

JEAN JACOD

**Topologies pour les mesures sur un produit d'espaces,
application aux mesures aléatoires**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1982, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1982__1_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TOPOLOGIES POUR LES MESURES SUR UN PRODUIT D'ESPACES,
APPLICATION AUX MESURES ALEATOIRES

Jean JACOD

Dans ce texte, nous améliorons légèrement l'article [4] publié il y a un an, et nous en donnons une application aux mesures aléatoires à valeurs entières, considérées comme mesures vectorielles dans l'esprit de [2].

§1. Compléments topologiques

§1.a. Rappelons d'abord les hypothèses et les notations de l'article [4]. Soit (Y, \underline{Y}) un espace mesurable et (E, \underline{E}) un espace polonais muni de ses boréliens, et d'une distance d ; soit $\tilde{Y} = Y \times E$, $\tilde{\underline{Y}} = \underline{Y} \otimes \underline{E}$, et

B = espace des fonctions bornées mesurables sur (Y, \underline{Y}) ;

\tilde{B} = espace des fonctions bornées mesurables sur $(\tilde{Y}, \tilde{\underline{Y}})$;

C = espace des fonctions continues bornées sur E ;

$\tilde{C} = \{\varphi \in \tilde{B} : \varphi(y, \cdot) \in C \text{ pour tout } y \in Y\}$;

BL_a = espace des fonctions lipschitziennes sur E , bornée par a et de coefficient de Lipschitz au plus égal à a ;

$\tilde{BL}_a = \{\varphi \in \tilde{B} : \varphi(y, \cdot) \in BL_a \text{ pour tout } y \in Y\}$;

$1 \otimes C = \{\varphi = 1 \otimes f : f \in C\}$;

$1 \otimes BL_a = \{\varphi = 1 \otimes f : f \in BL_a\}$.

Enfin, on pose

$$(1.1) \quad \tilde{BL} = \bigcup_{a>0} \tilde{BL}_a,$$

ce qui n'est pas la même notation que dans [4]: cependant, les théorèmes de [4] où \tilde{BL} apparaît doivent être lus avec la définition (1.1) ci-dessus, et pas celle de [4]! (une autre erreur de [4] peut prêter à confusion: la référence [6] a été notée [4] à diverses reprises, notamment pp.7,8).

Par ailleurs, soit \mathcal{E} un espace vectoriel muni d'une quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ pour lequel il est complet. On note $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ l'espace des mesures sur (Y, \underline{Y}) à valeurs dans \mathcal{E} , et on écrit simplement $\mathcal{M}(Y)$ lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}$, auquel cas on a alors l'espace des mesures réelles signées finies sur (Y, \underline{Y}) . Pour la définition et les propriétés des mesures vectorielles, nous renvoyons à [17], ou à [4] où toutes les propriétés utiles ici ont été rappelées. En particulier si $\eta \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$ on a un espace $L^1(\eta)$ de fonctions intégrables, qui contient l'espace B . On introduit aussi la quasi-norme de la "semi-variation" (la variation, lorsque $Y = \mathbb{R}$):

$$(1.2) \quad \|\eta\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} = \sup_{g \in B, |g| \leq 1} \|\eta(g)\|_{\mathcal{E}}.$$

On définit de même $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ et $\mathcal{M}(\tilde{Y})$. Si maintenant $\mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ et si $\varphi \in L^1(\mu)$, on pose pour tout $g \in B$:

$$(1.3) \quad \varphi \times \mu(g) = \mu(g \circ 1 \cdot \varphi),$$

ce qui définit une mesure $\varphi \times \mu \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)$.

§1.b. Le problème posé dans [4] consiste à définir une topologie sur $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ qui soit "forte" (en variation) sur le facteur Y et "faible" (étroite) sur le facteur E . A cet effet on définit la convergence d'une famille filtrante (μ_α) de $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(\tilde{Y})$ vers une limite μ , et il y a plusieurs définitions possibles exprimées par les conditions suivantes:

$$(A1) \quad \|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour toute } \varphi \in \tilde{C}.$$

$$(A2) \quad \|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour toute } \varphi \in \tilde{BL}.$$

$$(A3) \quad \|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour toute } \varphi \in 1 \circ C.$$

$$(A4) \quad \|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)} \longrightarrow 0 \quad \text{pour toute } \varphi \in 1 \circ BL_1.$$

$$(A5) \quad \|\mu_\alpha - \mu\|_{\tilde{BL}_1} \longrightarrow 0, \quad \text{où } \|\nu\|_{\tilde{BL}_1} = \sup_{\varphi \in \tilde{BL}_1} \|\nu(\varphi)\|_{\mathcal{E}} = \sup_{\varphi \in \tilde{BL}_1} \|\varphi \times \nu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)}$$

$$(A6) \quad \|\mu_\alpha - \mu\|_{1 \circ BL_1} \longrightarrow 0, \quad \text{où } \|\nu\|_{1 \circ BL_1} = \sup_{f \in B, |f| \leq 1, g \in BL_1} \|\nu(f \circ g)\|_{\mathcal{E}} \\ = \sup_{\varphi \in 1 \circ \tilde{BL}_1} \|\varphi \times \nu\|_{\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Y)}.$$

Les différentes implications entre ces propriétés sont assez compliquées; elles sont explicitées dans le théorème (6.2) de [4]. Cependant, dans le cas où toutes les mesures μ_α sont "positives" donne lieu à l'équivalence de toutes ces conditions, comme nous allons le voir ci-dessous.

§1.c. Mesures positives. On suppose dans la suite que $\tilde{\Sigma}$ vérifie:

(1.4) Hypothèse: $\tilde{\Sigma}$ est réticulé, le cône positif de $\tilde{\Sigma}$ est fermé, et si $a, b \in \tilde{\Sigma}$ vérifient $|a| \leq |b|$, alors $\|a\|_{\tilde{\Sigma}} \leq \|b\|_{\tilde{\Sigma}}$. ■

On note $\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}^+(\tilde{Y})$ l'ensemble des mesures $\mu \in \mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{Y})$ qui sont positives au sens où

(1.5) $\varphi \in \tilde{B}, \varphi \geq 0 \longrightarrow \mu(\varphi) \geq 0$ (dans $\tilde{\Sigma}$).

Remarquer qu'on a alors

(1.6) $\|\mu\|_{\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{Y})} = \|\mu(1)\|_{\tilde{\Sigma}}, \quad \|\varphi \times \mu\|_{\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(Y)} \leq \|\mu(|\varphi|)\|_{\tilde{\Sigma}}.$

(1.7) THEOREME: En restriction au cône $\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}^+(\tilde{Y})$, les conditions (A1)-(A6) sont toutes équivalentes entre elles, et aussi équivalentes aux deux conditions suivantes:

(A7) $\|1_{Y \times A} \times (\mu_x - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour tout $A \in \underline{\tilde{E}}$ tel que $\mu(1_{Y, \partial A}) = 0$,
(où ∂A est la frontière de A);

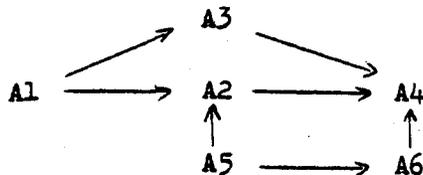
(A8) $\|1_{\{\varphi > a\}} \times (\mu_x - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute $\varphi \in \tilde{C}$ et tout $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(1_{\{g=a\}}) = 0$.

(1.8) REMARQUES: 1) L'équivalence de (A2)-(A7) a déjà été montrée dans [4] (théorèmes (2.5) et (7.7)).

2) L'amélioration apportée ici suit les idées de [5]. Remarquons que (A8) n'est pas équivalente (sauf si la famille filtrante est une suite) à la condition suivante, plus forte:

(A8') $\|1_A \times (\mu_x - \mu)\|_{\mathcal{M}_{\tilde{\Sigma}}(Y)} \longrightarrow 0$ pour tout $A \in \underline{\tilde{Y}}$ tel que $\mu(1_{\partial A}) = 0$, où $\partial A = \{(y, x) : x \text{ est dans la frontière de la section } A_y \text{ de } A\}$.

Démonstration. Les implications suivantes sont immédiates:



et il suffit donc de montrer qu'on a: $(A4) \longrightarrow (A7)$, $(A7) \longrightarrow (A5)$,
 $(A2) \longrightarrow (A8)$, et $(A8) \longrightarrow (A1)$.

a) $(A4) \implies (A7)$ et $(A7) \implies (A5)$: On reprend mot pour mot la preuve de [4] (pp. 4,5, et 21), en rappelant la propriété suivante (cf. (7.8) de [4]), valable pour toutes les mesures vectorielles:

(1.9) Si (A_α) est une famille de parties mesurables de \tilde{Y} , deux-à-deux disjointes, on a $\mu(1_{A_\alpha}) \neq 0$ pour au plus une infinité dénombrable d'entre elles.

(Note: à la page 5 de [4], au lieu de $|\varphi - \psi| \leq 1/n$ il faut lire $|\varphi - \psi| \leq 2/n$ et faire ensuite des modifications en conséquence dans les diverses majorations).

b) $(A2) \implies (A8)$: Soit $\varphi \in \tilde{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\mu(1_{\{\varphi = a\}}) = 0$. Soit $A = \{\varphi > a\}$ et $F = \bar{A}$, i.e. chaque coupe F_y de F est la fermeture dans E de la coupe A_y . Soit

$$\theta(y, x) = \begin{cases} 1 \wedge d(x, F_y) & \text{si } F_y \neq \emptyset \\ 1 & \text{si } F_y = \emptyset. \end{cases}$$

Si (x_n) est une suite dense dans E , on a

$$\{\theta \geq b\} = \begin{cases} \bigcap_n \{(y, x) : d(x, x_n) \geq b \text{ ou } \varphi(y, x_n) \leq a\} & \text{si } b \leq 1 \\ \emptyset & \text{si } b > 1. \end{cases}$$

On en déduit que θ est mesurable. Comme $\theta(y, \cdot) \in \text{BL}_1$ par définition, on a donc $\theta \in \tilde{\text{BL}}_1$. Soit alors $\phi_n(t) = 0$ pour $t \geq 1/n$ et $\phi_n(t) = n(\frac{1}{n} - t)$ pour $0 \leq t < 1/n$, et $\theta_n = \phi_n \circ \theta$. Alors

$$(1.10) \quad \theta_n \in \tilde{\text{BL}}_n, \quad 1_F = \lim_{(n)} \downarrow \theta_n.$$

Si $\eta > 0$ on note $F(\eta)$ l'ensemble dont chaque coupe $F(\eta)_y$ est la fermeture dans E de l'ensemble $\{x : \varphi(y, x) < a + \eta\}$. Comme ci-dessus, on construit des fonctions $\theta'_{n, \eta}$ telles que

$$(1.11) \quad \theta'_{n, \eta} \in \tilde{\text{BL}}_n, \quad 1_{F(\eta)} = \lim_{(n)} \downarrow \theta'_{n, \eta}.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$. On a $F(\eta) \subset \{\varphi \leq a + \eta\}$, donc

$$\{\varphi > a\} \subset \lim_{\eta \downarrow 0} F(\eta)^c \subset A \subset F \subset \{\varphi \geq a\}.$$

Comme $\mu(1_{\{\varphi = a\}}) = 0$ et comme μ est positive, il existe $\eta > 0$ tel que $\|\mu(1_{F \setminus F(\eta)^c})\|_\varepsilon \leq \varepsilon$. D'après (1.10) et (1.11) il existe n tel que si $\psi = \theta_n$ et $\psi' = 1 - \theta'_{n, \eta}$ on ait

$$(1.13) \quad \psi' \leq 1_A \leq \psi, \quad \|\mu(\psi - \psi')\|_\varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

Enfin, comme $\psi, \psi' \in \widetilde{BL}_n$, il existe d'après (A2) un indice β tel que

$$\alpha > \beta \implies \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon, \quad \|\psi' \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon.$$

Donc si $\alpha > \beta$ on a d'après (1.6) et (1.12)

$$\begin{aligned} \|1_A \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} &\leq \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|(\psi - 1_A) \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \\ &\leq \varepsilon + \|\mu_\alpha (\psi - 1_A)\|_\xi + \|\mu (\psi - 1_A)\|_\xi \\ &\leq \varepsilon + \|\mu_\alpha (\psi - \psi')\|_\xi + \|\mu (\psi - \psi')\|_\xi \\ &\leq \varepsilon + 2\|\mu (\psi - \psi')\|_\xi + \|(\mu_\alpha - \mu) (\psi - \psi')\|_\xi \\ &\leq 5\varepsilon + \|(\psi - \psi') \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \\ &\leq 5\varepsilon + \|\psi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|\psi' \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq 7\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\|1_A \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \longrightarrow 0$.

c) (A8) \implies (A1): Soit $\varphi \in \widetilde{\mathcal{C}}$ et $\varepsilon > 0$. Etant donné (1.9) il existe des réels $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ tels que $a_{i+1} - a_i \leq \varepsilon$, et $a_0 < \varphi < a_n$ identiquement, et $\mu(1_{\{\varphi = a_i\}}) = 0$. Soit

$$f = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i-1} 1_{\{a_{i-1} < \varphi \leq a_i\}},$$

de sorte que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$. Comme $1_{\{a_{i-1} < \varphi \leq a_i\}} = 1_{\{\varphi > a_{i-1}\}} - 1_{\{\varphi > a_i\}}$, la condition (A8) implique l'existence de β tel que

$$\alpha > \beta \implies \|f \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon, \quad \|1 \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq \varepsilon;$$

enfin, d'après (1.6) et le fait que $|f - \varphi| \leq \varepsilon$ on a pour $\alpha > \beta$:

$$\begin{aligned} \|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} &\leq \|f \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} + \|\mu_\alpha (|f - \varphi|)\|_\xi + \|\mu (|f - \varphi|)\|_\xi \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon \|\mu_\alpha(1)\|_\xi + \varepsilon \|\mu(1)\|_\xi \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon \|\mu(1)\|_\xi + \varepsilon \|(\mu_\alpha - \mu)(1)\|_\xi \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon \|\mu(1)\|_\xi + \|1 \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \leq 2[\varepsilon + \varepsilon \|\mu(1)\|_\xi] \end{aligned}$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire on obtient $\|\varphi \times (\mu_\alpha - \mu)\|_{\mathcal{M}_\xi(Y)} \longrightarrow 0$. ■

§1.d. Mesures σ -finies. L'espace $\mathcal{M}_\xi(\widetilde{Y})$ est l'espace des mesures "finies" à valeurs dans ξ , dans le sens où elles permettent d'intégrer toutes les fonctions bornées.

Il y a bien-sûr une notion de mesures " σ -finies" qui nous sera utile plus loin, et qu'on peut introduire (et ramener aux mesures finies) très simplement

comme suit: si V est une fonction mesurable strictement positive sur \tilde{Y} et si $\mu \in \mathcal{M}_{\xi}(\tilde{Y})$, on note $\theta = \frac{1}{V} \mu$ la "mesure" définie ainsi:

$$(1.13) \quad \varphi \text{ fonction mesurable sur } \tilde{Y}, \frac{\varphi}{V} \text{ bornée} \rightsquigarrow \theta(\varphi) = \mu\left(\frac{\varphi}{V}\right).$$

L'ensemble des fonctions θ -intégrables est bien-sûr $L^1(\theta) = \{\varphi : \frac{\varphi}{V} \in L^1(\mu)\}$, et on note $\mathcal{M}_{\xi, V}(\tilde{Y})$ l'ensemble de ces mesures, et $\mathcal{M}_{\xi, \sigma}(\tilde{Y})$ la réunion des $\mathcal{M}_{\xi, V}(\tilde{Y})$ pour toutes les V mesurables strictement positives. Remarquons que si $\theta \in \mathcal{M}_{\xi, \sigma}(\tilde{Y})$ on a aussi $\theta \in \mathcal{M}_{\xi, V}(\tilde{Y})$ si et seulement si $V \in L^1(\theta)$, et dans ce cas $\mu = V \cdot \theta$ (définie par $\mu(\varphi) = \theta(\varphi V)$ pour $\varphi \in \tilde{B}$) est dans $\mathcal{M}_{\xi}(\tilde{Y})$.

Si $\theta \in \mathcal{M}_{\xi, \sigma}(\tilde{Y})$ et $\varphi \in L^1(\theta)$, on définit $\varphi \times \theta \in \mathcal{M}_{\xi}(Y)$ comme en (1.3):

$$(1.14) \quad \varphi \times \theta(g) = \theta(g \otimes 1 \cdot \varphi) \text{ pour } g \in B \text{ (i.e., } \varphi \times \theta = \frac{\varphi}{V} \times (V \cdot \theta) \text{)}.$$

Exactement comme pour les mesures réelles, les topologies dont on peut munir $\mathcal{M}_{\xi, \sigma}(\tilde{Y})$ reviennent toujours à considérer une fonction V strictement positive particulière, à se restreindre à $\mathcal{M}_{\xi, V}(\tilde{Y})$, et à remplacer $\theta \in \mathcal{M}_{\xi, \sigma}(\tilde{Y})$ par la mesure finie correspondante $\mu = V \cdot \theta$. Par exemple, les conditions (A5) et (A6) conduisent à munir $\mathcal{M}_{\xi, V}(\tilde{Y})$ des quasi-normes suivantes:

$$(1.15) \quad \begin{cases} \|\theta\|_{\tilde{B}L_1-V} = \sup_{\varphi \in \tilde{B}L_1} \|(V\varphi) \times \theta\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \\ \|\theta\|_{1 \otimes BL_1-V} = \sup_{\varphi \in 1 \otimes BL_1} \|(V\varphi) \times \theta\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \end{cases}$$

et on peut traduire l'équivalence des conditions (A1), (A4), (A5) et (A6) du théorème (1.7) dans ce cadre, ce qui donne:

(1.16) THEOREME: Soit (θ_α) une famille filtrante de mesures de $\mathcal{M}_{\xi, V}^+(\tilde{Y})$, et $\theta \in \mathcal{M}_{\xi, V}^+(\tilde{Y})$. Il y a équivalence entre:

- (i) $\|\varphi \times (\theta_\alpha - \theta)\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute φ telle que $\frac{\varphi}{V} \in \tilde{C}$;
- (ii) $\|\varphi \times (\theta_\alpha - \theta)\|_{\mathcal{M}_{\xi}(Y)} \longrightarrow 0$ pour toute φ telle que $\frac{\varphi}{V} \in 1 \otimes BL_1$;
- (iii) $\|\theta_\alpha - \theta\|_{\tilde{B}L_1-V} \longrightarrow 0$;
- (iv) $\|\theta_\alpha - \theta\|_{1 \otimes BL_1-V} \longrightarrow 0$.

Ce résultat ne doit pas faire illusion: les conditions précédentes ne sont intéressantes que lorsque la fonction V elle-même a les "bonnes" propriétés de continuité: dans (i), $V(y, \cdot)$ est continue; dans (ii), $V(y, \cdot)$ est lipschitzienne, par exemple.

§2 - Applications aux mesures aléatoires

§2.a. Motivations. Dans toute la suite, on considère un espace probabilisé filtré $(\Omega, \underline{F}, (\underline{F}_t)_{t \geq 0}, P)$, et l'espace $Y = \Omega \times \mathbb{R}_+$ muni de la tribu $\underline{Y} = \underline{P}$ des prévisibles. L'espace vectoriel \underline{Z} est $L^0(\Omega, \underline{F}, P)$ muni de la quasi-norme $\|Z\|_{\underline{Z}} = \|Z\|_{L^0} = E(|Z| \wedge 1)$.

On rappelle d'abord (théorème de Dellacherie-Mokobodzki) que $\mathcal{M}_{\underline{Z}}(Y)$ "s'identifie" aux semimartingales. Plus exactement, soit (cf. [2]):

- (2.1) \underline{S} est l'espace des familles $\eta = (\eta_t)_{t \geq 0}$ de mesures de $\mathcal{M}_{\underline{Z}}(Y)$ telles que
- (i) $\eta_t(g)$ est \underline{F}_t -mesurable;
 - (ii) $\eta_s(g) = \eta_t(g \mathbb{1}_{[0, s]})$ si $s \leq t$;
 - (iii) $\eta_t(g \mathbb{1}_{A \times I}) = \mathbb{1}_A \eta_t(g \mathbb{1}_{\Omega \times I})$ si $A \in \underline{F}_0$ et $I = \mathbb{R}_+$, ou si $A \in \underline{F}_s$ et $I =]s, s']$.

Il y a alors correspondance bi-univoque entre les éléments $\eta = (\eta_t)$ de \underline{S} et les semimartingales nulles en 0, via les formules

$$(2.2) \quad X_t = \eta_t(1), \quad \eta_t(g) = (g \circ X)_t \quad (\text{intégrale stochastique de } g \in B).$$

On rappelle aussi que la topologie d'Emery sur \underline{S} est essentiellement la topologie induite par la quasi-norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_{\underline{Z}}(Y)}$: comme $\eta \in \underline{S}$ est une famille de mesures, il convient seulement de remplacer cette quasi-norme par

$$(2.3) \quad \|\eta\|_{\underline{S}} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_{\underline{Z}}(Y)} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sup_{g \in B, |g| \leq 1} \|\eta_n(g)\|_{L^0}.$$

Soit maintenant (E, \underline{E}) un espace polonais et $\tilde{Y} = Y \times E$, $\tilde{\underline{Y}} = \tilde{\underline{P}} = \underline{Y} \otimes \underline{E}$. Si V est $\tilde{\underline{P}}$ -mesurable et strictement positive, on pose:

- (2.4) $\tilde{\underline{S}}_V$ est l'espace des familles $\theta = (\theta_t)_{t \geq 0}$ de mesures de $\mathcal{M}_{\underline{Z}, V}(\tilde{Y})$ telles que: (i) $\theta_t(\varphi)$ est \underline{F}_t -mesurable;
- (ii) $\theta_s(\varphi) = \theta_t(\varphi \mathbb{1}_{[0, s]})$ si $s \leq t$;
 - (iii) $\theta_t(\varphi \mathbb{1}_{A \times I \times E}) = \mathbb{1}_A \theta_t(\varphi \mathbb{1}_{\Omega \times I \times E})$ pour $A \in \underline{F}_0$ et $I = \mathbb{R}_+$, ou pour $A \in \underline{F}_s$ et $I =]s, s']$.

Lorsque $\theta \in \tilde{\underline{S}}_V$ et lorsque φ est $\tilde{\underline{P}}$ -mesurable et intégrable par rapport à θ (i.e. par rapport à chaque θ_t), par exemple si $|\varphi| \leq V$, on définit $\varphi \times \theta \in \tilde{\underline{S}}$ par l'extension suivante de (1.14):

$$(2.5) \quad (\varphi \times \theta)_t(g) = \theta_t(g \circ \mathbb{1} \varphi),$$

et la semimartingale associée à $\varphi \times \theta$ est l'intégrale stochastique de φ par rapport à θ : cf. [2].

Enfin, par analogie avec (2.3), on définit la quasi-norme suivante sur $\tilde{\underline{S}}_V$:

$$(2.6) \quad \|\theta\|_{\tilde{\underline{S}}_V} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sup_{\varphi \in \tilde{B}, |\varphi| \leq 1} \|\theta_n(\varphi V)\|_{L^0}.$$

Maintenant, partons au contraire d'une semimartingale X . On lui associe une mesure aléatoire à valeurs entières μ^X , avec $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, par la formule:

$$(2.7) \quad \mu^X(\omega; dt dx) = \sum_{s > 0} 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}} \xi_{(s, \Delta X_s(\omega))} (dt dx)$$

et on sait que $\int (x^2 \wedge 1) \mu^X([0, t] \times dx) < \infty$ pour tout t . Il est alors clair que μ^X s'identifie à un élément de $\tilde{\underline{S}}_V$ par la formule

$$(2.8) \quad \mu_t^X(\varphi) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot, s, x) \mu(\cdot; ds dx) \quad \text{si } |\varphi| \leq V$$

et $\varphi * \mu^X$ est le processus noté $\varphi * \mu^X$ dans [3].

L'application: $X \rightsquigarrow \mu^X$ n'est pas continue de \underline{S} muni de $\|\cdot\|_S$ dans $\tilde{\underline{S}}_V$ muni de $\|\cdot\|_{\tilde{\underline{S}}_V}$, parce que si une suite (X^n) converge dans \underline{S} vers une limite X , on sait que ΔX^n converge vers ΔX en probabilité, uniformément sur les compacts; donc pour chaque s , $\xi_{(s, \Delta X_s^n)}$ converge (en probabilité) étroitement vers $\xi_{(s, \Delta X_s)}$, mais cette convergence n'est pas une convergence en variation. D'où la nécessité de définir une topologie sur $\tilde{\underline{S}}_V$ qui soit "faible" sur le facteur E , et "forte" sur le facteur Y : c'est exactement ce qu'on a fait dans [4] et dans le §1 ci-dessus.

Bien entendu, comme une mesure $\theta \in \tilde{\underline{S}}_V$ est en réalité une famille (θ_t) de mesures, il convient de modifier comme suit la définition des quasi-normes (1.15):

$$(2.9) \quad \begin{cases} \|\theta\|_{\tilde{B}L_1-V} = \sup_{\varphi \in \tilde{B}L_1} \|(V\varphi) * \theta\|_S \\ \|\theta\|_{1 \otimes \tilde{B}L_1-V} = \sup_{\varphi \in 1 \otimes \tilde{B}L_1} \|(V\varphi) * \theta\|_S. \end{cases}$$

§2.b. Mesures à valeurs entières. Dans ce qui suit, on considère une fonction V fixée, $\tilde{\underline{P}}$ -mesurable, strictement positive, bornée.

On considère une famille filtrante (μ^α) de mesures, et une mesure μ , qui sont toutes des mesures à valeurs entières sur $\mathbb{R}_+ \times E$ (c'est-à-dire du type (2.7) avec ΔX remplacé par un processus optionnel à valeurs dans $E \cup \{\Delta\}$). On suppose que toutes ces mesures sont, grâce à l'identification (2.8), dans l'espace $\tilde{\underline{S}}_V$, ce qui revient à dire que

$$V * \mu_t^\alpha(\omega) = \int_0^t \int_E V(\omega, s, x) \mu^\alpha(\omega; ds dx) < \infty \quad \forall t \geq 0$$

et de même pour μ^α . Cela entraîne en particulier que μ^α et μ admettent des projections prévisibles duales ν^α et ν , qui sont encore des mesures

positives de $\tilde{\Sigma}_V$ (voir [3]).

Comme les mesures μ^α sont positives et que l'espace $\xi = L^0$ vérifie (1.4), le théorème (1.15) implique immédiatement (modulo une adaptation triviale au fait que chaque μ^α est une famille de mesures) que

(2.10) LEMME : Sous les hypothèses précédentes, il y a équivalence entre :

$$(i) \quad \|(V\varphi) \times (\mu^\alpha - \mu)\|_S \longrightarrow 0 \text{ pour toute } \varphi \in \tilde{C};$$

$$(ii) \quad \|\mu^\alpha - \mu\|_{\tilde{BL}_1 - V} \longrightarrow 0;$$

$$(iii) \quad \|\mu^\alpha - \mu\|_{\mathcal{L} \otimes BL_1 - V} \longrightarrow 0.$$

De plus, on a :

(2.11) LEMME : Les propriétés équivalentes (i)-(iii) de (2.10) entraînent les propriétés équivalentes suivantes :

$$(i) \quad \|(V\varphi) \times (\nu^\alpha - \nu)\|_S \longrightarrow 0 \text{ pour toute } \varphi \in \tilde{C};$$

$$(ii) \quad \|\nu^\alpha - \nu\|_{\tilde{BL}_1 - V} \longrightarrow 0;$$

$$(iii) \quad \|\nu^\alpha - \nu\|_{\mathcal{L} \otimes BL_1 - V} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. L'équivalence des trois conditions découle de (1.15). Il suffit donc de montrer que si $\varphi \in \tilde{C}$, et si $\|(V\varphi) \times (\mu^\alpha - \mu)\|_S \longrightarrow 0$, alors on a $\|(V\varphi) \times (\nu^\alpha - \nu)\|_S \longrightarrow 0$. Mais si $A^\alpha = (V\varphi) * \mu^\alpha$ et $A = (V\varphi) * \mu$, l'hypothèse implique que A^α tend vers A dans \underline{S} . Comme ces processus sont à variation localement intégrable et à sauts uniformément bornés par la constante $a := \sup |\varphi V|$, on sait d'après [7] que la famille $(V\varphi) * \nu^\alpha$ des projections prévisibles duales de A^α tend dans \underline{S} vers la projection prévisible duale $(V\varphi) * \nu$ de A , ce qui donne le résultat. ■

Soit alors $\theta^\alpha = \mu^\alpha - \nu^\alpha$ et $\theta = \mu - \nu$. Il est évident que les conditions précédentes impliquent, par exemple, que

$$(2.12) \quad \varphi \in \tilde{C} \longrightarrow \|(V\varphi) \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \longrightarrow 0.$$

Mais il s'agit là d'une implication triviale, concernant les intégrales de Stieltjes $(V\varphi) * \mu^\alpha - (V\varphi) * \nu^\alpha$. Par contre, le théorème suivant, qui est le résultat essentiel de cet article, montre qu'on a aussi convergence des $\varphi \times \theta^\alpha = \varphi * (\mu^\alpha - \nu^\alpha)$ vers $\varphi \times \theta = \varphi * (\mu - \nu)$ pour de "vraies" intégrales stochastiques.

(2.13) THEOREME : On suppose que les conditions équivalentes de (2.10) sont satisfaites, et que la fonction V appartient à \tilde{C} . Alors

$$\|\varphi \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \longrightarrow 0 \quad (\text{i.e., } \varphi \times (\mu^\alpha - \nu^\alpha) \longrightarrow \varphi \times (\mu - \nu) \text{ dans } \underline{S})$$

pour toute $\varphi \in \tilde{C}$ telle que $(|\varphi| \wedge \varphi^2)/V$ soit bornée.

(Si $|\varphi| \wedge \varphi^2/V$ est bornée, on sait que l'intégrale stochastique $\varphi \times (\mu^\alpha - \nu^\alpha)$ est bien définie et est une martingale locale somme compensée de sauts; elle est égale à $\varphi \times \theta^\alpha$ d'après (2.35) de [2]).

Commençons par un lemme.

(2.14) LEMME : Soit les hypothèses de (2.13), et $\varphi \in \tilde{C}$ telle que φ^2/V soit bornée. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un indice β tel que

$$\alpha > \beta \longrightarrow \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq |\psi|} \|\varphi \times \theta^\alpha\|_S \leq 3\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3} \|\varphi^2 * \nu\|_S.$$

Démonstration. D'après (2.3) on a :

$$(2.15) \quad a_\alpha := \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq |\psi|} \|\varphi \times \theta^\alpha\|_S \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq |\psi|} \|(\varphi \times \theta^\alpha)_n\|_{L^0}.$$

Si $\varphi \in \tilde{C}$ et $|\varphi| \leq |\psi|$, on sait que $M^\alpha = \varphi \times \theta^\alpha = \varphi \times (\mu^\alpha - \nu^\alpha)$ est une martingale localement de carré intégrable dont le crochet prévisible $\langle M^\alpha, M^\alpha \rangle$ est majoré par le processus croissant $\varphi^2 * \nu^\alpha$, donc par le processus croissant $\varphi^2 * \nu^\alpha$ (cf. [3]). Par ailleurs $(M^\alpha)^2$ est dominé au sens de Lenglart [6] par $\langle M^\alpha, M^\alpha \rangle$, donc par $\varphi^2 * \nu^\alpha$, et on en déduit que pour tous $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$,

$$P(|\varphi \times \theta^\alpha|_n > \varepsilon) \leq \frac{\eta}{\varepsilon^2} + P(\varphi^2 * \nu^\alpha_n \geq \eta).$$

On a aussi $\|Z\|_{L^0} \leq b + P(|Z| > b)$ pour toute variable aléatoire Z et tout $b > 0$, donc il vient en prenant $\eta = \varepsilon^3$:

$$(2.16) \quad \|(\varphi \times \theta^\alpha)_n\|_{L^0} \leq 2\varepsilon + P(\varphi^2 * \nu^\alpha_n \geq \varepsilon^3).$$

Comme V et φ sont dans \tilde{C} , et φ^2/V est bornée, la fonction $\varphi' = \varphi^2/V$ est aussi dans \tilde{C} et $\varphi^2 = \varphi'V$. La condition (2.11,i) appliquée à φ' entraîne l'existence de β tel que

$$(2.17) \quad \alpha > \beta \longrightarrow \|\varphi^2 * \nu^\alpha - \varphi^2 * \nu\|_S \leq \varepsilon^4.$$

Par ailleurs, comme ν^α est prévisible positive et comme $\varphi^2 \geq 0$, on a

$$\|\varphi^2 * \nu^\alpha\|_S = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \|\varphi^2 * \nu^\alpha_n\|_{L^0}.$$

D'après (2.15), (2.16) et (2.17), et comme $P(|Z| > b) \leq \frac{1}{b} \|Z\|_{L^0}$ pour toute variable Z et tout $b > 0$, on en déduit que pour $\alpha > \beta$,

$$a_\alpha \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \left[2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3} \|\varphi^2 * \nu^\alpha_n\|_{L^0} \right]$$

$$= 2\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3} \|\varphi^2 * v^\alpha\|_S \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3} \|\varphi^2 * v\|_S,$$

d'où le résultat. ■

Démonstration de (2.13). Soit $\varphi \in \tilde{C}$ telle que $c := \sup(|\varphi| \wedge \varphi^2/V)$ soit fini. On définit la fonction suivante sur \mathbb{R}_+ :

$$f_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq m \\ m+1-x & \text{si } m < x \leq m+1 \\ 0 & \text{si } m+1 < x, \end{cases}$$

et $\varphi_m = \varphi f_m(|\varphi/V|)$, $\varphi'_m = \varphi - \varphi_m$.

D'abord, $\varphi_m = \varphi_m/V$ est dans \tilde{C} , donc d'après (2.10,1) et (2.11,1) appliqués à φ_m on obtient

$$(2.18) \quad \varphi_m \times \theta^\alpha = \varphi_m * r^\alpha - \varphi_m * v^\alpha \longrightarrow \varphi_m \times \theta = \varphi_m * r - \varphi_m * v \quad \text{dans } \underline{S}.$$

Ensuite, si $m \geq c$ on a $|\varphi/V| \geq m \implies \varphi^2 \leq |\varphi|$; donc $\varphi_m^2 \leq cV$. De plus $\varphi'_m \longrightarrow 0$ lorsque $m \uparrow \infty$, donc si $\varepsilon > 0$ il existe $m \geq c$ tel que

$$\|\varphi_m^2 * v\|_S \leq \varepsilon^4.$$

D'après (2.18) et le lemme (2.14) on peut trouver β tel que

$$\alpha > \beta \implies \|\varphi_m \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \leq \varepsilon, \quad \|\varphi'_m \times \theta^\alpha\|_S \leq 4\varepsilon,$$

et le lemme (2.14) appliqué à la famille constante $r^\alpha = r$ montre que $\|\varphi'_m \times \theta\|_S \leq 4\varepsilon$ également. Donc comme $\varphi = \varphi_m + \varphi'_m$,

$$\alpha > \beta \implies \|\varphi \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S \leq \|\varphi_m \times (\theta^\alpha - \theta)\|_S + \|\varphi'_m \times \theta^\alpha\|_S + \|\varphi'_m \times \theta\|_S \leq 9\varepsilon$$

et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a le résultat. ■

On aimerait bien-sûr déduire de (2.13) que, sous les mêmes hypothèses,

$$\|\theta^\alpha - \theta\|_{\tilde{BL}_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0, \quad \|\theta^\alpha - \theta\|_{1 \otimes BL_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0$$

car la conclusion de (2.13) implique la condition (i) du théorème (1.16) avec V remplacé par \sqrt{V} . Mais le théorème (1.16) ne s'applique pas ici, car les mesures θ^α ne sont pas positives. Cependant, on a:

(2.19) THEOREME: Sous les hypothèses du théorème (2.13), et si la famille filtrante (r^α) est une suite (r^n) , on a:

$$\|\theta^n - \theta\|_{\tilde{BL}_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0, \quad \|\theta^n - \theta\|_{1 \otimes BL_1 - \sqrt{V}} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On va appliquer l'équivalence du théorème (6.2) de [4]: il suffit de montrer que la suite (θ^n) est " \tilde{C} -asymptotiquement bornée" et " \tilde{C} -asymptotiquement uniformément tendue" dans $\tilde{\mathbb{S}}_V$, ce qui signifie qu'on a les deux propriétés suivantes:

$$(2.20) \quad \lim_{r \downarrow 0} \limsup_n \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq \sqrt{V}} \|r\varphi \times \theta^n\|_S = 0.$$

(2.21) $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact de E avec

$$\limsup_n \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq \sqrt{V}} \mathbb{1}_{\Omega \times \mathbb{R}_+ \times K^c} \|\varphi \times \theta^n\|_S \leq \varepsilon.$$

Montrons d'abord (2.20), qui s'écrit encore:

$$(2.22) \quad \lim_{r \downarrow 0} \limsup_n \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq r\sqrt{V}} \|\varphi \times \theta^n\|_S = 0.$$

Si $\varepsilon > 0$ il existe $r > 0$ tel que $\|r^2 V * v\|_S \leq \varepsilon^4$, donc d'après le lemme (2.14) appliqué à $\psi = r\sqrt{V}$ il existe n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies \sup_{\varphi \in \tilde{C}, |\varphi| \leq r\sqrt{V}} \|\varphi \times \theta^n\|_S \leq 4\varepsilon$$

et on en déduit (2.22).

Passons à (2.21). Soit $\varepsilon > 0$. Comme les mesures positives v^n convergent vers v au sens de (2.11,ii), le lemme (7.9) de [4] montre qu'il existe un compact K de E tel que, si $\rho = \mathbb{1}_{\Omega \times \mathbb{R}_+ \times K^c}$, on ait $\|(V\rho) * v^n\|_S \leq \varepsilon^4$ pour chaque n .

On applique alors le lemme (2.14) pour chaque mesure θ^n (avec $\theta^\alpha = \theta^n$ pour tout α): si $\varphi \in \tilde{C}$ et si $|\varphi| \leq \sqrt{V}\rho$, on a (avec $\psi = \sqrt{V}\rho$, donc $\psi^2 = V\rho$):

$$\|\varphi \times \theta^n\|_S \leq 3\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon^3} \|(V\rho) * v^n\|_S \leq 4\varepsilon$$

et on en déduit (2.21). ■

§2.c. Retour aux semimartingales. Nous terminons en montrant que la topologie introduite dans le paragraphe précédent pour les mesures à valeurs entières résoud effectivement le problème, posé au §2-a, des rapports entre convergence dans $\underline{\mathbb{S}}$ des semimartingales X^n , et convergence des mesures associées μ^{X^n} .

(2.23) PROPOSITION: Soit X une semimartingale et (X^α) une famille filtrante de semimartingales. Soit $V(\omega, t, x) = x^2 \wedge 1$.

a) Si $X^\alpha \longrightarrow X$ dans $\underline{\mathbb{S}}$, on a $\mu^{X^\alpha} \longrightarrow \mu^X$ au sens de (2.10).

b) Si $\mu^{X^\alpha} \longrightarrow \mu^X$ au sens de (2.10) et si les X^α et X sont des martingales locales sommes compensées de sauts, nulles en 0 et vérifiant identi-

quement $|\Delta X^\alpha| \leq a$, $|\Delta X| \leq a$ pour une constante a , alors $X^\alpha \longrightarrow X$ dans $\underline{\underline{S}}$.

Il est évidemment impossible d'obtenir une réciproque complète de l'assertion (a), car la mesure μ^X ne caractérise la semimartingale X que dans le cas où celle-ci est nulle en 0 et est une martingale locale somme compensée de sauts.

Démonstration. a) D'après les équivalences du théorème (1.7), il suffit de montrer que si $g \in C$, alors $V(\log) * \mu^{X^\alpha} \longrightarrow V(\log) * \mu^X$ dans $\underline{\underline{S}}$. Soit $h(x) = g(x) x^2 \wedge 1$. Alors

$$V(\log) * \mu_t^{X^\alpha} = \sum_{s \leq t} h(\Delta X_s^\alpha).$$

Comme $|h(x)| \leq c(x^2 \wedge 1)$ pour une constante c , on sait d'après [7] que l'application: $X \rightsquigarrow \sum_{s \leq \cdot} h(\Delta X_s)$ est continue de $\underline{\underline{S}}$ dans $\underline{\underline{S}}$, et le résultat en découle.

b) Soit $\mu^\alpha = \mu^{X^\alpha}$, $\mu = \mu^X$. On utilise les notations θ^α et θ du §2-b. Comme X^α est une martingale locale somme compensée de sauts et nulle en 0 avec $|\Delta X^\alpha| \leq a$, on sait d'après [3] que $X^\alpha = \varphi * \theta^\alpha$ avec $\varphi(\omega, t, x) = (x \wedge a) \vee (-a)$ et de même $X = \varphi * \theta$. Comme φ^2 / V est borné et comme $\varphi \in \tilde{C}$, le résultat découle du théorème (2.13). ■

BIBLIOGRAPHIE

- 1 K. BICHTELER: Integration Theory. Lect. Notes in Math. 315, 1973.
- 2 K. BICHTELER, J. JACOD: Random measures and Stochastic Integration. A paraître dans: Proc. IFIP-ISI Conference, Bangalore; ed. par G. Kallianpur, 1982.
- 3 J. JACOD: Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714, 1979.
- 4 J. JACOD: Topologies pour les mesures sur un produit d'espaces. Sémin. Proba. de Rennes 1981, publié en 1982.
- 5 J. JACOD, J. MEMIN: Rectification à "Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité". A paraître dans: Sémin. Proba. XVII, 1983.
- 6 E. LENGART: Relations de domination entre deux processus. Annales de l'Institut H. Poincaré (B), XIII, 171-179, 1977.
- 7 J. MEMIN: Espaces de semimartingales et changements de probabilité. Z. für Wahr. 52, 9-40, 1980.