 est la seule valeur propre de module 1 de $P_{s,t}(0)$, nous pouvons conclure que

$$(21) \quad \forall n \geq 0 \quad P_{s,t}^n(0) = v_{s,t} + (Q'_{s,t})^n$$

où $Q'_{s,t}$ est un opérateur de $(\mathcal{L}_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ de rayon spectral strictement inférieur à 1, et tel que $Q'_{s,t} 1 = 0$.

Nous achèverons la première partie de la démonstration de la proposition (2-10) en montrant que $\sup_{s,t \in J} r_\alpha(Q'_{s,t}) < 1$.

Pour λ tel que $|\lambda| = 1$ et $t, s \in J$ notons $R(\lambda, Q'_{s,t})$ la résolvante $(I - \lambda Q'_{s,t})^{-1}$ sur $\mathcal{L}_\alpha$. On a alors le

lemme (2-9) :

$$\sup_{t,s \in J \times J} \|R(\lambda, Q'_{s,t})\|_\alpha = C_5(\alpha) < +\infty$$

$$|\lambda| = 1$$

démonstration du lemme (2-9) :

Il suffit d'établir que pour toute suite $(\lambda_n, s_n, t_n)_{n \geq 1} \in U \times J \times J$

où $U = \{z \in \mathbb{C} ; |z|=1\}$ on a $\sup_{n \geq 1} \|R(\lambda_n, Q_{s_n, t_n})\|_\alpha < +\infty$

Soit $g \in \mathcal{L}_\alpha - \{0\}$; comme aucun nombre complexe de module 1 n'est dans le spectre de Q'_{s_n, t_n} , pour tout $n \geq 1$ il existe une fonction $f_n \in \mathcal{L}_\alpha$ telle que :

$$\lambda_n f_n - Q_{s_n, t_n} f_n = g.$$

Posons $f'_n = \frac{f_n}{|f_n|}$; on a :

$$(22) \quad f'_n = \frac{1}{\lambda_n} Q_{s_n, t_n} f'_n + \frac{g}{|f_n|}$$

d'où il résulte d'après le lemme (2-8) et (21) :

$$\|f'_n\|_\alpha \leq \rho_1(\alpha) \|f'_n\|_\alpha + 2 + \frac{\|g\|_\alpha}{|f_n|}$$

c'est-à-dire :

$$(23) \quad \|f'_n\|_\alpha \leq \frac{2 + \frac{\|g\|_\alpha}{|f_n|}}{1 - \rho_1(\alpha)} \quad n \geq 1.$$

Montrons que $\sup_n |f_n| < +\infty$. Sinon d'après (23), la suite

$\|f'_n\|_\alpha$ $n \geq 1$ est bornée, et il existe une sous-suite

$(n_k)_{k \geq 1}$ de $\mathbb{N}$ telle que la suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ de $\mathcal{L}_\alpha$ converge

vers une fonction f de $\mathcal{L}_\alpha$. On peut de plus supposer sans inconvénient que $\lim_k \lambda_{n_k} = \lambda_0 \in U$ et $\lim_k (s_{n_k}, t_{n_k}) = (s_0, t_0) \in J \times J$.

On a alors :

$$(2-4) \quad \lim_k |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f_{n_k} - Q'_{s_0, t_0} f| = 0.$$

En effet, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f_{n_k} - Q'_{s_0, t_0} f| &\leq |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f_{n_k} - Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f| + |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} f - Q'_{s_0, t_0} f| + |Q'_{s_{n_k}, t_{n_k}} (f_{n_k} - f)| \\ &\leq |P_{s_{n_k}, t_{n_k}}(0) f - P_{s_0, t_0} f| + |v_{s_{n_k}, t_{n_k}}(f) - v_{s_0, t_0}(f)| + 2|f_{n_k} - f| \end{aligned}$$

Comme $\lim_k |P_{s_{n_k}, t_{n_k}}(0) f - P_{s_0, t_0} f| = 0$ et que puisque pour tous $s, t \in J$ $\mu_{s, t}$ admet une unique probabilité invariante $\nu_{s, t}$ sur X^2 on a également $\lim_k |\nu_{s_{n_k}, t_{n_k}}(f) - \nu_{s_0, t_0}(f)| = 0$.

(24) est donc établie.

En passant à la limite suivant la sous-suite $(n_k)_{k \geq 1}$ dans l'égalité (22) on obtient alors :

$$f = \frac{1}{\lambda_0} Q'_{t_0, s_0} f \quad \text{avec } |f| = 1, \text{ ce qui est impossible car } r(Q'_{t_0, s_0}) < 1$$

Par conséquent on a $d = \sup_{n \geq 1} |f_n| < +\infty$

L'inégalité (23) peut alors s'écrire :

$$\|f_n\|_\alpha \leq \frac{2d + \|g\|_\alpha}{1 - \rho_1(\alpha)} \quad n \geq 1$$

ou encore

$$\|R(\lambda_n, Q'_{s_n, t_n})g\|_\alpha \leq \frac{2d + \|g\|_\alpha}{1 - \rho_1(\alpha)} \quad n \geq 1$$

Le théorème de Banach-Steinhaus permet alors de conclure que :

$$(25) \quad \sup_{n \geq 1} \|R(\lambda_n, Q'_{s_n, t_n})\|_\alpha < +\infty$$

ce qui établit le lemme (2-9).

Du lemme (2-9), il résulte que pour tout $\lambda \in \mathbb{U}$ et tout $\mu \in \mathbb{T}$ tel que $|\mu| < \frac{1}{C_5(\alpha)}$ $\lambda + \mu$ appartient à l'ensemble résolvant

de $Q'_{s, t}$ pour tous $s, t \in J$. Il existe donc un réel $\rho'_2(\alpha) < 1$ tel que pour tous $s, t \in J$, le spectre de $Q'_{s, t}$ soit contenu dans $\{z \in \mathbb{T} / |z| \leq \rho'_2(\alpha)\}$. Les conclusions de la proposition (2-10) sont donc prouvées pour la valeur $u=0$ (on pose $Q_{s, t} = Q'^2_{s, t}$).

- 2) La théorie des perturbations analytiques d'opérateurs [10], [18] va nous permettre de terminer la preuve de la proposition (2-10).

Soit $N_{1,s,t}$ l'opérateur défini par $N_{1,s,t}(f) = v_{s,t}(f) e$, $f \in \mathcal{L}_\alpha$, où e est la fonction identique à 1 sur X^2 .

Pour $|z| > \rho'_2(\alpha)$ et $z \neq 1$, la résolvante de $P_{s,t}^2(0)$ est :

$$(26) \quad R_{s,t}(z) = \frac{1}{z-1} N_{1,s,t} + \sum_{n \geq 0} \frac{Q_{s,t}^{n+1}}{z^{n+1}}$$

$$(27) \quad \text{Si } \|P_{s,t}^2(0) - P_{s,t}^2(u)\| < \frac{1}{\|R_{s,t}(z)\|_\alpha}$$

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} R_{s,t}(z) \{ [P_{s,t}^2(u) - P_{s,t}^2(0)] R_{s,t}(z) \}^n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et détermine la résolvante $R_{s,t}(z, u)$ de $P_{s,t}^2(u)$.

Considérons alors les cercles I_1 et I_2 de centre 1, et 0 respectivement et de rayons :

$$r_1(\alpha) = \frac{1 - \rho'_2(\alpha)}{3},$$

$$r_2(\alpha) = \frac{1 + 2 \rho'_2(\alpha)}{3}$$

De plus soit $\delta > 0$ tel que $\delta < r_1(\alpha)$ et $\rho'_2(\alpha) + \frac{\delta}{2} < r_2(\alpha)$;

et soit $M_\delta = \sup_{s,t \in J} \sup_{z \in \{z; |z| > \rho'_2(\alpha) + \delta; |z-1| > \delta\}} \|R_{s,t}(z)\|_\alpha < +\infty$ d'après (26).

D'après la proposition (2-9) 1) si $|u| < \frac{1}{C(\alpha)M_\delta}$

on a $\|P_{s,t}^2(u) - P_{s,t}^2(0)\| < \frac{1}{M_\delta}$ pour $s, t \in J$ et donc les

cercles I_1 et I_2 appartiennent à l'ensemble résolvant de

$P_{s,t}(u)$ $s, t \in J$.

Considérons alors les projections :

$$(28) \quad N_{1,s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_1} R_{s,t}(z, u) dz$$

$$(29) \quad N_{2,s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} R_{s,t}(z, u) dz$$

Dès que (30) $\|N_{1,s,t}(u) - N_{1,s,t}(0)\| < 1$ l'image $E_{s,t,u}$ de $N_{1,s,t}(u)$ est comme celle $N_{1,s,t}(0)$ de dimension 1 [10] et on a :

$$(31) \quad P_{s,t}(u) N_{1,s,t}(u) e_{s,t,u} = N_{1,s,t}(u) P_{s,t}(u) e_{s,t,u} = k_{s,t}(u) e_{s,t,u}$$

où $e_{s,t,u} \in \mathcal{L}_\alpha$ engendre $E_{s,t,u}$

D'après (26), (28) et la proposition (29) 1) on a pour $s, t \in J$ et $|u| < \frac{1}{C(\alpha)M_\delta}$

$$\|N_{1,s,t}(u) - N_{1,s,t}(0)\|_\alpha \leq r_1(\alpha) \sum_{k \geq 1} M_\delta (C_\alpha |u| M_\delta)^k = r_1(\alpha) M_\delta \frac{C_\alpha |u| M_\delta}{1 - C_\alpha |u| M_\delta}$$

et donc (30) est réalisée dès que $u \in W$ où :

$$W = \{u \in \mathbb{R} ; |u| < \frac{1}{C(\alpha)M_\delta [2r_1(\alpha)M_\delta + 1]}\}$$

Par ailleurs on a pour tout $n \geq 1$ $s, t \in J$ $u \in W$

$$\begin{aligned} Q_{s,t}^2(u)^n &= [P_{s,t}^2(u)]^n N_{1,s,t}(u) + [P_{s,t}^2(u)]^n N_{2,s,t}(u) \\ &= [k_{s,t}(u)]^n N_{1,s,t}(u) + Q_{s,t}^n(u) \end{aligned}$$

$$\text{où } Q_{s,t}^n = \frac{1}{2i\pi} \int_{I_2} z^n R_{s,t}(z, u) dz$$

$$\text{et où donc } r_\alpha(Q_{s,t}(u)) \leq r_2(\alpha) < 1$$

$$\text{En outre } k_{s,t}(u) = \frac{P_{s,t}^2(u) N_{1,s,t}(u) e(x_0, x_0)}{N_{1,s,t}(u) e(x_0, x_0)}$$

$$\text{et } |k_{s,t}(u)| > 1 - r_1(\alpha) = \frac{2 + \rho'_2(\alpha)}{3}$$

L'analyticité des applications $u \rightarrow N_{1,s,t}(u)$, $u \rightarrow Q_{s,t}(u)$,

$u \rightarrow k_{s,t}(u)$ résulte de l'analyticité de l'application $u \rightarrow P_{s,t}(u)$ de $\overset{\circ}{W}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$, qui entraîne celle de $u \rightarrow R_{s,t}(z, u)$, et des formules précédentes.

La preuve de la proposition (2-10) est ainsi terminée.

Donnons maintenant la

C) DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (2-7).

Considérons la famille d'opérateurs

$$\hat{P}_{s,t}(u) = e^{-iu[N(s)-N(t)]} P_{s,t}(u) \quad s,t \in J \quad u \in W$$

En raison de la proposition (2-8) (admise pour le moment mais indépendante de la proposition (2-7)) l'application $s \rightarrow N(s)$ est Lipschitzienne sur R . Il en résulte que les opérateurs $\hat{P}_{s,t}(u)$ possèdent les mêmes propriétés que celles décrites dans les propositions (2-9) et (2-10) pour les opérateurs $P_{s,t}(u)$. On modifie les notations adoptées pour décrire les propriétés des opérateurs $P_{s,t}(u)$ en leur adjoignant un tilde. On a alors :

$$(32) \quad \hat{k}'_{s,t}(0) = 0$$

De plus la transformée de Fourier de $Z_{2n-1}(t) - Z_{2n-1}(s)$

$n \geq 1 \quad t,s \in J$ est :

$$(33) \quad E(e^{iu(\hat{Z}_{2n-1}(t) - \hat{Z}_{2n-1}(s))}) = \hat{P}_{s,t}^{2n}(\frac{u}{\sqrt{2n}}) e(x_0, x_0) \quad n \geq 1$$

d'où il résulte que :

$$(34) \quad E(\hat{Z}_{2n-1}(t) - \hat{Z}_{2n-1}(s))^{2p} = \frac{1}{(2n)^p} \frac{d^{2p}}{du^{2p}} [\hat{P}_{s,t}^{2n}(0)] e(x_0, x_0)$$

Pour terminer la preuve de la proposition (2-7), nous utiliserons le

lemme (2-10) : Soient $0 < \alpha < 1$, $0 < r < 1$, $p \geq 0$ et K un compact dans l'ensemble résolvant de $\hat{P}_{s,t}^{2p}(u)$ opérant sur $\mathcal{L}_\alpha$ et $\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}$. Il existe alors une constante $C(\alpha, r, K)$ telle que pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{L}_\alpha$ on ait l'inégalité :

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{s,t \in J \\ z \in K}} \left| \frac{d^p}{du^p} (\hat{R}_{s,t}(z,0)) \Phi - \frac{d^p}{du^p} (\hat{R}_{s,s}(z,0)) \Phi \right|_{(1-r)\alpha} \\ & \leq C_p(\alpha, r, K) |t-s|^{r\alpha} \|\Phi\|_\alpha \end{aligned}$$

démonstration du lemme (2-10) :

a) On traite tout d'abord le cas $p=0$.

Dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$ on a la relation :

$$(35) \quad \tilde{R}_{s,t}(z,0) - \tilde{R}_{s,s}(z,0) = \tilde{R}_{s,t}(z,0) [\tilde{P}_{s,t}^2(0) - \tilde{P}_{s,s}^2(0)] \tilde{R}_{s,s}(z,0) \\ s, t \in J, \quad z \in K$$

D'autre part en raisonnant comme dans la preuve du lemme (2-9) on a :

$$(36) \quad \sup_{\substack{s, t \in J \\ z \in K}} \|\tilde{R}_{s,t}(z,0)\|_{(1-r)\alpha} < \infty \quad \text{et}$$

$$\sup_{\substack{s, t \in J \\ z \in K}} \|\tilde{R}_{s,t}(z,0)\|_\alpha < +\infty$$

De (35) et de l'analogue de la proposition (2-9) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ on déduit alors que si $\phi \in \mathcal{L}_\alpha$, $s, t \in J$ et $z \in K$, on a :

$$(37) \quad \|\tilde{R}_{s,t}(z,0)\phi - \tilde{R}_{s,s}(z,0)\phi\|_{(1-r)\alpha} \\ \leq \sup_{\substack{s, t \in J \\ z \in K}} \|\tilde{R}_{s,t}(z,0)\|_{(1-r)\alpha} \gamma'(\alpha) |t-s|^\alpha \times \sup_{\substack{s, t \in J \\ z \in K}} \|\tilde{R}_{s,t}(z,0)\|_\alpha$$

c'est-à-dire le résultat souhaité.

b) Pour $\|\tilde{P}_{s,t}^2(u) - \tilde{P}_{s,t}^2(0)\|_\alpha < 1$ et $\|\tilde{P}_{s,t}^2(u) - \tilde{P}_{s,t}^2(0)\|_{(1-r)\alpha} < 1$ on a l'égalité suivante valable dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$

$$(38) \quad \tilde{R}_{s,t}(z,u) = \sum_{n \geq 0} \tilde{R}_{s,t}(z) \{[\tilde{P}_{s,t}^2(u) - \tilde{P}_{s,t}^2(0)] \tilde{R}_{s,t}(z)\}^n \quad z \in K$$

On en déduit que $\frac{dk}{du^k}(\tilde{R}_{s,t}(z,0))$ est une somme finie d'opérateurs de la forme :

$$\tilde{R}_{s,t}(z) \left(\frac{d^{i_1}}{du^{i_1}} (\tilde{P}_{s,t}^2(0)) \tilde{R}_{s,t}(z) \right) \left(\frac{d^{i_2}}{du^{i_2}} (\tilde{P}_{s,t}^2(0)) \tilde{R}_{s,t}(z) \right) \dots \\ \left(\frac{d^{i_j}}{du^{i_j}} (\tilde{P}_{s,t}^2(0)) \tilde{R}_{s,t}(z) \right)$$

où $i_1 \geq 1, i_2 \geq 1, \dots, i_j \geq 1$ $i_1 + i_2 + \dots + i_j = p, \quad 1 \leq j \leq k.$

Les considérations de la partie a) et l'analogie de la proposition (2-9) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ permettent alors de conclure immédiatement à la validité du lemme (2-10) pour $p \geq 1$.

Soient $0 < \alpha < 1, 0 < r < 1$. L'analogie de la proposition (2-10) pour $\tilde{P}_{s,t}(u)$ permet d'obtenir la décomposition suivante de $\tilde{P}_{s,t}^{2n}(u)$ $s, t \in J, u \in W$, valable dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}_\alpha, \mathcal{L}_\alpha)$ et $\mathcal{L}(\mathcal{L}_{(1-r)\alpha}, \mathcal{L}_{(1-r)\alpha})$.

$$(39) \quad \tilde{P}_{s,t}^{2n}(u) = [\tilde{k}_{s,t}(u)]^n \tilde{N}_{s,t}(u) + \tilde{Q}_{s,t}^n(u) \quad n \geq 1$$

$$\text{où } (40) \quad \tilde{N}_{s,t}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \tilde{R}_{s,t}(z, u) dz$$

$$(41) \quad \tilde{Q}_{s,t}^n(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} z^n \tilde{R}_{s,t}(z, u) dz$$

$$(42) \quad \tilde{k}_{s,t}(u) = \frac{\tilde{P}_{s,t}^2(u) \tilde{N}_{s,t}(u) e(x_0, x_0)}{\tilde{N}_{s,t}(u) e(x_0, x_0)} = \frac{\int_{\gamma_1} z \tilde{R}_{s,t}(z, u) e(x_0, x_0) dz}{\int_{\gamma_1} \tilde{R}_{s,t}(z, u) e(x_0, x_0) dz}$$

Du lemme (2-9) et des formules précédentes résulte alors le

lemme (2-11) : Pour tout $p \geq 0$ il existe une constante $C'_p(r, \alpha)$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{L}_\alpha$

$$1) \quad \sup_{s, t \in J} \left\| \frac{d^p}{du^p} (\tilde{N}_{s,t}(o)) \phi - \frac{d^p}{du^p} (\tilde{N}_{t,t}(o)) \phi \right\|_{(1-r)\alpha} \leq C'_p(r, \alpha) |t-s|^{r\alpha} \|\phi\|_\alpha$$

$$2) \quad \sup_{s, t \in J} \left\| \frac{d^p}{du^p} (\tilde{Q}_{s,t}^n(o)) \phi - \frac{d^p}{du^p} (\tilde{Q}_{t,t}^n(o)) \phi \right\|_{(1-r)\alpha}$$

$$\leq C'_p(r, \alpha) \tilde{\rho}_2^n(r, \alpha) |t-s|^\alpha \|\phi\|_\alpha$$

où $\tilde{\rho}_2(r, \alpha) < 1$ est le rayon du cercle γ_2 .

$$3) \quad |\tilde{k}_{s,t}^{(p)}(o) - \tilde{k}_{t,t}^{(p)}(o)| \leq C'_p(r, \alpha) |t-s|^\alpha$$

En raison de (39) et (32), on a :

$$(43) \quad \frac{d^2}{du^2} [\hat{P}_{s,t}^{2n}] (o) e(x_o, x_o) = n \hat{k}_{s,t}''(o) + \frac{d^2}{du^2} [\hat{Q}_{s,t}^n] (o) e(x_o, x_o)$$

et

$$(44) \quad \frac{d^4}{du^4} [\hat{P}_{s,t}^{2n}] (o) e(x_o, x_o) = 3n(n-1) [\hat{k}_{s,t}''(o)]^2 + n \{k_{s,t}^{(4)}(o) + 3k_{s,t}^{(3)}(o) \frac{d}{du} [\hat{N}_{s,t}] (o) e(x_o, x_o) + 4k_{s,t}^{(2)}(o) \frac{d^2}{du^2} [\hat{N}_{s,t}] (o) e(x_o, x_o) + \frac{d^4}{du^4} [\hat{N}_{s,t}] (o) e(x_o, x_o) + \frac{d^4}{du^4} [\hat{Q}_{s,t}^n] (o) (x_o, x_o) \}.$$

$$\begin{aligned} \text{De plus on a (45)} \quad k_{t,t}''(o) &= \lim_n \frac{1}{n} \frac{d^2}{du^2} [\hat{P}_{t,t}^{2n}] (o) e(x_o, x_o) \\ &= 2 \lim_n E(\hat{Z}_{2n-1}(t) - \hat{Z}_{2n-1}(t))^2 = 0. \end{aligned}$$

Des égalités précédentes, du lemme (2-10) et du fait que d'après (34) on a :

$$E(\hat{Z}_{2n-1}(t) - \hat{Z}_{2n-1}(s))^{2p} = \frac{1}{2^p n^p} \left[\frac{d^{2p}}{du^{2p}} (\hat{P}_{s,t}^{2n}) (o) e(x_o, x_o) - \frac{d^{2p}}{du^{2p}} (\hat{P}_{t,t}^{2n}) (o) e(x_o, x_o) \right]$$

on déduit que pour tous $0 < \alpha_0 < 1$ $p = 1, 2$

Il existe des constantes $C'_p(\alpha, r)$ telles que pour tous $s, t \in I$

$$(46) \quad E(\hat{Z}_{2n-1}(t) - \hat{Z}_{2n-1}(s))^{2p} \leq C'_p(\alpha, r) \{ |t-s|^{pr\alpha} + \frac{|t-s|^{r\alpha}}{n} \}$$

Tout $\alpha_0, 0 < \alpha_1 < 1$ s'écrivant sous la forme $\alpha_0 = 2\alpha$

$0 < r < 1$ $0 < \alpha < 1$, la proposition (2-7) est ainsi démontrée.

D) DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION (2-8)

On commence par construire une approximation de la probabilité $\bar{\sigma}_{o,o}$ de fonction de répartition $N(t) = E(\langle F_t, e_o, e_o \rangle)$.

Pour cela on considère les opérateurs symétriques sur $[-L, L]$ définis par

$$L_{H_x} = L_H - x \pi_L \quad x \in \mathbb{R}.$$

π_L étant la projection définie par $\pi_L(u) = u_L$ où $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$

Soit $(p_n(L, \lambda))_{n \geq 1}$ la solution de l'équation :

$$-u_{n+1} - u_{n-1} + x_n u_n = \lambda u_n \quad n \in \mathbb{Z}$$

égale à 0 en $-L-1$ et à 1 en $-L$.

Les valeurs propres de la matrice symétrique définissant L_{H_x} sont les zéros du polynôme $P_{L+1}(L, \lambda) - x P_L(L, \lambda)$.

La relation [1] :

$$(47) \quad 0 < \sum_{k=-L}^L p_k^2(L, \lambda) = p_L(L, \lambda) \frac{d}{d\lambda} (p_{L+1}(L, \lambda)) - p_{L+1}(L, \lambda) \frac{d}{d\lambda} (p_L(L, \lambda))$$

établit que les racines de $p_{L+1}(L, \lambda) - x p_L(L, \lambda)$ sont simples.

Les sous-espaces propres sont donc de dimension 1 et si λ est une valeur propre, le vecteur

$$\frac{p_n(L, \lambda)}{\left(\sum_{k=-L}^L p_k^2(L, \lambda) \right)^{1/2}} \quad -L \leq n \leq L$$

est propre de norme 1.

Par conséquent si $L_{E_x}(t)$ est la résolution de l'identité de L_{H_x} la probabilité $r_{0,0}^x$ de fonction de répartition $\langle L_{E_x}(t) e_0, e_0 \rangle$ est égale à :

$$L_{\sigma_{0,0}}^x = \sum_{\{\lambda; p_{L+1}(L, \lambda) = x p_L(L, \lambda)\}} \frac{p_0^2(L, \lambda)}{\left(\sum_{k=-L}^L p_k^2(L, \lambda) \right)} \epsilon_\lambda$$

Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite de probabilités

$(L_{\sigma_{o,o}^x})_{L \geq 1}$ converge étroitement vers la probabilité $\sigma_{o,o}$ de fonction de répartition $\langle E_t e_o, e_o \rangle$.

Pour cela on utilise la méthode des moments ; pour tout $p \geq 1$ on a :

$$\int \lambda^p L_{\sigma_{o,o}^x} (d\lambda) = \langle (L_{H_x}) P_{e_o, e_o} \rangle$$

Or si $L \geq p+1$ on a : $(L_{H_x}) P_{e_o} = (L_H) P_{e_o} = H^p P_{e_o}$

et par conséquent : si $L \geq p+1$

$$\int \lambda^p L_{\sigma_{o,o}^x} (d\lambda) = \langle H^p P_{e_o, e_o} \rangle = \int \lambda^p \sigma_{o,o} (d\lambda)$$

ce qui établit le résultat cherché.

De même si τ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ la suite de probabilités

$L_{\sigma_{o,o}^\tau} = \int L_{\sigma_{o,o}^x} d\tau(x)$ $L \geq 1$ converge étroitement vers $\sigma_{o,o}$,

et on a également $\lim_L E(L_{\sigma_{o,o}^\tau}) = \bar{\sigma}_{o,o}$.

En choisissant τ égale à la loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$, on peut obtenir une expression assez simple de $L_{\sigma_{o,o}^\tau}$. En effet pour toute fonction ϕ continue à support compact on a, en tenant compte de (47) :

$$\begin{aligned} L_{\sigma_{o,o}^\tau}(\phi) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{dx}{1+x^2} \sum_{\lambda \in \{p_{L+1}(\lambda) = x p_L(\lambda)\}} \frac{p_o^2(L, \lambda)}{p_L^2(L, \lambda)} \left\{ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{p_{L+1}(L, \lambda)}{p_L(L, \lambda)} \right) \right\}^{-1} \phi(\lambda) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_o^2(L, \lambda)}{p_L^2(L, \lambda) + p_{L+1}^2(L, \lambda)} \phi(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

La dernière égalité est obtenue par changement de variable en

remarquant que dans chaque intervalle ouvert défini par la partition de $\mathbb{R}$ par les zéros de $p_L(L, \lambda)$ l'application $\lambda \rightarrow \frac{p_{L+1}(L, \lambda)}{p_L(L, \lambda)}$

croît strictement de $-\infty$ à $+\infty$ d'après (47), et que $L_{\sigma_{o,o}}$ ne change les zéros de $p_L(L, \lambda)$ car $p_{L+1}(L, \lambda)$ et $p_L(L, \lambda)$ n'ont pas de zéro commun.

Le résultat précédent peut encore s'écrire sous la forme

$$(48) \quad L_{\sigma_{o,o}}^{\tau}(\phi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\langle \bar{g}_o^{\lambda} \bar{g}_1^{\lambda} \dots \bar{g}_{-L}^{\lambda} x_o, x_o \rangle)^2}{\| \bar{g}_L^{\lambda} \bar{g}_{L-1}^{\lambda} \bar{g}_{-L}^{\lambda} x_o \|^2} \phi(\lambda) d\lambda$$

$\langle \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2$.

Il en résulte que :

$$(49) \quad E(L_{\sigma_{o,o}}^{\tau}(\phi)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) \int \frac{|\langle g x_o, x_o \rangle|^2}{\| g x_o \|^2} T_{\lambda}^L(2) e(g \bar{x}_o) \mu_{\lambda}^{L+1}(dg) d\lambda$$

or on peut écrire (voir l'appendice)

$$T_{\lambda}^{2L}(2) e = e_{\lambda,2} + R_{\lambda,2}^L e \quad L \geq 1$$

où $e_{\lambda,2} \in \mathcal{C}(X)$ est telle que $T_{\lambda}^2(2) e_{\lambda,2} = e_{\lambda,2}$ et $R_{\lambda,2}^L$ est un

opérateur de norme spectrale, strictement inférieure à 1.

Pour $\bar{x} \in X$ on définit $\cos^2 \bar{x}$ par $\cos^2 \bar{x} = \cos x$ où

x est un vecteur de norme 1, d'image $\bar{x}$ dans X .

On a alors :

$$(50) \quad E(L_{\sigma_{o,o}}^{2L\tau}(\phi)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) \left[\int \cos^2(g \bar{x}_o) e_{\lambda,2}(g \bar{x}_o) \mu_{\lambda}^{2L+1}(dg) \right] d\lambda \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\lambda) \left[\int \cos^2(g \bar{x}_o) R_{\lambda,2}^{2L} e(g \bar{x}_o) \mu_{\lambda}^{(2L+1)}(dg) \right] d\lambda$$

$$\text{Comme } \lim_L \int \cos^2(g \bar{x}_o) e_{\lambda,2}(g \bar{x}_o) \mu_{\lambda}^{2L+1}(dg) = \int \cos^2 \bar{x} e_{\lambda,2}(\bar{x}) \nu_{\lambda}(d\bar{x})$$

$$\text{et } \lim_L \left[\int \cos^2(g \bar{x}_o) R_{\lambda,2}^{2L} e(g \bar{x}_o) \mu_{\lambda}^{2L+1}(dg) \right] \leq \lim_L \| R_{\lambda,2}^{2L} \| = 0.$$

on déduit de (50) que :

$$\lim_L E(L_{\sigma_{o,o}}^{2L\tau}(\phi)) = \bar{\sigma}_{o,o}(\phi) = \frac{1}{\pi} \int \phi(\lambda) \left[\int \cos^2 \bar{x} e_{\lambda,2}(\bar{x}) \nu_{\lambda}(d\bar{x}) \right] d\lambda$$

ce qui établit que $\bar{\sigma}_{o,o}$ admet pour densité la fonction

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{\pi} \int \cos^2 \bar{x} e_{\lambda,2}(\bar{x}) \nu_{\lambda}(d\bar{x}).$$

La continuité de l'application $\lambda \rightarrow T_\lambda^2(2)$ de $\mathbb{R}$ dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(X))$ des applications linéaires continues de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{L}(X)$ entraîne la continuité de $\lambda \rightarrow e_{\lambda,2}$ et de $\lambda \rightarrow v_\lambda$, et par conséquent la densité de $\overline{\sigma_{0,0}}$ est continue.

Paragraphe 3 - LA FORMULE DE THOULESS

En reprenant les notations déjà définies, nous pouvons énoncer le

Théorème (3-1) :

Si μ est à support compact et charge au moins deux points :

1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, on a

$$P \text{ p s } \lim_{I,} \frac{1}{I+1} \text{Log} |P_{I+1}(t)| = \lim_{I,} \frac{1}{I+1} \text{Log} \|g_{I,}^t \dots g_{0,}^t x\| = \gamma(t)$$

$$\text{où } 0 < \gamma(t) = - \int \log \sigma(g, x) \mu_t(dg) \nu_t(dx).$$

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante "Formule de Thouless"

$$\gamma(t) = \int \text{Log} |t-x| N(dx)$$

Démonstration du théorème (3-1) :

1) Justifions tout d'abord l'affirmation 1)

Si μ charge au moins deux points, le sous-groupe fermé engendré par μ_t est non compact et ne contient pas de sous-groupe d'indice fini ayant une action réductible sur $\mathbb{R}^2$ [14].

Donc d'après le théorème du Fürstenberg [4] pour tout $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ on a

$$(51) \quad P \text{ p s } \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L+1} \log \| g_L^t g_{L-1}^t \dots g_0^t x \| = \gamma(t)$$

$$\text{où } (52) \quad \gamma(t) = - \int \log \sigma(g, x) \mu_t(dg) \nu_t(dx) > 0$$

Par ailleurs, $p_{L+1}(t)$ est un coefficient de la matrice $g_L^t g_{L-1}^t \dots g_0^t$, il résulte alors de [5] que l'on a également

$$(53) \quad P \text{ p s } \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{1}{L+1} \log |p_{L+1}(t)| = \gamma(t)$$

2) La justification du 3) sera basée sur plusieurs résultats préliminaires :

lemme (3-1) : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int \log |t-x| N(dx)$ est convergente.

Démonstration du lemme (3-1) :

Pour tous $L \geq 1$, $t \in \mathbb{R}$ $M \in \mathbb{N}$ on a :

$$(54) \quad \frac{1}{L+1} \log |p_{L+1}(t)| = \int \log |t-x| \tilde{N}_L(dx) \leq \int \sup(\log |t-x|, -M) \tilde{N}_L(dx).$$

P-presque sûrement les probabilités de fonction de répartition $(\tilde{N}_L)_{L \geq 1}$, convergent étroitement vers la probabilité de fonction de répartition N (théorème 1-1) ; elles ont de plus leur support dans un compact fixe J . Par conséquent on déduit de l'inégalité précédente et en tenant compte du 1) que pour tout $M \in \mathbb{N}$:

$$(55) \quad 0 < \gamma(t) \leq \int \sup(\log |t-x|, -M) N(dx)$$

ce qui assure puisque N est à support compact
l'intégrabilité par rapport à la probabilité dN
de la fonction $x \rightarrow |\log ||t-x||$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$; on a alors le

lemme (3-2) :

Pour λ presque tout t on a :

$$\gamma(t) = \int \log |t-x| N(dx)$$

Démonstration du lemme (3-2) :

Comme la suite de fonctions de répartition $(N_L)_{L \geq 1}$, converge
étroitement vers la probabilité de fonction de répartition N ,
on en déduit que pour tout $b > 0$, on a :

$$(56) \quad P p s \quad \lim_L \int_{-b}^b dt \left| \int \log |t-x| \tilde{N}_L(dx) - \int \log |t-x| N(dx) \right| = 0$$

Le lemme (3-2) se déduit alors de (53) et de (56).

Avant d'énoncer une proposition qui nous sera également utile,
précisons une notation :

Pour tout intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, nous noterons $\mathcal{L}_{loc} (]a, b[)$ l'espace des fonctions f de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle compact $T \subset]a, b[$, il existe une constante $0 < \alpha(T) < 1$, de sorte que l'application $t \in T \rightarrow f(t)$ soit Lipschitzienne d'ordre $\alpha(T)$. On a alors la

proposition (3-1) : l'application $t \rightarrow \gamma(t)$ appartient à $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$

dont nous donnerons la preuve à la fin du paragraphe 3.

Achevons alors la preuve du théorème (3-1).

Soit $A > 0$ tel que $] -A, A[\supset J$.

La fonction $x \rightarrow \psi_A(x) = 1_{]-A, A[}(x) N(x)$ appartient à l'espace $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc [11] une transformée de Hilbert $\tilde{\psi}_A \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ définie par $\tilde{\psi}_A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\psi}_{A, \varepsilon}(t)$ λ presque sûrement, où

$$\tilde{\psi}_{A, \varepsilon}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|t-x| > \varepsilon} \frac{\psi_A(x) dx}{t-x}$$

Il résulte du lemme (3-2) par intégration par parties que :

$$\lambda \text{ p s } \gamma(t) = \log |A-t| - \pi \tilde{\psi}_A(t),$$

c'est-à-dire

$$(57) \quad \lambda \text{ p s } \tilde{\psi}_A(t) = \Phi_A(t)$$

$$\text{où } (58) \quad \Phi_A(t) = \frac{1}{\pi} (\log |A-t| - \gamma(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}).$$

D'après la proposition (3-2) et l'égalité précédente, la fonction Φ_A appartient à $\mathcal{L}_{loc} (]-A, A[)$. Si l'on pose

$$\tilde{\Phi}_{A, \varepsilon}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-t| > \varepsilon} \frac{\Phi_A(t)}{x-t} dt$$

on déduit de la théorie de la transformée de Hilbert [11] dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ que $\lambda \text{ p s }$ la limite $\tilde{\Phi}_A(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{\Phi}_{A, \varepsilon}(x)$ existe ; de plus

comme Φ_A appartient à $\mathcal{L}_{loc} (]-A, A[)$ la limite précédente existe

pour tout $x \in]-A, A[$ et $\phi_A \in \mathcal{L}_{loc}]-A, A[$.

La formule d'inversion de la transformée de Hilbert permet de conclure que :

$$\lambda p s \quad 1_{]-A, A[} N(x) = \phi_A(x).$$

Mais comme $x \rightarrow N(x)$ est continue et de plus $\phi_A \in \mathcal{L}_{loc}]-A, A[$, on a :

$$\forall x \in]-A, A[\quad \psi_A(x) = 1_{]-A, A[} N(x) = \phi_A(x).$$

Ceci établit en particulier puisque A peut être choisi arbitrairement que $N \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$.

Comme $\psi_A \in \mathcal{L}_{loc}]-A, A[$, on en déduit que $\psi_A(t)$ est définie pour tout $t \in]-A, A[$ et que $\psi_A \in \mathcal{L}_{loc}]-A, A[$.

Les deux membres de (57) sont alors des fonctions continues de t sur $]-A, A[$ et l'on a donc :

$$(59) \quad \forall t \in]-A, A[\quad \gamma(t) = \log |A-t| - \pi \psi_A(t)$$

Comme on a $\log |A-t| - \pi \psi_A(t) = \int \log |t-x| dN(x)$, par intégration par parties, on obtient donc :

$$(60) \quad \forall t \in]-A, A[\quad \gamma(t) = \int \log |t-x| dN(x)$$

et le théorème (3-1) est ainsi démontré.

Avant de prouver la proposition (3-1), énonçons sous forme de proposition un résultat acquis au cours de la démonstration précédente.

Proposition (3-2) : L'application $t \rightarrow N(t)$ appartient à $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R})$.

Démonstration de la proposition (3-1) : elle est calquée sur la preuve de la proposition (2-10).

1) On commence par établir le

lemme (3-1) : sous les hypothèses du théorème (3-1) pour tout compact

$T \in \mathbb{R}$ il existe un réel $0 < \alpha(T) < 1$ tel que pour $0 < \alpha \leq \alpha(T)$

$$\lim_n \left[\sup_{\substack{t \in T \\ x \neq y \in X}} \int \frac{d^\alpha(gx, gy)}{d^\alpha(x, y)} \mu_t^n(dg) \right]^{1/n} = \rho(T, \alpha)$$

avec $\rho(T, \alpha) < 1$

démonstration du lemme (3-1) :

Pour $0 < \alpha < 1$ on a l'inégalité

$$\sup_{\substack{t \in T \\ x \neq y \in X}} \int \frac{d^\alpha(gx, gy)}{d^\alpha(x, y)} \mu_t^n(dg) \leq \sup_{\substack{x \in X \\ t \in T}} \int \frac{1}{\sigma^{2\alpha}(g, x)} \mu_t^n(dg), \quad n \geq 1.$$

Comme la suite de fonctions $\frac{1}{n} \int \log \sigma(g, x) \mu_t^n(dg) \quad n \geq 1$, converge uniformément sur $X \times T$ vers $\gamma(t) > 0$ (2° du théorème (3-1)) il existe un entier N_0 tel que :

$$\beta = \inf_{\substack{t \in T \\ x \in X}} \int \log \sigma(g, x) \mu_t^{N_0}(dg) > 0$$

Si $\delta(g) = \sup_{x \in X} \sigma(g, x)$ on a l'inégalité :

$$\sup_{\substack{t \in T \\ x \in X}} \int \frac{1}{\sigma^{2\alpha}(g, x)} \mu_t^{N_0}(dg) \leq 1 - 2\alpha\beta + 2\alpha^2 \int \delta^2(g) e^{2\alpha\delta(g)} \mu_t^{N_0}(dg)$$

d'où puisque $\beta > 0$, il existe un réel $0 < \alpha(T) < 1$ tel que pour $0 < \alpha \leq \alpha(T)$:

$$(61) \quad \sup_{\substack{t \in T \\ x \in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g, x)} \mu_t^{N_0}(dg) < 1$$

Par ailleurs la suite $\left(\sup_{\substack{t \in T \\ x \in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g, x)} \mu_t^n(dg) \right) \quad n \geq 1$

est sous multiplicative, donc on a :

$$\lim_n \left(\sup_{\substack{t \in T \\ x \in X}} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g, x)} \mu_t^n(dg) \right)^{1/n} = \inf_n \left(\sup_{t \in T} \int \frac{1}{\sigma^\alpha(g, x)} \mu_t^n(dg) \right)^{1/n}$$

ce qui - compte-tenu de (61) - établit le lemme (3-1).

Le rôle de ce lemme est analogue à celui du lemme (2-7).

- 2) On considère de même que dans le paragraphe 2 B) pour $0 < \alpha < 1$ l'algèbre de Banach $\mathcal{L}'_\alpha$ des fonctions Lipschitziennes d'ordre α sur X ; les notations sont identiques à celles du paragraphe 2 B) et uniquement modifiées par l'adjonction d'un prime.

On étudie alors la famille des opérateurs $P_t : t \in \mathbb{R}$

$$(62) \quad P_t f(x) = \int f(gx) \mu_t(dg) \quad x \in X,$$

où f est mesurable bornée sur X .

Ces opérateurs satisfont alors aux propriétés énoncées dans les propositions suivantes et dont la preuve est la même que celle des propositions (2-9) et (2-10- (cas où $u=0$), en substituant le lemme (3-1) au lemme (2-7).

Proposition (3-2) :

- 1) Pour tout $0 < \alpha < 1$ P_t est un opérateur borné sur $\mathcal{L}'_\alpha$, et si T est un compact de $\mathbb{R}$ on a :

$$\sup_{t \in T} \|P_t\|'_\alpha < +\infty$$

- 2) Si $0 < \alpha < 1$, $0 < r < 1$ et si T est un compact de $\mathbb{R}$, il existe une constante $C(T, \alpha)$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{L}'_\alpha$ et tous $s, t \in T$

$$\|P_t \phi - P_s \phi\|_{(1-r)\alpha} \leq C(T, \alpha) |t-s|^{\tau\alpha} \|\phi\|_\alpha$$

Proposition 3-3 : Soit T un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour tous $t \in T$ et $0 < \alpha \leq (T)$, P_t est un opérateur quasi-compact de $\mathcal{L}'_\alpha$ dans $\mathcal{L}'_\alpha$ et tel que pour tout $n \geq 1$ on ait :

$$P_t^n = V_t + Q_t^n$$

où Q_t est un opérateur de $\mathcal{L}'_\alpha$ dans $\mathcal{L}'_\alpha$ vérifiant

$$Q_t e = 0, \quad V_t Q_t = 0$$

De plus si $r'_\alpha(Q_t)$ est le rayon spectral de Q_t dans $\mathcal{L}'_\alpha$ on a :

$$\sup_{t \in T} r'_\alpha(Q_t) < 1$$

On en déduit le

corollaire (3-1) : Si T est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, si $0 < \alpha \leq \alpha(T)$, si $0 < r < 1$, il existe une constante $C(r, \alpha, T)$ telle que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{L}'_\alpha$ on ait pour tous s, t de T

$$|v_t(\phi) - v_s(\phi)| \leq C(r, \alpha, T) |t-s|^{r\alpha} \|\phi\|'_\alpha$$

dont la preuve est la même que celle du lemme (2-11) 1).

Ce corollaire nous permet de terminer la preuve de la proposition (3-1). En effet, on a :

$$\begin{aligned} (63) \quad \gamma(t) - \gamma(t_0) &= \int \log \sigma(g, x) \mu_t(dg) v_t(dx) - \int \log \sigma(g, x) \mu_{t_0}(dg) v_{t_0}(dg) \\ &= v_t(\phi_t) - v_{t_0}(\phi_t) + v_{t_0}(\phi_t - \phi_{t_0}) \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad \phi_t(x) = \int \log \sigma(g, x) d\mu_t(g).$$

Comme l'application $(t, x) \rightarrow \phi_t(x)$ de $\mathbb{R} \times X$ dans $\mathbb{R}$ est continument différentiable, on en déduit que pour tout intervalle compact T de $\mathbb{R}$, on a :

$$\sup_{t \in T} \|\phi_t\|'_\alpha < +\infty, \quad \sup_{x \in X} |\phi_t(x) - \phi_{t_0}(x)| \leq k(T) |t - t_0|$$

où $k(T)$ est une constante.

Par conséquent en tenant compte du corollaire (3-1), on obtient que si $0 < \alpha \leq \alpha(T)$, $0 < r < 1$, $t, t_0 \in T$

$$(64) \quad |\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq C(r, \alpha, T) \sup_{t \in T} \|\phi'_t\|'_\alpha |t - t_0|^{r\alpha} + k(T) |t - t_0|$$

ce qui prouve bien que la fonction $t \rightarrow \gamma(t)$ appartient à $\mathcal{L}_{loc}^p(\mathbb{R})$.

APPENDICE

Dans cet appendice, nous précisons des résultats concernant certains opérateurs, utilisés au cours des démonstrations du lemme (2-7), et de la proposition (2-8). Les notations utilisées sont les mêmes que précédemment.

Soit p une probabilité sur $SL(2, \mathbb{R})$ ayant une densité à support compact. On considère l'opérateur $T(2\alpha)$ défini sur $\mathcal{C}(X)$ par

$$T(2\alpha) f(\bar{x}) = \int \sigma^{2\alpha}(g, \bar{x}) f(g\bar{x}) p(dg)$$

$f \in \mathcal{C}(X), \bar{x} \in X, \alpha \in \mathbb{R}.$

On a alors la

Proposition A₁.

- 1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $T(2\alpha)$ est un opérateur compact positif sur $\mathcal{C}(X)$;
Son rayon spectral $r(2\alpha)$ est tel que la fonction $\alpha \rightarrow \log r(2\alpha)$ soit convexe, et que

$$r(0) = r(2) = 1, \quad r(2\alpha) < 1 \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < 1$$

- 2) L'opérateur $T(2)$ peut s'écrire sous la forme :

$$T(2) [f] = m(f) e_2 + R_2(f)$$

où m est la probabilité sur X invariante par les rotations.

e_2 l'unique fonction positive de $\mathcal{C}(X)$ telle que $T(2)e_2 = e_2$
et $m(e_2) = 1.$

R_2 est un opérateur de $\mathcal{C}(X)$ de norme spectrale strictement inférieure à 1 et tel que :

$$m R_2 = 0 \quad R_2(e_2) = 0.$$

Démonstration de la proposition A₁.

- 1) Pour établir la compacité de l'opérateur $T(2\alpha)$, on commence par supposer que p a une densité continue : dans ce cas $T(2\alpha)$ est défini par un noyau continu [18], d'où le résultat.

Le cas général s'obtient en approximant la probabilité p en variation à l'aide d'une suite de probabilités p_n $n \geq 1$, admettant des densité continues dans un même compact fixe.

L'inégalité de Hölder permet facilement d'obtenir que pour

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < 1 \quad n \geq 1 \quad \text{on a}$$

$$\log ||T^n(2t\alpha + 2(1-t)\beta)|| \leq t \log ||T^n(2\alpha)|| + (1-t) \log ||T^n(2(1-t)\beta)||$$

d'où la convexité de la fonction $\alpha \rightarrow \log r(2\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log ||T^n(2\alpha)||^{1/n}$

- 2) Pour terminer la démonstration, nous utiliserons la propriété suivante des opérateurs $T(2\alpha)$:

lemme A : Il existe un réel $\alpha_0 > 0$ tel que pour $|\alpha| < \alpha_0$ l'opérateur $T^n(2\alpha)$ $n \geq 1$ peut s'écrire sous la forme

$$T^n(2\alpha) = \lambda^n(2\alpha) v_{2\alpha}(\cdot) e_{2\alpha} + R^n(2\alpha)$$

où : $\lambda(2\alpha) > 0$ est l'unique valeur propre de plus grand module de $T(2\alpha)$

$v_{2\alpha}$ l'unique probabilité sur X telle que $v_{2\alpha} T(2\alpha) = \lambda(2\alpha) v_{2\alpha}$

$e_{2\alpha} \geq 0$ l'unique élément de $\mathcal{C}(X)$ tel que

$$T(2\alpha) e_{2\alpha} = \lambda(2\alpha) e_{2\alpha}, \quad v_{2\alpha}(e_{2\alpha}) = 1$$

$R(2\alpha)$ est un opérateur de $\mathcal{C}(X)$ de rayon spectral strictement inférieur à $\lambda(2\alpha)$ tel que

$$v_{2\alpha} Q(2\alpha) = 0 \quad Q(2\alpha) e_{2\alpha} = 0$$

De plus les applications $\alpha \rightarrow v_{2\alpha}$, $\alpha \rightarrow e_{2\alpha}$, $\alpha \rightarrow R(2\alpha)$ sont analytiques.

Démonstration du lemme A :

L'énoncé du lemme A est satisfait pour l'opérateur $T(o)$; on a :

$$T^n(o) = v e + R^n \quad n \geq 1$$

où v est l'unique probabilité p invariante portée par X .

D'autre part l'application $\alpha \rightarrow T(2\alpha)$ est analytique. La théorie des perturbations analytiques d'opérateurs assure qu'il existe un réel α_0 tel que pour $|\alpha| < \alpha_0$ $T(2\alpha)$ admette une unique valeur simple isolée de module égal au rayon spectral de $T(2\alpha)$, et de sous-espace propre de dimension 1.

Comme d'autre part, $T(2\alpha)$ est un opérateur positif, cette valeur propre est égale au rayon spectral de $T(2\alpha)$ et admet une fonction propre positive [17].

L'énoncé du lemme A se déduit alors immédiatement de ce qui précède et de la théorie des perturbations analytiques d'opérateurs.

- 3) Etablissons le 2) de la proposition A_1 . Pour cela on raisonne par dualité. Nous notons $\check{T}(2\alpha)$ l'opérateur défini de façon analogue à $T(2\alpha)$, mais en remplaçant la probabilité p par sa symétrisée $\check{p}$. Il est clair que $\check{T}(2\alpha)$ a les mêmes propriétés que $T(2\alpha)$.

Si θ est une mesure bornée sur X , et si $\psi \in \mathcal{C}(X)$, on note :

$$(\theta, \psi) = \int \psi(x) d\theta(x).$$

On a alors la relation :

$$(1') \quad (\phi.m, T^k(2) [\psi]) = (\psi.m, \check{T}^k(o) [\phi]) = ((\psi.m)^{v_k} T(o), \phi)$$

où $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X)$, $k \geq 0$.

Cette relation résulte du fait que $\sigma^2(g, \bar{x}) = \frac{dg^{-1}m}{dm}(\bar{x})$

$\bar{x} \in X$, $g \in SL(2, \mathbb{R})$.

Si λ est une valeur spectrale non nulle de l'opérateur compact $T(2)$, il existe un entier $k \geq 1$ et une fonction $\psi_\lambda \in \mathcal{C}(X)$ telle que

$$[\lambda I - T(2)]^k \psi_\lambda = 0$$

$$m(\psi_\lambda) = 1.$$

On en déduit d'après (1') que :

$$(\psi_\lambda \cdot m)[\lambda I - \overset{v}{T}(o)]^k = 0.$$

L'adjoint de $\overset{v}{T}(o)$, admet 1 pour unique valeur propre de module supérieur ou égal à 1 ; cette valeur propre est simple, et le sous-espace propre correspondant est engendré par l'unique probabilité

$\overset{v}{p}$ invariante $\overset{v}{v}$ portée par X . Il en résulte que si $|\lambda| \geq 1$

on a $\lambda = 1$, $k=1$ et $\psi_1 m = \overset{v}{v}$. Posons $e_2 = \psi_1 \geq 0$.

Comme la dimension de l'espace des mesures bornées θ sur X satisfaisant à $\theta[I - T(2)] = 0$, est la même que celle de l'espace vectoriel des fonctions $f \in \mathcal{C}(X)$ satisfaisant à $[I - T(2)] f = 0$, c'est-à-dire 1, et que d'après (1') on a $m T(2) = m$, on en déduit le 2) de la proposition A_1 .

4) L'application $\alpha \rightarrow \lambda(\alpha)$ est dérivable et l'on a [4], [18]

$$\lambda'(o) = - \int \log \sigma(g, x) p(dg) v(dx) < 0.$$

Comme d'autre part on a d'après ce qui précède $r(o) = r(2) = 1$, et que l'application $\alpha \rightarrow \log r(2\alpha)$ est convexe, il est clair que pour $0 < \alpha < 1$ on a nécessairement : $0 < r(2\alpha) < 1$

REFERENCES

- [1] Atkinson *Discrete and continuous boundary - Problems*
Academic Press New-York (1964).
- [2] Billingsley *Convergence of probability measures -*
John Wiley and sons - New-york (1968).
- [3] Dunford - Schwartz *Linear operators - Part 1.*
Interscience Publishers - New-York (1958).
- [4] Furstenberg *Non-commuting random products -*
Trans. American Math Soc 108 (1963) p. 337-428.
- [5] Guivarc'h - Raugi *Frontière de Furstenberg - Propriétés de contraction
et théorèmes de convergence.*
Séminaire de probabilités - Rennes 1981 et 1982.
- [6] Ishii *Localisation of eigenstates and transport phenomena
in the one dimensional disordered system.*
Suppl. Progr. Theor. Phys. 53, 77 (1963).
- [7] Kunz et Souillard *Sur le spectre des opérateurs aux différences finies
aléatoires.*
Commun. Math Phys. 78 (1980) p. 201-246.
- [8] Lacroix *Problèmes probabilistes liés à l'étude des opérateurs
aux différences aléatoires.*
Annales de l'Institut Elie Cartan(Nancy) n°7
- [9] Le Page *Théorèmes limites pour les produits de matrices
aléatoires.*
Séminaire de Rennes 1981.
- [10] Nagaev *Some limit theorems for stationary Markov chains -*
Theory of Proba and applications 2 (1957) p.378-406.
- [11] Neri *Singular Integrals*
Lecture Notes in Mathematics 200.
- [12] Neveu *Bases mathématiques du calcul des probabilités -*
Masson et Cie.
- [13] Norman *Markov processes and learning models.*
Academic Press New-York vol. 84
- [14] O. Connor *Disordered Harmonic Chain.*
Commun. Math. Physics 45 (1975) p. 63-77.

.../...

/...

- 15 Pastur *Spectral properties of disordered systems in the
one body approximation.*
Commun. Math Physics 75(1980) p. 179-196.

- 16 Reznikova *The central limit theorem for the spectrum of
random Jacobi matrices.*
Theory of Proba and its applications - volume XXV
number 3 (1980).

- 17 Schaefer *Topological vector spaces.*
The Mac Millan Company New-York (1967).

- 18 Tutubalin *On limit theorems for the product of random matrices.*
Theory of Proba. Applic. 10 (1965) p. 15-27.