PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

MARC KRASNER

Anneaux gradués généraux

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1980, fascicule S3
« Colloque d'algèbre », , p. 209-308

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1980___S3_209_0>

ANNEAUX GRADUES GENERAUX

par Marc KRASNER (PARIS)

Introduction

La notion de graduation, du moins sous la forme d'exemples particuliers, est une notion assez ancienne. Elle est entrée explicitement en mathématique au XVIIIè siècle avec Euler. Euler appelle un polynôme (d'une ou de plusieurs variables) homogène si tous ses monômes ont un même degré total, qui est dit le degré de ce polynôme. D'une manière plus générale, si $f(X_1,X_2,\ldots,X_s)$ est une fonction réelle de s variables réelles, Euler l'appelle homogène de degré d si, chaque fois que $f(X_1, X_2, \ldots, X_s)$ est définie, $f(tX_1, tX_2,\ldots,tX_s)$ l'est aussi quel que soit $t \in \underline{R}$, et $f(tX_1, tX_2,\ldots, tX_s)=t^d f(X_1,X_2,\ldots,X_s)$. D'ailleurs, d n'est pas forcément un entier, mais peut être un nombre réel quelconque. Du point de vue algébrique, deux propriétés des fonctions homogènes sautent immédiatement aux yeux : 1) le produit des fonctions homogènes est encore une fonction homogène (et son degré est la somme des degrés des facteurs) ; 2) la somme des fonctions homogènes de degrés différents deux à deux n'est jamais homogène (donc, en particulier, est $\neq 0$, car 0 est une fonction homogène de degré indéterminé) ; la somme des fonctions homogènes d'un même degré est homogène (et si elle n'est pas nulle, ce degré commun est son degré). Dans certaines classes de fonctions, chaque fonction se représente, et d'une seule manière, comme une somme (finie ou infinie) de fonctions homogènes de la classe. Ainsi, chaque polynôme de s variables se décompose, et d'une seule manière, en une somme (finie) de polynômes homogènes, toute fonction développable en série de Taylor se représente (et aussi d'une manière unique) comme une somme infinie de tels polynômes (qui converge au sens de la topologie réelle et, à fortiori, formel-

le). D'ailleurs, la notion de degré était familière aux mathématiciens (du moins, dans le cas d'une variable) bien avant Euler (Diophante, Arabes, Viète, Descartes), et on voit même les germes de la notion d'homogénéité des les débuts de la mathématique grecque ("multiplication des segments") et jusqu'en Babylonie. D'autres notions d'homogénéité et de grades (analogue du degré) correspondants ont été introduits après Euler dans différentes structures. Citons en quelques-unes de plus simples sans entrer en détails : poids (des polynômes et des fonctions), dimension (des objets géométriques et topogiques), ordre (des opérateurs différentiels), etc... On a ensuite considéré (surtout en géométrie et topologie algébrique, par exemple Samuel et Zariski [14] la notion générale de l'anneau Z-gradué (ou des anneaux avec la graduation un peu plus générale $(Z^2, Z^3, \ldots, Z^n, \ldots)$. Les anneaux gradués, dont les grades sont contenus dans un groupe abélien, ont été considérés par Chevalley [3]. Mais la première notion relativement (mais pas assez) générale d'anneau gradué a été introduite par Bourbaki [1]. Elle contient de bonnes parties, mais aussi des restrictions que rien ne justifie. Pour ne pas remonter à Adam et Eve, nous allons partir de cette définition, en conservant (quitte à les analyser davantage) les premières, et en critiquant et rejetant les secondes. Ainsi, nous allons arriver à une définition réellement adéquate des anneaux gradués, après quoi nous allons donner une idée de ce qui a pu être accompli, à partir de cette notion, dans différentes directions.

Bourbaki base sa définition sur la notion de groupe abélien gradué. C'est une très bonne notion (bien qu'il n'y a pas besoin de la restreindre

au cas abélien), que, sauf une preuve du contraire[1], j'attribue à cet auteur (collectif). Mais Bourbaki l'introduit sans l'analyser, et pourtant cette analyse est de la plus grande importance pour la théorie des structures graduées plus fortes. Elle est faite (sans l'hypothèse de commutativité) au §1 de cet article, et montre que la structure d'un groupe gradué est déterminée par la donnée du groupe abstrait sous-jacent et la partie homogène, ou seulement de la partie homogène munie de la composition[2] partielle induite par celle du groupe. Ces structures, provenant des groupes gradués, sont caractérisées axiomatiquement (j'appelle la dernière homogroupoïde ; c'est un cas particulier des structures connues en théorie des groupes sous le nom d'amalgames ; voir, par exemple ([12], § 35), ce qui ouvre trois méthodes, en principe équivalentes, de l'étude des groupes gradués et des structures graduées plus fortes : 1) méthode non homogène, où on étudie ces structures telles quelles ; 2) méthode semi-homogène, où on étudie la structure non graduée sous jacente accompagnée de la partie homogène, c'est-à-dire d'un sous-ensemble du support satisfaisant à certains axiomes ; 3) méthode homogène, où on ne considère que la partie homogène, c'est-à-dire un ensemble muni d'une composition partielle, également soumise à certains axiomes (et, dans le

---

(1) *En effet, les Bourbaki ont la fâcheuse habitude d'exposer dans leurs livres les notions et les résultats sans indiquer, sauf rares exceptions, à qui ils sont dûs. Ainsi, par exemple, ils emploient la notion d'espace ultra-métrique sans jamais dire qui l'a introduite, de manière que la plupart des jeunes mathématiciens (et quelques mois jeunes) la leur attribuent. Je ne pense pas qu'il s'agit d'intention délibérée, mais plutôt de négligence et de sésinvolture. Mais il en serait peut-être autrement pour certains de ceux, qui suivent leur exemple.*

(2) *Je n'emploie pas le terme consacré "loi de composition", car je ne vois pas ce que le terme juridique "loi" vient faire dans cette affaire.*

cas des structures plus fortes, d'autres compositions, en général partout définies). On ne peut pas dire qu'une de ces méthodes soit la meilleure dans tous les cas, mais si l'on s'intéresse uniquement aux éléments et aux objets homogènes, c'est la troisième, qui semble la plus adéquate. Par contre, quand on s'intéresse à tous les éléments d'une structure graduée, ce qui est surtout le cas quand l'ensemble des grades est totalement ordonné (car on peut définir alors les grades des éléments non homogènes), c'est la méthode non homogène qui s'impose. De telles structures graduées s'obtiennent, sous certaines conditons, des structures filtrées de même espèce, dont la filtration est totalement ordonnée (mais n'est pas forcément une Z-filtration), et qui s'appellent les gradués des structures filtrées correspondantes (mais souvent seule la partie homogène d'un tel gradué est intéressante pour l'étude de la structure filtrée, dont il provient). Ces questions sont discutées pour les groupes à la fin du § 1, pour d'autres structures au §2.

Au § 2 sont introduites, en débarassant les définitions de Bourbaki de leurs restrictions parasites, les notions réellement adéquates d'anneau et de module gradués et de leurs parties homogènes annéïde et moduloïde. Est défini, également, l'analogue gradué homogène de corps appelé corpoïde (la notion non homogène correspondante s'appelle corps gradué). Cette notion a été définie par l'auteur en 1944 dans [5] à partir des corps valués, car les parties homogènes des gradués de ces corps, filtrés par leur valuation (qui peut être celle de Krull), le sont. Ces corpoïdes, appelés squelettes (des corps valués correspondants) ne sont pas quelconques : leur groupe des grades (car les grades d'un corpoïde forment un groupe) est sans torsion et, bien entendu, la commutativité du corps valué entraîne celle de son squelette.

Un anneau gradué est dit régulier, par exemple à droite, si, a,x,y

étant ses éléments homogènes tels que $xa \neq 0$, $ya \neq 0$, l'égalité des grades des xa et ya entraîne celle des grades de x et y (un anneau gradué régulier à la fois à droite et à gauche sera dit régulier tout court). Si A est un anneau gradué et M est un A-module gradué, il est dit <u>régulier</u> si, pour tous x,y,A et $m \in M$ homogènes et tels que $xm \neq 0$ et $ym \neq 0$, l'égalité des grades des xm et ym entraîne celle des grades des x et y (on dit que M est <u>strict</u> s'il possède la propriété analogue à gauche).

Si q est un corpoïde, un q-moduloïde unitaire V est dit q-<u>espace</u> vectoriel. Les q-espaces vectoriels réguliers ont une théorie d'indépendance linéaire et de dimension semblable (du moins formellement) à celle des espaces vectoriels sur les corps (mais, si l'on regarde de plus près, plus riche). Si Q est un surcorpoïde des q, il peut être considéré, selon la méthode habituelle, comme q-espace vectoriel, qui est toujours régulier, ce qui permet de définir le degré (à droite ou à gauche) [Q:q] de l'extension corpoïdale Q/q comme la dimension de cet espace (du même côté). Les généralités sur les corpoïdes (y compris la définition des squelettes) et leurs extensions et la théorie des espaces vectoriels réguliers sur ces structures, énoncées dans [5], ont été exposés dans [9] en 1954.

Les corpoïdes commutatifs sans torsion (c'est-à-dire tels que leur groupe des grades est sans torsion) ont une théorie des extensions (basée sur une théorie adéquatement construite des polynômes sur ces corpoïdes) semblable à celle de Steinitz pour les extensions des corps, mais plus riche, et une bonne théorie de Galois (le théorème de l'élément primitif n'est plus vrai pour les extensions corpoïdales séparables de degré fini, mais on peut, quand même, prouver intégralement le théorème fondamental de la théorie de Galois) (cette théorie a été

énoncée dans la note [6] de 1944, mais n'est pas encore publiée, et se trouve exposée seulement dans mon preprint [11]). Ces théories ont des applications importantes à la théorie des corps valués, tout particulièrement à la théorie de la ramification (énoncées dans les notes [6], [7], [8] de 1944-5 sous l'hypothèse de degré fini, exposées en partie dans le preprint [11], mais sans cette hypothèse). Le §2 contient les définitions et les propriétés élémentaires de ces structures, y compris l'esquisse de la théorie des espaces vectoriels réguliers sur les corpoïdes, tandis que le §3 est consacré aux corpoïdes commutatifs sans torsion, leurs théories des polynômes, des extensions et de Galois, et aux applications de ces théories aux corps valués.

La théorie homogène des anneaux gradués commutatifs a été étudiée par M.Chadeyras, surtout du point de vue noetherien, dans sa thèse [2] de 1969, et E. Halberstadt a étudié, surtout du point de vue artinien, la théorie homogène des anneaux réguliers, mais, en général, non-commutatifs, dans sa thèse [4] de 1971, n'existant, pour le moment, que sous la forme miméographiée (actuellement, l'auteur, Mr Chadeyras et E. Halberstadt sont en train de préparer le livre [15] sur les anneaux gradués généraux, qui doit paraître dans les "Queen's Papers in pure and applied Mathematics" et dont le chap. 3 contiendra l'essentiel de la thèse de Halberstadt). Ces deux travaux (et, particulièrement, celui de Halberstadt) contiennent des résultats profonds et cachés. Un phénomène se produisant dans les anneaux gradués, celui d'"agglutination", y joue un rôle essentiel, et le § 4 lui est consacré. Ce phénomène a été remarqué par l'auteur, qui en a soupçonné l'importance, mais c'est M. Chadeyras qui en a fait, dans le cadre des anneaux, une étude véritable. Comme ce phénomène est lié surtout avec la structure additive des

anneaux gradués, la structure multiplicative ne jouant qu'un rôle épisodique, on peut déjà considérer ce phénomène dans le cadre plus général des groupes gradués. C'est ce que je fais ici, mais cette théorie reste entièrement inspirée par celle de Chadeyras. Au § 5, consacré aux anneaux gradués commutatifs, j'expose un certain nombre de résultats les plus frappants ou importants de [2], certains avec esquisse de démonstration, et au § 6 je décris, sans démonstration, deux résultats essentiels de [4].

Terminologie et notations

Nous adoptons les notations habituelles de la théorie des ensembles, sauf que : 1) la différence ensembliste $\{x \in A\ ;\ x \notin B\}$ des ensembles A et B (où on ne suppose pas que $B \subseteq A$) sera notée A.. B ; si, en plus, $B \subseteq A$, cette différence sera écrite A ... B ; 2) l'inclusion large sera écrite $\subseteq$, et $\subset$ signifiera l'inclusion stricte ; 3) On écrira $\dot{\cup} A$ $(A \in \mathcal{U})$ la réunion d'une famille $\mathcal{U}$ d'ensembles quand ces ensembles sont disjoints deux à deux, et on appelera, par abus de langage, partition de cette réunion pas seulement la famille $\mathcal{U}$, mais aussi la formule elle-même. Une équivalence sur un ensemble A sera dite discrète si ses classes sont tous des singletons, et elle sera dite amorphe si A est sa classe unique.

Nous ne parlerons jamais de "loi de composition", mais seulement de "composition", car on ne voit pas ce que le terme juridique de "loi" vient faire en algèbre. Une composition resp. composition partielle (qu'on dira aussi opération) d'un ensemble E est définie comme une application $\omega : E^X \longrightarrow E$ (resp. $F \subseteq E^X \longrightarrow E$) dans E d'une puissance cartésienne E^X de E (resp. d'une partie F de E^X). On appelle arité de ω, et on note $|\omega|$, le cardinal card X de X. En particulier, si $|\omega| = 0,1,2,3,\ldots$, ω est dite une composition ou opération nullaire, unaire, binaire, ternaire,...

D'ailleurs, on n'aura affaire ici qu'aux compositions et opérations binaires, ce qui sera sous-entendu sans qu'on l'indique explicitement. Par abus de langage, une application $\Theta : A \times E \longrightarrow E$ (resp. $L \subseteq A \times E \longrightarrow E$) est dite une A-composition externe (resp. une A-opération externe) de E. Si ω est une composition (resp. opération) de E, E est dit un opère (resp. un opéroïde par rapport à ω, et si Θ est une A-composition externe (resp. une A-opération externe) de E, E est dit un A-extopère (resp. un A-extopéroïde) par rapport à Θ. Une structure $(E ; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s)$, où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ sont des opérations de E (dont certaines, éventuellement, des compositions) sera dite un s-opéroïde (si toutes les ω_i sont des compositions, on l'appelle s-opère ou "algèbre universelle" [mais on ne vas pas employer ce dernier terme]), en particulier monopéroïde, biopéroïde, triopéroïde, etc... Le suffixe "oïde" ne sera employé que pour indiquer qu'une au moins des compositons considérées n'est pas supposée totale. C'est pourquoi je n'emploie pas pour le monopère associatif (supposé unitaire) le terme "monoïde" de Bourbaki. Pas davantage, je n'emploie le terme "groupoïde" d'Ore et Dubreil pour un monopère quelconque (par contre, je considère que le nom de groupoïde au sens de Brandt est justifié). Si D est un demi-groupe, un D-extopère de E sera dit un D-autoapplicationnel (de E) si, pour tous $d, d' \in D$ et $x \in E$, on a $d(d'x) = (dd')x$. Si D est un groupe Γ, un Γ-autoapplicationnel sera appelé aussi Γ-permutationnel. Visiblement, les Γx, $x \in E$, ne sont pas autre chose que les ensembles de transitivité du groupe des permutations de E induites par Γ: ils forment donc une partition de E, qui sera dite sa partitition de Γ-intransitivité .

Soit $(E ; \omega)$ un monopéroïde (binaire), et soit $F \subseteq E \times E$ le domaine de définition de ω . Alors, $x, y, \in E$ sont dits composables, ce qui se note $x \# y$, si $(x,y) \in F$. Dans ce cas, leur composé par l'opé-

ration ω sera, en général, écrit, selon l'usage habituel, $x \omega y$. On adopte les mêmes notations et terminologie pour les extopéroïdes. Si ω est l'addition ou la multiplication on dira addible resp. multipliable au lieu de composable.

Soit $(E ; \omega)$ un monopère resp. monopéroïde (binaire). Un $E' \subseteq E$ est dit un sous-opère resp. sous-opéroïde de $(E ; \omega)$ (ou simplement de E) si $x, y \in E'$ (resp. $x, y \in E'$ et $x \neq y$) implique $x \omega y \in E'$. Il est dit un idéal resp. idéaloïde par exemple à gauche de $(E ; \omega)$ si $x \in E$ et $y \in E'$ (resp. $x \in E$, $y \in E'$ et $x \neq y$) impliquent $x \omega y \in E'$. On définit d'une manière analogue les idéaux et idéaloïdes à droite, et on les dit idéaux et idéaloïdes tout court s'ils le sont et à gauche et à droite. Il est à remarquer que les idéaux d'un anneau sont, selon cette terminologie, leurs sous-groupes additifs, qui sont leurs idéaux multiplicatifs. Si (E,θ) est un A-extopère resp. A-extopéroïde, $E' \subseteq E$ est dit stable si $a \in A$ et $x \in E'$ (resp. $a \in A$, $x \in E'$ et $a \neq x$) impliquent $a \theta x \in E'$.

"ssi" signifie "si et seulement si", Toutefois, on va employer parfois (en particulier, dans les définitions) le simple "si" avec le sens de "ssi".

Si ε, ε' sont deux relations d'équivalence sur un ensemble A, elles seront dites orthogonales (notation : $\varepsilon \perp \varepsilon'$) si l'intersection $C \cap C'$ d'une classe quelconque C (mod ε) avec une classe quelconque C' (mod ε') est vide ou un singleton.

Au lieu de la somme directe et du produit direct des groupes, termes employés avec les sens divers par différents auteurs, nous parlons de leur composé direct (et, éventuellement, du composé direct complet). Par contre, nous conservons le terme de somme directe pour les anneaux et le modules, car, dans ce cas, il n'y a pas de danger d'ambiguïté.

Soient $\sigma : A \longrightarrow B$ une application. On notera $\sigma.$ a l'image par σ de tout a de A. Ce sera le seul emploi mathématique du point. Toutefois on

ne s'interdit pas d'écrire la même image $\sigma(a)$. Un composé écrit multiplicativement sera toujours écrit sans point (donc $\xi\eta$ et pas $\xi.\eta$) même s'il s'agit d'un composé externe.

§ 1 - GROUPES GRADUES ET HOMOGROUPOÏDES

Bourbaki, base la notion d'anneau gradué, sur celle de groupe abélien gradué. C'est une très bonne notion (bien que la restriction "abélien" est en fait inutile ; mais ceci est secondaire, car le groupe, qui intervient dans le cas des anneaux, est leur groupe additif, qui est abélien). Je pense que cette notion est de Bourbaki sans pouvoir le garantir[1]. Toutefois, Bourbaki n'en fait pas une étude suffisamment approfondie.

Soit G un groupe (qu'on ne va pas supposer abélien ; toutefois, on va chaque fois indiquer les simplifications que cette hypothèse entraîne), dont la composition sera écrite multiplicativement (additivement dans le cas abélien) et l'élément neutre sera noté e (0 dans le cas abélien). Le composé direct, même dans le cas non abélien, sera noté $\oplus$. On appelle <u>graduation</u> de g toute décomposition directe

$$G = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta, \tag{1}$$

où les G_δ sont des sous-groupes de G. Un <u>groupe gradué</u> est un groupe muni d'une de ses graduations. Deux graduations (1) et

$$G = \bigoplus_{\delta \in \Delta'} G'_\delta , \tag{2}$$

de G. seront dites <u>équivalentes</u> s'il existe une bijection $\varphi : \Delta \longrightarrow \Delta'$ telle que $G_\delta = G'_{\varphi.\delta}$. Puisque $\delta \neq \varepsilon$ implique $G_\delta \cap G_\varepsilon = \{e\}$, on ne peut avoir, dans ce cas, $G_\delta = G_\varepsilon$ que si $G_\delta = G_\varepsilon = \{e\}$. (ce que, d'ailleurs, n'est pas exclû par la définition de graduation). Une graduation de G est dite <u>stricte</u> si tous les G_δ , $\delta \in A$, sont $\neq \{e\}$. Si

$\Delta^* = \{\delta \in \Delta ; G \neq \{e\}\}$, $G = \bigoplus_{\delta \in \Delta^*} G_\delta$ est une graduation strictre de G qu'on va appeler le noyau strict de la graduation(1). Deux graduations de G seront dites faiblement équivalentes si leurs noyaux stricts sont équivalents. Visiblement, une graduation stricte est définie à l'équivalence près par l'ensemble $\{G_\delta ; \delta \in \Delta\}$ de ses composantes directes. Donc, une graduation est définie à l'équivalence faible près par $\{G_\delta ; \delta \in \Delta^*\}$.

L'ensemble $H = \bigcup_{\delta \in \Delta} G_\delta (= \bigcup_{\delta \in \Delta^*} G_\delta$ si $G \neq \{e\})$ s'appelle la partie homogène de G, et tous les $a \in H$ sont dits les éléments homogènes de G. Si $a \in H$ est $\neq e$, il appartient a un et un seul G_δ, $\delta \in \Delta^*$, et ce δ s'appelle le grade de a et va être noté $\delta(a)$. L'élément e n'a, en principe, aucun grade et les $\delta \in \Delta .. \Delta^*$ seront dits alors les grades vides. Toutefois, il est parfois commode d'attribuer à e comme gradué un des $\delta \in \Delta .. \Delta^*$, qui sera noté 0 et sera dit le grade nul. Si $\Delta = \Delta^* \cup \{0\}$, et si l'on pose $\delta(e)=0$, la graduation sera dite propre.

Le terme "homogène" a encore un autre sens : un sous-groupe g de G est dit homogène s'il est engendré par $g \cap H$, auquel cas, si $g_\delta = G_\delta \cap g$, la graduation (1) définit la graduation $g = \bigoplus_{\delta \in \Delta} g_\delta$, qui s'appelle la graduation de g induite par celle (1) de G. Si g est un sous-groupe invariant de G, g_δ en est un de G_δ, G_δ/g_δ peut s'identifier, d'une manière évidente, à un sous groupe de G/g et

$$G/g \neq \bigoplus_{\delta \in \Delta} (G_\delta/g_\delta)$$

est une graduation de G/g, qu'on dira induite par celle (1) de G.

On peut se demander : a quoi peuvent bien servir les graduations autres que strictes et propres? A rien si l'on considère isolément un seul groupe. Mais si l'on considère les systèmes "cohérents" de groupes par exemple celui des sous-groupes homogènes d'un groupe gradué G, ou celui des images homomorphes de G avec les noyaux homogènes, il est na-

turel de considérer ces groupes comme gradués avec la graduation induite par celle de G. mais même, si la graduation de G est stricte ou propre, les graduations induites peuvent ne pas l'être.

La donnée de la partie homogène H de G <u>détermine</u>, ensemble avec la structure de groupe de G, la graduation correspondante à l'équivalence faible près. En effet, si $a \neq e$ et b sont $\in H$ et si $a \in G_\delta$, on a $b \in G_\delta$ ssi "ab" est homogène, autrement dit $ab \in H$. Ainsi, si, pour $a \in H$, qui est $\neq e$, on pose $G(a) = \{x \in H ; ax \in H\}$ $(=\{x \in H ; xa \in H\})$, l'ensemble $\{G_\delta ; \delta \in \Delta\}$ coincide avec $\{G(a) ; a \in H..\{e\}\}$

L'idée vient, de lors, de définir les groupes gradués comme couples (G,H), où H est un sous-ensemble de G, qui en est la partie homogène pour quelque graduation au sens précédent. Bien entendu, ce couple ne définit une graduation de G que modulo l'équivalence faible. Mais pour réaliser cette idée, il faut caractériser les $H \subseteq G$, qui en sont les parties homogènes pour quelques graduations de G. Cette caractérisation est donnée par la

PROPOSITION 1 : H est la partie homogène de G pour quelque graduation de G : ssi : 1°) $e \in H$; 2°) si $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$; 3°) si x,y,z, xy, yz <u>sont</u> $\in H$ et $y \neq e$, <u>on a</u> $xz \in H$; 4°) <u>Si</u> x,y sont $\in$ H et $xy \notin H$, on a $xy=yx$; 5°) H <u>engendre</u> G ; 6°) Si $n \geq 2$ et si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ sont tels que, pour tous $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ tels que $i \neq j$, $x_i x_j \notin H$, on a $x_1 x_2 \cdots x_n \neq e$.

Dans le cas abélien, la condition 4°) devient triviale, et, la composition du groupe étant écrite additivement, des autres conditions, numérotées 1° - 5°, deviennent : 1°) $0 \in H$; 2°) $x \in H \Rightarrow -x \in H$; 3°) $x,y,z,x+y, y+z \in H$ et $y \neq 0$ impliquent $x + z \in H$; 4°) H engendre G ; 5°) Si $n \geq 2$ et si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ sont tels que, pour tous

$i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$ tels que $i \neq j$, $x_i + x_j \notin H$, on a $x_1+x_2+\ldots+x_n \neq 0$].

Démonstration : Si (1) est une graduation de G, les conditions 1°) et 2°) sont évidentes. Si $y \neq e$ est $\in H$, et si $\delta=\delta(y)$, $x \in H$ et $xy \in H$ impliquent que $x \in G_\delta$ et $z \in H$ et $yz \in H$ impliquent $z \in G_\delta$, d'où résulte $xz \in G_\delta \subseteq H$. L'axiome 4°) est évident. Si $x,y \in H$ sont tels que $xy \notin H$, aucun d'eux n'est e et ils appartiennent aux G_δ différents, donc commutent ; et si l'hypothèse de 6°) est satisfaite, les $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ appartiennent tous aux G_δ différents, donc leur composé n'est pas homogène et, fortiori, est $\neq e$. Donc, les conditions 1° - 6° sont nécessaires pour que H soit la partie homogène de G pour une de ses graduations.

Supposons que H satisfait à 1° - 6°. Soit, pour $a \in H$ tel que $a \neq e$, $G(a)=\{x \in H ; ax \in H\}$. En vertu de 1°, puisque $e \in H$ et $ae = a \in H$, on a $e \in G(a)$ [donc, si x=e, nous avons $x^{-1}=e^{-1}=e \in G(a)$]. Si $x \in G(a)$ (donc $ax \in H$) est $\neq e$, puisque, en vertu du 2°, nous avons $x^{-1} \in H$, et, puisque $xx^{-1} = e \in H$, on a, en vertu de 3°, $ax^{-1} \in H$, autrement dit $x^{-1} \in G(a)$. Ainsi, dans tous les cas, $x \in G(a)$ implique $x^{-1} \in G(a)$. Comme $a^{-1} \in H$ et $aa^{-1} = e \in H$, nous avons $a^{-1} \in G(a)$ et $a = (a^{-1})^{-1} \in G(a)$. Si $b \neq e$, $b \in G(a)$ et $x \in G(b)$, a,b,x, ab,bx sont $\in H$, donc, en vertu de 3°, $ax \in H$ et $x \in G(a)$. Donc $b \in G(a)$ implique $G(b) \subseteq G(a)$. Mais $b \notin G(a)$ implique $b^{-1} \in G(a) \Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1}=(ab^{-1})^{-1} \in H \Rightarrow a^{-1} \in G(b) \Rightarrow a=(a^{-1})^{-1} \in G(b)$, donc $G(a) \subseteq G(b)$ et $G(b) = G(a)$. Ainsi, si a,b sont tous les deux $\neq e$, ou bien $G(a) = G(b)$, ou bien $G(a) \cap G(b) = \{e\}$. En particulier, $G(a^{-1})=G(a)$. Si x,y sont $\in G(a)$, x=e implique $xy = y \in G(a)$, et $x \neq e$ implique $y \in G(a) = G(x)$, c'est-à-dire $xy \in H$, et $x^{-1}(xy)=y \in H$, donc $xy \in G(x^{-1})=G(x)=G(a)$. Ainsi, les G(a), $a \in H^* = H \ldots \{e\}$ sont des

sous-groupes de g, qui, quand ils sont différents, n'ont que e comme élément commun. Leur réunion, qui est H, est, en vertu de 5°, un ensemble générateur de G. Si $g(a) \neq g(b)$ $(a,b \in H^*)$, on a $ab \notin H$, donc en vertu de 5°, ab=ba. Ainsi, les éléments des G(a) différents commutent, et G est le composé des G(a), $a \in H^*$, distincts. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ appartenant deux à deux aux G(a), $a \in H^*$ distincts, leur composé ne dépend pas de l'ordre de composition et tout élément $x \neq e$ de G peut se mettre sous la forme d'un tel composé $x_1 x_2, \ldots, x_n (n \geq 1)$, où aucun des $x_i (i=1,2,\ldots,n)$ n'est =e. Mais une telle représentation est unique, car autrement il aurait existé un tel produit =e. Mais si n=1, cela contredit l'hypothèse $x_1 \neq e$ et si $n \geq 2$, c'est impossible en vertu de la condition 6°. Ainsi G est le composé direct des G(a), $a \in H^*$, distincts, et cette décomposition directe de G en est une graduation, dont la partie homogène est $\bigcup_{a \in H^*} G(a) = H$. On appelera aussi <u>groupe gradué</u> tout couple $(G, H \subseteq G)$, où G est un groupe, et $H \subseteq G$, satisfait aux conditions 1°-6°.

La composition de G induit sur H une composition partielle : si x,y sont $\in$ H, leur composé sera défini dans H ssi leur compose xy dans G est $\notin$ H, auquel cas leur composé dans H sera le même et sera aussi noté xy. On dira, dans ce cas, que x,y sont <u>composables</u> (éventuellement, si la compositon de G s'appelle l'addition, la multiplication, etc..., on les dira respectivement <u>addibles, multipliables</u>, etc...), et l'on écrira $x \# y$. On a $x \#$ y ssi x et y appartiennent à un même G(a), $a \in H^*$, autrement dit ssi ou bien un au moins des x,y est = e, ou bien $x \neq e$, $y \neq e$ et $\delta(x) = \delta(y)$. <u>La donnée de</u> H <u>avec sa composition partielle induite</u> par celle de G permet de reconstituer G [en tant que surensemble de H, muni d'une composition de groupe prolongeant la composition partielle de H

et telle que (G,H) soit un groupe gradué] à H-isomorphie près : en effet, si $a \in H^*$, G(a) peut être aussi défini, en termes de la composition partielle induite de H, comme $\{x \in H \ ; \ a \# x\}$. De lors, G est le composé direct des $G(a) \subseteq H$ $(a \in H^*)$ ainsi définis distincts, et H est visiblement, la partie homogène de G pour cette graduation de G. On voit aussi que les graduations structes et propres de (G,H) sont complètement déterminées, aux noms de grades près, par la donnée de H avec sa composition partielle seulement. G s'appelle alors le linéarisé de (H;xy) (ou simplement de H) et se note $\overline{H}$.

De lors l'idée vient de définir les graduations des groupes gradués à l'isomorphie par rapport à leur partie homogène H et aux noms des grades près par la donnée de cette partie homogène avec sa composition partielle induite par celle du groupe gradué correspondant. Mais, pour réaliser ce programme, il faut caractériser les monopéroïdes (H ; xy), qui sont les parties homogènes de quelque groupe gradué, et dont la compositon partielle xy est induite sur H par celle de ce groupe. Cette caractérisation est donnée par la proposition 2.

PROPOSITION 2 : Le monopéroïde (H ; xy) est la partie homogène de quelque groupe gradué G avec la composition partielle induite par celle de ce groupe ssi :

① $(\exists e \in H)\ (\forall x \in H)\ [x \# e$ et $xe = x]$; ② $x \# x$;

③ $(\forall x,y,z \in H)\ [x \# y,\ y \# z$ et $y \neq e]$ impliquent $x \# z$; ④ Pour tout $a \in H$ tel que $a \# e$, $H(a) = \{x \in H \ ; \ a \# x\}$ est un groupe par rapport à xy (donc, en particuliers, des $x,y \in H(a)$ quelconques sont composables, autrement dit la compositon partielle xy de H induit sur H(a) une composition partout définie). Il est à remarquer que la condition nécessaire et suffisante pour que G soit abélien est que tous les H(a) le soient, autrement dit que $a \# b \Rightarrow ab = ba$.

Démonstration : Les conditions 1° - 4° sont nécessaires, car, si H est la partie homogène d'un groupe gradué G, élément neutre e de g satisfait à 1°; 2° est évident, 3° est la traduction de la condition 3° de la proposition 1, et si $a \neq e$, on a $H(a) = G(a)$. Vice versa, supposons ces axiomes satisfaits . Soient $a,b \in H..\{e\}$. Si $b \in H(a)$ et si $x \in H(b)$, on a $a \not\# b$, $b \not\# x$ et $b \neq 0$, donc, en vertu de 3°, $a \not\# x$, autrement dit $x \in H(a)$ et $H(b) \subseteq H(a)$. Mais si $b \in H(a)$, puisque, en vertu de 2°, $a \in H(a)$, on a $b \not\# a$, donc, si $b \neq e$, $a \in H(b)$ et $H(a) \subseteq H(b)$, d'où $H(a)=H(b)$ (on voit, en même temps, que la composabilité est symétrique : $a \not\# b \Rightarrow b \not\# a$; en effet, si $a \neq e$, on a, pour tout $b \in H$, $a \not\# b \Rightarrow b \not\# a$, ce qui prouve la symétrie quand $a \neq e$, $b \neq e$. D'autre part, si $a \neq e$, on a, en vertu de 1°, $a \not\# e$, donc aussi $e \not\# a$, et si $a=b=e$, $a \not\# b$ coïncide avec $b \not\# a$). En vertu de 1°, on a $e \in H(a)$ quel que soit $a \in H..\{e\}$ et, puisque $xe = x$ pour tout $x \in H(a)$, e est l'élément neutre de ce groupe, donc $ex=x$ pour tout $x \in H(a)$. Et comme H est la réunion des $H(a)$, $a \in H \ldots \{e\}$, on a $ex=x$ pour tout $x \in H$. On a toujours $H(a) \cap H(b) \supseteq \{e\}$ $(a,b \in H \ldots \{e\})$. Mais si $H(a) \cap H(b) \neq \{e\}$, il existe un $c \neq e$ tel que $c \in H(a) \cap H(b)$, d'où résulte $H(a)=H(c)=H(b)$. On peut donc définir le composé direct G des H(a) distincts et identifier, par le procédé canonique, chaque H(a) avec un sous-groupe de G, auquel cas, si l'on considère cette décomposition directe de G comme une graduation. $H = \cup H(a)$ $(a \in H^* = H \ldots \{e\})$ devient la partie homogène de G pour cette graduation. Par ailleurs, les compositions induites sur tout H(a) $(a \in H, a \neq e)$ par celles de H et de G visiblement coïncident, donc la composition de H est induite par celle de G.

Le monopéroïde (H ; xy) est appelé un homogroupoïde[3], qui est dit

(3) *Il serait logique d'appeler cette structure "groupoïde". Mais ce terme ayant déjà plusieurs sens, j'ai cru préférable d'employer un autre terme en accord avec les principes généraux de ma terminologie.*

abélien (et est souvent écrit additivement) si ses éléments composables commutent. On appelle sous-homogroupoïdes de H les $h \subseteq H$, qui sont les parties homogènes des sous-groupes homogènes g du linéarisé $G=\overline{H}$ de H (auquel cas, il est évident que la composition partielle induite sur h par celle de H coïncide avec celle induite par la composition de g, donc aussi de G). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait : 1° $x \in h \Rightarrow x^{-1} \in h$; 2° $x, y \in h$ et $x \# y \Rightarrow xy \in h$. La nécessité de ces axiomes est évidente. Supposons ces axiomes satisfaites, et considérons la structure (h ; xy), où, pour $x,y \in h$, on pose $x \# y$ dans cette structure ssi on a $x \# y$ dans (H ; xy), et, dans ce cas, le composé xy des x,y dans h est défini comme égal à leur composé dans H, ce qui est possible en vertu de 2°. Montrons que (h ; xy) est un homogroupoïde : en effet, puisque $x \in h \Rightarrow x^{-1} \in h$ (axiome 1°), on a, puisque $x \# x^{-1}$ dans H, $e = x\,x^{-1} \in h$. Puisque la composabilité sur h coïncide avec celle sur H, les axiomes $a \# a$ et $(x \# y, y \# z, y \neq e) \Rightarrow x \# z$ pour les éléments de h résultent des mêmes axiomes pour ceux de H. Enfin, si $a \neq e$ est $\in h$, $h(a) = \{x \in h ; a \# x\}$ est $= H(a) \cap h$, et si x,y sont $\in h(a)$, on a $x,y \in H(a)$, donc $x \# y$ dans H et $xy \in h \cap H(a) = h(a)$. Comme $e \in h(a)$ et $x \in h(a) \Rightarrow x^{-1} \in h \cap H(a) = h(a)$, h(a) est un groupe. Le linéarise $\overline{h}$ de h est un sous-groupe homogène de G, dont h est en partie homogène. Il est clair que h est invariant dans H ssi, pour tout $a \in h \ldots \{e\}$, h(a) l'est dans H(a), auquel cas la partie homogène de $\overline{H}/\overline{h}$, munie de graduation induite par celle de $\overline{H}$, est $\bigcup_{a \in H^*} H(a)/H(a) \cap h$, où, bien entendu, les éléments neutres des groupes $H(a)/H(a) \cap h$ sont toutes identifiées.

Les axiomes 1°, 2°, 3°, 4° des homogroupoïdes sont dites axiomes resp. d'élément neutre, d'autocomposabilité, de presque-transitivité

et de groupe. Ce qui précède montre qu'il y a trois manières d'envisager et étudier les groupes gradués (et aussi des strutures plus riches, considérées plus loin, qui incluent celle d'un groupe gradué abélien).

I. Point de vue non-homogène : Un groupe gradué est un groupe G muni d'une décomposition directe $\bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta$

II. Point de vue semi-homogène : Un groupe gradué (considéré à l'équivalence faible près) est un couple $(G, H \subseteq G)$, où H satisfait aux axiomes 1°) - 6°) de la Proposition 1.

III. Point de vue homogène : Un groupe gradué (considéré à la H-isomorphie et à l'équivalence faible près) est le linéarisé $\overline{H}$ d'un homogroupoïde H. Chacun de ces points de vue a ses avantages et désavantages, dont le poids respectif varie selon la situation, c'est-à-dire selon ce à quoi on s'intéresse. Les points de vue I et II correspondent mieux aux habitudes mentales des mathématiciens, car la composition qui y est employée est celle de g, qui est partout définie. C'est certainement le point de vue I qui est le meilleur si l'on s'intéresse sans préférence à tous les éléments de G, aussi bien homogènes que non - homogènes. Mais si l'on s'intéresse seulement (ou surtout) aux éléments et aux sous-groupes homogènes la situation est différente. Dans le point de vue I, les théorèmes même concernant les entités homogènes, se formulent, en général, de telle manière qu'ils comportent des démonstrations, au fond inutiles sur les éléments non homogènes quelconques. Et il n'est pas intuitif de voir quels sont les éléments non - homogènes vraiment indispensables pour une démonstration concernant les objets homogènes. Par contre, cela se voit très bien dans les points de vue II, III, qui d'ailleurs, différent

peu quant au fond : peu importe, en effet, que H soit supposé plongé d'emblée dans un groupe G, ou qu'un tel groupe $\overline{H}$ soit supposé construit à partir H muni de sa composition. Toutefois le point de vue III a quelques avantages de terminologie et d'écriture : il est plus simple de dire "élément" qu'"élément homogène" et écrire "a#b" que "ab $\in$ H". Sauf dans les discussions axiomatiques et quelques questions spéciales, j'adopterai le point de vue III.

D'une manière plus générale, on peut étendre aux groupes gradués beaucoup de notions de la théorie des groupes abstraits. Ainsi, si g est un groupe gradué, dont la graduation est

$$G = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta,$$

et si $\{g^\beta ; \beta \in B\}$ est une famille de sous-groupes homogènes, on dira que G est un composé direct $\bigoplus_{\beta \in B} g^\beta$ s'il l'est en tant que groupe abstrait. On voit que cela a lieu ssi, pour tout $\delta \in \Delta$, G_δ est le composé direct $\bigoplus_{\beta \in B} g_\delta^\beta$, où $g_\delta^\beta = g^\beta \cap G_\delta$. Ceci permet de définir, comme suit, les <u>composés directs</u> (car il y en a toute une classe) d'une famille $\{g^\beta ; \beta \in B\}$ de groupes gradués considérés à l'équivalence de graduations près, et dont, par suite les ensembles des grades sont à considérées comme disjoints deux à deux. Si $g^\beta = \bigoplus_{d \in D_\beta} g_\alpha^\beta$ est la graduation de g, posons $D = \bigcup_{\beta \in B} D_\beta$. Les D_β, $\beta \in B$, forment une partition de D, et soit ε_B l'équivalence correspondante sur D. Soit η une équivalence sur E orthogonale à ε_B, et soit $\Delta = D/\eta$. Si $\delta \in \Delta$ (donc $\delta \subseteq D$) et $\beta \in B$, posons $g_\delta^\beta = g_d^\beta$ si $\delta \cap D_\beta = \{d\}$, et $g_\delta^\beta = \{e^\beta\}$ (ou e^β est l'élément neutre de g^β) si $\delta \cap D_\beta = \emptyset$. Posons $g_\delta = \bigoplus_{\beta \in B} g_\delta^\beta$. Alors, on appelle η - <u>composé direct</u> des g^β, $\beta \in B$, le groupe $\bigoplus^{(\eta)}_{\beta \in B} g^\beta = \bigoplus_{\delta \in \Delta} g_\delta$, dont le dernier composé direct est la graduation. En tant que groupe abstrait, il coïncide, d'ailleurs, avec $\bigoplus_{\beta \in B} g^\beta$.

On définit, d'une manière analogue, le η - <u>composé direct complet</u> $\oplus^{(\eta)'}_{\beta \in B} g^\beta$, en remplaçant les $g_\delta = \oplus_{\beta \in B} g^\beta_\delta$ par les composés directs complets correspondants $g'_\delta = \oplus'_{\beta \in B} g^\beta_\delta$. Mais ici le η - composé complet $\oplus^{(\eta)'}_{\beta \in B} g^\beta$ des g^β, considéré comme groupe abstrait, ne coïncide pas, en général avec le composé complet des groupes abstraits g^β, mais en est un sous-groupe. Si η est l'équivalence discrète de D, les η -composés direct et direct complet coïncident, et on les appelle le composé <u>disjoint</u> des g^β, $\beta \in B$. Ce composé est noté $\dot{\oplus}_{\beta \in B} g^\beta$. On peut définir, par le même procédé le η-composé libre $\llcorner^{(\eta)}_{\beta \in B} g^\beta$, en posant $(\llcorner g)_\delta = \llcorner_{\beta \in B} g^\beta_\delta$ et $\llcorner^{(\eta)}_{\beta \in B} g^\beta = \oplus_{\delta \in \Delta} (\llcorner g)_\delta$, où la décomposition directe à droite est la graduation de ce groupe.

Ainsi, les composés directs, directs complets et libres "extérieurs" d'une famille $\{g^\beta ; \beta \in B\}$ de groupes gradués forment une classe paramétrisée par l'ensemble des équivalences η sur $D = \cup_{\beta \in B} D_\beta$ orthogonales à l'équivalence, qui correspond à cette partition de D.

Les notions précédentes se traduisent immédiatement en langage du point de vue homogène un homogroupoïde H est le composé direct de ses sous-homogroupoïdes h^β, $\beta \in B$, si, pour tout $\delta \in \Delta$(où Δ est l'ensemble des grades de H), H_δ en est un des $h^\beta_\delta = h^\beta \cap H_\delta$. Et si $\{H^\beta ; \beta \in B\}$ est une famille d'homogroupoïdes, et si η est une partition sur $D = \cup_{\beta \in B} D_\beta$ (où les D_β, supposés disjoints deux à deux, sont les ensembles des grades des h^β correspondants) orthogonale à cette partition de D, les η- composés direct $\oplus^{(\eta)}_{\beta \in B} H^\beta$, direct complet $\oplus^{(\eta)'}_{\beta \in B} H^{(\beta)}$ et libre $\llcorner^{(\eta)}_{\beta \in B} H^\beta$ sont les homogroupoïdes H avec l'ensemble des grades $\Delta = D/\eta$ tel que respectivement $H_\delta = \oplus_{\beta \in B} H^\beta_\delta$, $H_\delta = \oplus'_{\beta \in B} H^\beta_\delta$, $H_\delta = \llcorner_{\beta \in B} H^\beta_\delta$, où $H^\beta_\delta = H^\beta_d$ quand $\delta \cap D_\beta = \{d\}$ et $H^\beta_\delta = \{e^\beta\}$, où e^β est l'élément neutre de H^β, si $\delta \cap D_\beta = \emptyset$.

Quand l'ensemble Δ des grades propres d'un groupe gradué G est totalement ordonné de manière que le grade nul 0 en soit le plus petit élément, on peut attribuer un grade aux éléments non homogènes de G. Ceci présente surtout l'intérêt (et on y reviendra), surtout en vue d'applications à l'analyse et à la géométrie algébrique, dans le cas des structures plus fortes - anneaux et modules gradués. Si $x = \prod_{\delta \in \Delta} x_\delta$, où seulement un nombre fini des x_δ sont $\neq e$, on pose $\delta(x) = \mathrm{Max}\,\delta(x_\delta) = \mathrm{Max}\{\delta \ ; \ x_\delta \neq e\}$. On peut d'une plus générale, attribuer un grade à certains éléments $x' = \prod_{\delta \in \Delta} x_\delta$ du composé direct complet $\oplus'_{\delta \in \Delta} G_\delta$ des G_δ, $\delta \in \Delta$, qui sont supérieurement bornés, c'est-à-dire tels que l'ensemble $\{\delta \ ; \ x_\delta \neq e\}$ a le plus grand élément - il suffit d'appliquer la même définition. Toutefois, une notion si large est sans intérêt dans le cas des groupes additifs des anneaux et des modules gradués, car on ne peut pas en général, définir le produit des éléments aussi généraux. Mais il existe une partie de $\oplus'_{\delta \in \Delta} G_\delta$, que sera appelée le <u>completé de Hahn</u> du groupe gradué g et sera notée $G^{(h)}$, où le grade des éléments ainsi défini est vraiment utile : $G^{(h)}$ est l'ensemble des $\prod_{\delta \in \Delta} x_\delta$ tels que $\{\delta \in \Delta \ ; \ x_\delta \neq e\}$ soit bien ordonné par l'ordre induit par celui de Δ. En effet, comme on verra, si G est le groupe additif d'un anneau gradué A ou d'un A-module gradué M, on peut étendre, dans certains cas importants, la multiplication de A à $A^{(h)}$ et la multiplication externe des éléments de M par ceux de A à celle des éléments de $M^{(h)}$ par ceux de $A^{(h)}$.

Les structures gradués à l'ensemble des grades totalement ordonné peuvent, en particulier, se construire, d'une certaine manière canonique, à partir des structures filtrées de même type à filtration totalement ordonnée et s'appellent les <u>gradués</u> de ces structures. Elles, et surtout leurs parties homogènes que nous appellons les <u>squelettes</u> des structures

filtrées correspondantes, peuvent jouer un rôle important pour l'étude de ces structures. Nous allons terminer ce paragraphe en décrivant cette construction pour les groupes filtrées.

V étant un groupe, il sera dit <u>totalement filtré</u> s'il est muni d'une famille Φ de ces sous-groupes invariants(4) totalement ordonné par inclusion et telle que l'intersection des $F \in \Phi$ soit $\{e\}$, où e est l'élément neutre de V. La famille Φ est dite une <u>filtration</u> totale de V. Généralement, on l'écrit sous la forme $\Phi = (V_\delta \; ; \; \delta \in \Delta)$, où les δ, appelés <u>indices de filtration</u>, forment un ensemble totalement ordonné de manière que $\delta < \delta' \Rightarrow V_\delta \subset V_{\delta'}$. La filtration totale sera dite <u>principale</u> si, pour tout $x \in V$, existe les plus petit δ tel que $x \in V_\delta$, et est dite <u>presque principale</u> si cela a lieu pour tout $x \in V$ sauf $x=e$. Si tel est le cas, on note $\delta(x)$ ce δ, et on l'appelle <u>indice filtratif</u> de x.

V étant un groupe totalement filtré, soit, pour tout $\delta \in \Delta$, $\overline{V}_\delta = \bigcup_{\delta' < \delta} V_{\delta'}$. Alors $\overline{V}_\delta$ est un sous-groupe invariant de V_δ. Soit $G_\delta = V_\delta / \overline{V}_\delta$ et $G = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta$. Le <u>gradué</u> gr(V) de V est précisément le groupe G gradué par la décomposition directe écrite. Son ensemble des grades coïncide avec celui Δ des indices de filtration, et on y maintient le même ordre total. Le <u>squelette</u> s(V) de V est la réunion de G_δ, où les éléments neutres de tous les G_δ sont identifiés. Si la filtration est principale ou presque principale, on fait correspondre à tout $x \in V$, qui est $\neq e$, sa classe $\overline{x} = x \, \overline{V}_{\delta(x)} \pmod{\overline{V}_{\delta(x)}}$ et on pose $\overline{e} = \{e\}$. Les $\{\overline{x} \; ; \; x \in V\}$ forment une partition de V, qu'on peut identifier avec le support de s(V) si l'on identifie les éléments neutres $\overline{e}_\delta = \overline{G}_\delta$ des G_δ avec $\overline{e} = \{e\}$, et si l'on

(4) *On peut considérer les filtrations plus générales, où Φ est une famille de sous-groupes pas forcément invariants, auquel cas le gradué n'est plus un groupe gradué, mais un objet de nature plus générale qu'on peut appeler groupe de permutations gradué. Mais, pour le moment, la nécessité d'une telle généralisation ne s'est pas fait sentir.*

transporte sur $\{\bar{x} ; x \in V\}$ la composition partielle de s(V). Par cette identification, G_δ s'identifie avec $\hat{G}_\delta = (V_\delta .. \bar{V}_\delta)/_{\bar{V}_\delta} \cup \{e\}$ et la composition sur ce groupe, transportée de G_δ par cette identification, sera, visiblement, la suivante : si $\bar{x}$, $\bar{y} \in \hat{G}_\delta$ ne sont pas opposées (c'est-à-dire on n'a pas $\bar{y} = \bar{x}^{-1} = \overline{x^{-1}}$), $\bar{x},\bar{y}$, se composent comme des sous-ensembles de V (ceci est évident si $\bar{x} \neq \bar{e}$ et $\bar{y} \neq \bar{e}$, car alors l'identification de G_δ et de $\hat{G}_\delta$ est l'identité pour $\bar{x},\bar{y}$ et $\bar{x}\bar{y} \neq G_\delta$; et on a $\bar{e}\bar{x} = \bar{x}\bar{e} = \bar{x} = \bar{G}_\delta\ \bar{x} = \bar{x}\ \bar{G}_\delta$, et les éléments de G_δ se composent comme des sous-ensembles de V), mais on doit poser $\bar{x}\ \bar{x}^{-1} = \bar{e} = \{e\}$: on a, visiblement, pour tout $x \in V$, sauf , éventuellement, $x = e$, $\delta(\bar{x}) = \delta(x)$.
Donc la composition partielle sur s(V), identifié ainsi à $\{\bar{x} ; x \in V\}$ est la suivante : on a $\bar{x} \# \bar{y}$ ssi $\delta(\bar{x}) = \delta(\bar{y})$ ou un au moins des $\bar{x},\bar{y}$ est $\bar{e}$; si $\bar{x} \# \bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$ est le composé des $\bar{x}$ et $\bar{y}$ en tant que sous-ensembles de V sauf si $\bar{y} = \bar{x}^{-1}$; et $\bar{x}\ \bar{x}^{-1} = \bar{e}$.

Si l'on gradue s(V) ainsi défini par $\Delta^* = \{\delta(x) ; x \in V \text{ et } \delta(\bar{x}) \in \Delta\}$, cette graduation est stricte ou propre selon que $\{e\} \notin$ ou $\in \Phi$ (et, dans le second cas, on désigne $\{e\}$ par Φ_0).

§ 2 - ANNEAUX ET CORPS GRADUES, ANNEIDES ET CORPOIDES, MODULOIDES.

Rappelons, pour commencer, la définition d'anneau gradué donné par Bourbaki. Soit A un anneau associatif unitaire [5] et

$$(1) \qquad A = \bigoplus_{\delta \in \Delta} A_\delta$$

une graduation de son groupe additif dont la partie homogène sera toujours notée H. Supposons que sur Δ est donné une composition à $\xi\eta$ (Bourbaki l'écrit $\xi+\eta$), telle que Δ soit un demi-groupe unitaire et commutatif. Alors cette structure est dite un <u>anneau gradué</u> de type Δ (et la graduation considérée du groupe additif de A est dite sa <u>graduation d'anneau</u>) si, pour tous $\xi, \eta \in \Delta$, on a

$$(2) \qquad A_\xi \; A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}$$

A première vue, cette définition parait bonne et naturelle sauf la restriction que A est unitaire et que la composition de Δ est commutative, ce qui n'est naturel que si A l'est (par contre, si A est unitaire, il est naturel de supposer que Δ le soit). Mais l'analyse approfondie de cette définition montre qu'elle contient des restrictions cachées beaucoup plus graves et, une fois qu'elle est remplacée par une définition vraiment adéquate, cette dernière s'applique aussi, telle quelle, aux anneaux non-associatifs.

En effet, du point de vue de la structure de l'anneau A et de la graduation (1) de son groupe additif, (2) est vraiment une condition ssi $A_\xi \; A_\eta \neq \{0\}$. En effet, seulement dans ce cas, la condition que $A_\xi A_\eta$ soit contenu dans $A_\zeta, \zeta \in \Delta$ est une véritable condition, car $\{0\}$ est contenu automatiquement dans tout A_ζ.

---

(5) *Il me semble, mais je peux me tromper, que dans la première édition de l'"Algèbre " de Bourbaki, où cette notion a été introduite, A était supposé aussi commutatif.*

En plus, si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, ce ζ est unique, et (2) impose donc, à partir de la structure de l'anneau A et de sa graduation additive, le composé $\xi\eta$ de tels ξ,η sur Δ. Il est donc raisonnable d'exiger la condition (2) que si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, et pour pouvoir formuler cette condition il suffit que la composition $\xi\eta$ (pouvant être partielle), soit définie pour de telles paires (ξ,η). Bien entendu, rien n'empêche qu'elle soit aussi définie pour d'autres, mais si elle est définie seulement pour de telles paires, elle est dite <u>stricte</u>. Le reste de la composition de Δ est de pure convention et sans rapport avec la structure de A et sa graduation (1), exactement comme les grades vides des groupes gradués [que, d'ailleurs, la graduation (1) peut avoir ; mais, évidemment, si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, aucun des ξ, η n'est vide]. Mais la condition (2) ainsi restreinte peut aussi se formuler, en utilisant la notion de grade $\delta(x)$ des $x \in g$ homogènes et non nulles introduite au § 1, comme

(3) si $x,y \in g$ sont homogènes, $xy \neq 0$ implique $\delta(x\,y)=\delta(x)\delta(y)$ [$\delta(x)$ et $\delta(y)$ existent, car $xy\neq 0$ implique $x\neq 0$ et $y\neq 0$].

Cette condition peut se décomposer en conjonction de deux parties :

(3') si $x,y \in g$ sont homogènes et $xy \neq 0$, xy est homogène et $\delta(xy)$ ne dépend que des $\delta(x)$, $\delta(y)$

et

(3'') $\delta(xy) = \delta(x)\delta(y)$.

La condition (3') est, en fait, la seule partie de (3), qui est une condition sur la structure de l'anneau A et sur sa graduation (1) considérée à l'équivalence faible près, tandis que (3'') peut être con-

sidérée comme la définition de la composition stricte de Δ si on l'écrit sous la forme

(3''') si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, $\xi\eta \underset{\text{déf}}{=} \delta(x,y)$, ou $x,y \in H$ sont tels que $\delta(x) = \xi, \delta(y) = \eta$ et $xy \neq 0$.

Ici quelque chose d'inattendu se produit. Il se trouve que la première partie de (3') : le produit de deux éléments homogènes est homogène (ce qui peut s'écrire $H^2 \subseteq H$) implique la seconde partie : si ce produit est non-nul, son grade ne dépend que de ceux de ses facteurs.

PROPOSITION 3 : Si le produit de deux éléments homogènes d'un anneau A muni d'une graduation de son groupe additif est toujours homogène, le grade d'un produit non-nul d'éléments homogènes ne dépend que de ceux de ses facteurs.

Démonstration : si x ; x' sont $\in H^* = H \ldots \{0\}$, $\delta(x) = \delta(x') \Leftrightarrow x+x' \in H$. Mais si $z \in H$, $x+x' \in H$ implique $zx + zx' = z(x+x') \in H^2 \subseteq H$ et aussi $xz+x'z \in H$, ainsi que zx, zx', xz, $x'z \in H$. Ainsi, si $zx \neq 0$ et $zx'=0$, on a $\delta(zx) = \delta(zx')$, et si $xz \neq 0$ et $x'z \neq 0$, on a $\delta(xz) = \delta(x'z)$.

Soient $x,x',y,y' \in H$, $xy \neq 0$, $x'y' \neq 0$ (donc aucun des x,x',y,y' n'est nul), $\delta(x) = \delta(x')$, $\delta(y) = \delta(y')$. Si $xy' \neq 0$, on a $\delta(xy) = \delta(xy')$ et $\delta(xy') = \delta(x'y')$, donc $\delta(xy) = \delta(x'y')$. La démonstration est analogue si $x'y \neq 0$.

Et si $xy' = x'y = 0$, on a $xy + x'y = (x + x')(y + y') \in H$, car $x + x' \in H$ et $y + y' \in H$, on a donc encore $\delta(xy) = \delta(x'y')$ et tout est prouvé.

Ainsi, en se plaçant au point de vue non-homogène, on adoptera la définition suivante des anneaux gradués (qu'on dira "généraux" pour les distinguer des anneaux gradués au sens de Bourbaki).

On appelle <u>anneau gradué</u> un anneau A muni d'une graduation $A = \bigoplus_{\delta \in \Delta} A_\delta$ de son groupe additif telle que le produit de deux éléments homogènes quelconques de A (par rapport à cette graduation) en soit un élément homogène.

On définit, pour les $\xi, \eta \in \Delta$ tels que $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, le composé $\xi\eta$ pour la condition :

$$\xi\eta = \delta(x,y), \text{ où } \delta(x) = \xi, \ \delta(y) = \text{ et } xy \neq 0.$$

Quant à tout autre paire $\xi, \eta \in \Delta$, on peut soit ne pas définir $\xi\eta$, soit poser $\xi\eta$ égal à un élément arbitrairement choisi de Δ .

Il est à remarquer que cette définition ne suppose rien sur la multiplication xy de l'anneau A. Non seulement elle s'applique aux anneaux non-unitaires, mais même aux anneaux non - associatifs. A propos de ces anneaux, il existe deux terminologies : dans la première "anneau" est un anneau, qui peut être associatif ou pas, et quand on exige que sa multiplication soit associative, on l'appelle "anneau associatif" ; dans la seconde, "anneau" signifie "anneau associatif" de la première, et "anneau" de la première est dit "anneau non - associatif". Il existe évidemment deux terminologies analogues pour les anneaux gradués. Comme, à ma connaissance, seules quelques exemples (algèbre de Lie) des anneaux gradués non associatives, et seulement avec les graduations assez triviales, ont été considérés jusqu'à ce jour, et plutôt en vue des applications que de leur étude, on peut dire qu'aucune théorie générale des anneaux gradués non - associatifs (et, même, des algèbres de Lie gradués) n'existe actuellement (bien que ce domaine inexploré peut réserver des surprises). Pour cette raison, j'adopte la seconde ter-

minologie : si A est non - associatif , je parlerai d'anneau gradué non-associatif.

D'autre part, la structure de l'anneau A et sa graduation additive déterminent complètement la partie "essentielle" de la composition de Δ, car elles définissent $\xi\eta$ quand $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$. Ainsi, cette partie de composition de Δ est comme elle peut, et pas comme on veut. Il est déraisonnable d'imposer à cette composition, dans la définition générale d'anneau gradués, des conditions quelconques (que, dans le meilleur cas, sont inutiles) et de dire, quand elles ne sont pas satisfaites, qu'il ne s'agit pas, d'un anneau gradué. D'ailleurs, rien n'empêche d'étudier la classe des anneaux gradués satisfaisant à de telles conditions et de les mettre, comme hypothèses, dans certains théorèmes (à condition bien entendu, que ces hypothèses ne soient pas superflues). Qu'en est-il des conditions imposées à Δ par Bourbaki? Comme il suppose A unitaire, on voit facilement que, posant $1 = \delta(1)$, $A_1 A_\delta = A_\delta A_1 = A_\delta$, donc pour tout δ non vide, $1\delta = \delta 1 = \delta$, et rien n'empêche de le poser aussi pour les autres δ. Ainsi, sous les hypothèses que Bourbaki fait sur A cette condition est justifiée (bien qu'inutile). Si A est commutatif, on a, si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, $\xi\eta = \eta\xi$ et ceci a lieu aussi dans certains autres cas (p. ex. pour les algèbres extérieures). Mais, en général, pour les anneaux gradués non - commutatifs, même la partie "essentielle" de la composition de Δ n'est pas commutative, et de tels exemples sont faciles à produire. Ainsi, cette condition est, en général, injustifiée. Et qu'en est-il de l'associativité? La partie "essentielle" de la composition de Δ est-elle associative quand A l'est? La réponse est : en général, non!

En effet, soient ξ, η, $\zeta \in \Delta$. Si $A_\xi A_\eta A_\zeta \neq \{0\}$ on a aussi $A_\xi A_\eta \neq 0$ et $A_\eta A_\zeta \neq \{0\}$, $A_{\xi\eta} A_\zeta \supseteq (A_\xi A_\eta)\, A_\zeta \neq \{0\}$ et $A_\xi A_{\eta\zeta} \supseteq A_\xi (A_\eta A_\zeta) \neq \{0\}$ et on a, si $x, y, z \in H$ sont tels que $\delta(x) = \xi$, $\delta(y) = \eta$, $\delta(z) = \zeta$ et $xyz \neq 0$ (de tel x,y,z - existent en vertu de $A_\xi A_\eta A_\zeta \neq \{0\}$, $(\xi\eta)\zeta = \delta((xy)z)$ et $\xi(\eta\zeta) = \delta((xy)z)$. Comme $(xy)z = x(yz)$ $(=xyz)$, on a $(\xi\eta)\zeta = \xi(\eta\zeta)$ (on dit que ξ, η, ζ "associent"). Par contre, quand $A_\xi A_\eta A_\zeta = \{0\}$, on ne peut rien conclure. Il peut arriver qu'un des $(\xi\eta)\zeta$, $\xi(\eta\zeta)$ est défini (comme $A_\xi A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}$, si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$, il peut arriver, par exemple, que $A_{\xi\eta} A_\delta \neq \{0\}$ malgré ce que $A_\xi A_\eta A_\zeta = \{0\}$) et l'autre ne l'est pas, ou que $(\xi\eta)\zeta$ et $\xi(\eta\zeta)$ sont définis tous les deux, mais $(\xi\eta)\zeta \neq \xi(\eta\zeta)$. C'est M. Chadeyras (voir [2]), qui a découvert que cela peut arriver effectivement et en a donné des exemples (pour les A et Δ commutatifs). Il a prouvé le théorème suivant, qui montre combien loin peut aller cette non-associativité des grades.

THEOREME : Soit Δ un monopère (binaire) fini et commutatif. Alors, il existe des anneaux gradués commutatifs, dont l'ensemble des grades est Δ , tels que, pour tous $\xi, \eta \in \Delta$, $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$ (donc $\xi\eta$ est défini et détermine par la structure d'anneau de A et par sa graduation additive) et la composition des grades coïncide avec la composition donnée du monopère Δ. (D'ailleurs, Chadeyras donne, pour chaque Δ, une construction explicite d'un tel anneau gradué).

Une graduation d'un anneau A est dite <u>stricte</u> si elle est stricte en tant que sa graduation additive (c'est-à-dire, aucun grade $\delta \in \Delta$ n'est vide) et $\xi\eta (\xi, \eta \in \Delta)$ n'est défini que si $A_\xi A_\eta \neq \{0\}$. La graduation de A est dite <u>propre</u> si, elle l'est en tant que sa graduation additive (autrement dit, Δ n'a qu'un seul grade vide, noté 0, et on pose $\delta(0) = 0$), la

composition des grades est partout définie sur Δ , et on pose $\xi\eta = 0$ si $A_\xi A_\eta = \{0\}$.

Plaçons-nous maintenant au point de vue semi-homogène. Il est clair que, de ce point de vue, les anneaux gradués, définis à l'équivalence faible près (qui est celle de leur groupe additif gradué, sont des couples (A,H), où le sous-ensemble H de l'anneau A satisfait aux axiomes : 1°) $0 \in H$; 2°) $x \in H \Rightarrow -x \in H$; 3°) x,y,z, $x+y$, $y+z \in H$ et $y \neq 0$ impliquent $x + z \in H$; 4°) H engendre le groupe additif de A ; 5°) Pour tout $n \geq 2$ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ et $x_i + x_j \notin H$ pour tous les i,j distincts $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ impliquent $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \neq 0$; 6°) $H^2 \subseteq H$.

Cela résulte immédiatement de ce qui précède.

Et que se passe - t - il du point de vue homogène? On va considérer H muni de l'addition partielle x+y (dont la composabilité, appelée ici addibilité, sera notée toujours $\#$; $x \# y$ signifie donc "x,y sont addibles") et de multiplication partout définie (à cause de $H^2 \subseteq H$) xy induites. Quand une telle structure (H ; x+y, xy) est-elle la partie homogène d'un anneau (ou anneau non-associatif) gradué? Bien entendu, l'addition et l'addibilité de H doivent satisfaire aux axiomes d'homogroupoïde abélien. Mais du fait que l'anneau, où H est inclû, n'est pas donné, il faut imposer à la multiplication xy de H certaines conditions (il est à remarquer que l'axiome. 6°) $H^2 \subseteq H$ est déjà prise en considération vu qu'on suppose que xy est définie partout sur H). Quelles sont ces conditions : premièrement, il existe d'un élément biabsorbant (c.a.d. bilatéralement absorbant) 0 et, dans le cas des anneaux, l'associativité. D'autre part, nous avons vu que si x,y,z sont $\in H$, $x+y \in H$ implique $zx + zy \in H$ et $xz + yz \in H$, ce qui se traduit par $x \# y \Rightarrow zx \# zy$ et $xz \# yz$. En plus, on a les égalités distributives

$z(x+y) = zx + zy$ et $(x+y)z = xz + yz$, qui, du fait des addibilités prouvées, subsite dans H. Enfin, le biabsorbant multiplicatif 0 est l'élément neutre du groupe additif A, et, par conséquent, de ses sous-groupes $H(a)$, $a \in H^* = H \ldots \{0\}$,. Ainsi, l'axiome 2° d'homogroupoïde peut être réduite à : Pour tout $x \in H$, $x \# 0$, car, après cela, on peut montrer que 0 est l'élément neutre de tout $H(a)$, $a \in H^*$, donc de H. Mais on peut démontrer que ces conditions nécessaires sont aussi suffisantes en démontrant la

PROPOSITION 4 : Pour que $(H ; x+y, xy)$ soit la partie homogène d'un anneau (resp. anneau non-associatif) gradué avec l'addition (partielle) et la multiplication induites par celles de cet anneau, il faut et il suffit que les axiomes suivants soit satisfaits.

I - H est un demi groupe (resp. monopère) multiplicatif ayant un élément biabsorbant 0 (zéro).

II - 1°) $x \# 0$; 2°) $x \# x$; 3°) $x \# y$, $y \# z$ et $y \neq 0$ impliquent $x \# z$.

III - Pour tout $a \neq 0$, $H(a) = \{x \in H ; a \# x\}$ est un groupe abélien par rapport à l'addition.

IV - $x \# y \Rightarrow zx \# zy$, $xz \# yz$, $z(x+y) = zx + zy$, $(x+y)z = xz + yz$.

Démonstration : La nécessité de ces axiomes a déjà été prouvée. Supposons qu'ils sont satisfaits. Montrons d'abord que, pour tout $a \neq 0$, 0 est l'élément neutre du groupe additif $H(a)$, d'où résultera qu'il en est un de $\bigcup_{a \in H^*} H(a) = H$. En vertu de II 1°, $0 \in H(a)$, on a $0 \# 0$, et $0 = 0(0+0) = 0^2 + 0^2 = 0 + 0$, ce qui montre que 0 est bien l'élément neutre de $H(a)$. Par suite, H est un homogroupoïde additif. Soit $A = \overline{H}$ son linéarisé. Alors H est la partie homogène de A par rapport à sa graduation additive. Nous allons maintenant définir sur A une multiplication

prolongeant celle H et telle que A devienne un anneau (resp. anneau non-associatif). Puisque $H^2 \subseteq H$, cette inclusion aura encore lieu dans cet anneau, donc la graduation additive de A sera aussi sa graduation d'anneau, et H sera la partie homogène d'un anneau gradué. Soient $\bar{x},\bar{y} \in A = \bar{H}$. Alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ se mettent, et d'une seule manière, sous la forme $\bar{x} = \sum_{\delta \in \Delta} x_\delta$, $\bar{y} = \sum_{\delta \in \Delta} y_\delta$, où x_δ, y_δ sont $\in H_\delta = \{x \in H ; x=0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \delta(x) = \delta)\}$ et, sauf pour un nombre fini des $\delta \in \Delta$, $x_\delta = y_\delta = 0$.

Posons $\bar{x}\bar{y} = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} x_\delta y_{\delta'}$. Montrons, d'abord que cette multiplication est bilatéralement distributive par rapport à l'addition. Soit $\bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \bar{H}$ et soit que $\bar{z} = \sum_{\delta \in \Delta} z_\delta$. On a $\bar{x}+\bar{y} = \sum_{\delta \in \Delta} (x_\delta + y_\delta)$, donc $\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} z_\delta (x_{\delta'} + y_{\delta'})$ et puisque $x_\delta \neq y_{\delta'}$, on a $z_\delta x_{\delta'} \neq z_\delta y_{\delta'}$ et $z_\delta(x_{\delta'}+y_{\delta'}) = z_\delta x_{\delta'} + z_\delta y_{\delta'}$.

Donc $\bar{z}(\bar{x}+\bar{y}) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} (z_\delta x_{\delta'} + z_\delta y_{\delta'}) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} z_\delta x_{\delta'} + \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} z_\delta y_{\delta'} = \bar{z}\bar{x} + \bar{z}\bar{y}$.

La distributivité à droite se démontre d'une manière analogue. Supposons que la multiplication est associative, et montrons qu'alors celle de A l'est aussi : en effet

$$(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \Big(\sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} x_\delta y_{\delta'}\Big)\Big(\sum_{\delta'' \in \Delta} z_{\delta''}\Big) = \Big(\sum_{\delta^* \in \Delta} \Big(\sum_{\delta\delta' = \delta^*} x_\delta y_{\delta'}\Big)\Big)\Big(\sum z_{\delta''}\Big) = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta'' \in \Delta} \Big(\sum_{\delta\delta' = \delta^*} x_\delta y_{\delta'}\Big) z_{\delta''}.$$

Or, tous les $x_\delta y_{\delta'}$ non-nuls tels que $\delta\delta' = \delta^*$ ont un même grade δ^*, donc sont addibles deux à deux. Il en est donc de même pour les $x_\delta y_{\delta'}$, $z_{\delta''}$ tels que $\delta\delta' = \delta^*$, d'où $\Big(\sum_{\delta\delta' = \delta^*} x_\delta y_{\delta'}\Big) z_{\delta''} = \sum_{\delta\delta' = \delta^*} x_\delta y_{\delta'} z_{\delta''}$. Mais alors

$$(\bar{x}+\bar{y})\bar{z} = \sum_{\delta \in \Delta} \sum_{\delta' \in \Delta} \sum_{\delta'' \in \Delta} x_\delta y_{\delta'} z_{\delta''}.$$

On voit, d'une manière analogue, que $\bar{x}(\bar{y}\bar{z})$ a la même valeur, donc $(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \bar{x}(\bar{y}\bar{z})$, et tout est prouvé.

La structure $(H ; x + y, xy)$ satisfaisant aux axiomes I, II 1° - 3°, III, IV précédents s'appelle <u>annéïde</u> si sa multiplication est associative et <u>annéïde non - associatif</u> si on ne fait pas cette hypothèse. Le groupe additif gradué $\bar{H}$, muni en plus de la multiplication qu'on vient de dé-

finir est dit le linéarisé de H. Un $z \in H$ est dit régulier à gauche resp. à droite si $zx \# zy$, $zx \neq 0$, $zy \neq 0$ (resp. $xz \# yz$, $xz \neq 0, gz \neq 0$) impliquent $x \# y$. Un anneau gradué A et (aussi l'annéïde coresspondant H), qu'il soit associatif ou pas, est dit régulier à gauche si, pour tous $x,y,z \in H$, $zx \neq 0$, $zy \neq 0$ et $\delta(zx)=\delta(zy)$ impliquent $\delta(x) = \delta(y)$.

Ceci se traduit dans l'anneau par : $zx \neq 0$, $zy \neq 0$ et $zx+zy \in H$ impliquent $x+y \in H$, et dans l'annéïde par $zx \neq 0$, $zy \neq 0$, $zx \# zy$ impliquent $x \# y$. On définit d'une manière analogue la régularité à droite, et l'anneau gradué ou l'annéïde régulier à la fois à droite et à gauche est dit régulier tout court. Un annéïde commutatif régulier sans diviseurs de zéro est dit intégroïde. Il est clair que la composition des grades d'un intégroïde est partout définie et que Δ est un semi-groupe par rapport à cette composition. Un anneau gradué A est dit un corps gradué[6] si l'ensemble $H^* = H \,..\, \{0\}$ de ses éléments homogènes non-nuls de A est un groupe multiplicatif. La partie homogène d'un corps gradué A est appelée corpoïde. Donc, les corpoïdes, sont les structures $(Q ; x+y, xy)$ (ou l'addition $x+y$ est partielle et la multiplication xy est partout définie), qui satisfont aux axiomes :

I' Q est un presque groupe[7] (dont l'élément biabsorbant est noté 0, et dont l'élément neutre est noté 1).

II, III, IV les mêmes que pour les annéïdes. Mais II et III peuvent se simplifier : d'abord, au lieu de II 3 : $x \# x$, il suffit de suppo-

II 3' : $1 \# 1$ car, en vertu de IV, $1 \# 1 \Rightarrow x=x1 \# x1=x$. (c'est d'ailleurs, vrai pour tout annéïde unitaire)

---

(6) *il ne faut pas considérer un corps gradué comme un corps muni d'une graduation, mais, au contraire un corps comme un cas particulier d'un corps gradué dont la graduation est triviale (c'est-à-dire telle que* $\Delta=\{1\}$, $A_1^2 \neq \{0\}$ *et* $1^2=1$).

(7) *c'est-à-dire la réunion d'un groupe et d'un élément biabsorbant 0.*

De même II 3. ($x \# y$, $y \# z$ et $y \neq 0$) $\Rightarrow$ $x \# z$ peut se remplacer par ($x \# 1$, $1 \# y$) $\Rightarrow$ $x \# y$ car ($x \# y$, $y \# z$, $y \neq 0$) $\Rightarrow$ ($y^{-1}x \# 1$, $1 \# y^{-1}z$) $\Rightarrow$ $y^{-1}x \# y^{-1} z$ $\Rightarrow$ $x \# z$. Enfin III. $H(a) = \{x \in H ; a \# x\}$ est un groupe abélien par rapport à l'addition, peut se remplacer par la même condition pour $H(1)$ seulement, car $a \# x \Leftrightarrow 1 \# a^{-1}x$, donc $H(a) = a\,H(1)$ et $x \longrightarrow ax$ est un isomorphisme additif de $H(1)$ sur $H(a)$. Soit Q un corpoïde Alors, $x \longrightarrow \delta(x)$ ($x \in H^*$) est un homomorphisme du groupe Q^* sur le monopère Δ. Donc Δ est un groupe, dit le <u>groupe</u> de Q et, si $\delta(1)$ est noté 1, le noyau de cet homomorphisme, qui est l'ensemble $Q_1^* = Q_1 \,..\, \{0\}$ des $x \in Q$ de grade 1, est un sous-groupe invariant de Q^*. Mais Q_1 est un groupe additif abélien et $Q_1^2 \subseteq Q_{1^2} = Q_1$. Ainsi Q_1 est un anneau. Comme Q^* est un groupe, $R=Q_1$ est un corps dit le <u>corps</u> du corpoïde Q. Et si $a \in Q$ n'est pas nul, on a $Q(a) = aQ(1) = Q(1)a$ autrement dit $Q(a)=\{x \in Q, a \# x\}. = aR = Ra$ est un R-espace vectoriel de dimension 1, aussi bien à droite qu'à gauche. Un corpoïde est dit <u>sans torsion</u> si son groupe est sans torsion. Comme on verra plus loin, les véritables analogues des corps commutatifs du point de vue de la théorie des extensions et la théorie de Galois ne sont pas les corpoïdes commutatifs, mais les corpoïdes commutatifs <u>sans torsion</u>[8].

---

(8) *Bien que, dans le cas commutatif (et, même, dans le cas non-commutatif quand le groupe des grades est commutatif), les corps gradués (et, au fond, les corpoïdes) rentrent, comme un cas particulier, dans la notion des anneaux gradués au sens de Borbaki, ces derniers, hypnotisés par le point de départ historique de ces structures-anneaux des polynômes- et aveuglés par leur ultra-conservatisme, n'ont pas été capables de remarquer cet analogue gradué des corps, ni par eux-mêmes ni dans la littérature (car la définition des corpoïdes a été donnée par l'auteur dans* [5] *en 1944, et une grande partie de leur théorie a été énoncée dans* [6] *et développée avec les démonstrations dans* [8] *et* [9]).

On peut donner une idée intuitive suivante de la structure de corpoïde, d'ailleurs très approximative : un corpoïde est une sorte d'éventail, dont les plaques n'ont en commun que leur "axe" O.

La multiplication à droite (resp. à gauche) par un élément a de corpoïde produit une "rotation" "droite" (resp. "gauche") des plaques de l'éventail et celle de ses éléments (qui induit celle des plaques) "autour" de l'axe O de l'éventail (car ces multiplications laissent O immobile!). D'ailleurs, les rotations droite et gauche des plaques produites par un élément ne dépendent que de la plaque, où cet élément se trouve, et les éléments produisant la rotation identique des plaques forment la plaque "1", qui est fermée par rapport à la multiplication. L'addition est définie seulement sur chaque plaque. La plaque 1 est un corps par rapport à ses additions et multiplications, et les autres plaques sont des espaces vectoriels bilatères par rapport à ce corps.

Ainsi, un corpoïde Q peut être considéré comme une structure "presque - fibrée", dont la base est le groupe des grades Δ de Q, et dont les "presque - fibres" sont des R-espaces vectoriels bilatères de dimension 1, où R est le corps de Q. (ce ne sont pas des fibres, car elles ne sont pas disjointes, mais n'ont, deux à deux, qu'un seul élément commun O).

Bien que la notion de corpoïde a été introduite (en 1944 dans [5], mais trouvée en 1941), en relation avec la théorie des corps valués, les exemples particuliers des corpoïdes (ou de leurs parties) ont été employés depuis longtemps . Tel est le <u>corpoïde des physiciens</u> . Considérons le système de toutes les grandeurs physiques envisageables par les physiciens d'une certaine époque (bien entendu, seul un nombre assez

réduit de ces grandeurs est effectivement employé et défini : par exemple, à la fin du siècle dernier, l'ont été temps longueur, surface, volume, masse, masse spécifique, vitesse, accélération, force, travail (ou énergie), quantié de mouvement, charges électrique et magnétique, potentiel (en particulier, électrique et magnétique), induction et capacité électrique, etc.. . Pour éviter les confusions, distinguons les grandeurs (longueur, vitesse, charge électrique, etc...), leurs valeurs (longueur de ce bâton, vitesse de cet avion par rapport à la terre en ce moment, charge, électrique de ce condensateur, etc...) et les mesures de ces valeurs à l'aide d'une unité (la longueur de ce bâton est de 1,30m, la vitesse de cet avion est de 1000 km/h, la charge électrique de ce condensateur est de 0,1 coulomb, etc...). Ceci dit, les valeurs d'une même grandeur forment, en principe, un groupe additif ordonné isomorphe à celui des nombres réels où la partie non-négative d'un tel groupe (toutefois, dans la seconde moitié du XIXè siècle, ont apparu les grandeurs, telle l'intensité du courant alternatif dont l'ensemble des valeurs forme un groupe additif isomorphe à celui des nombres complexes) en plus, les physiciens définissent, d'une certaine manière, le produit d'une valeur a d'une grandeur A et d'une valeur b d'une grandeur B (et ceci indépendemment de tout choix des unités de mesure). Ainsi le produit de la longueur de ce bâton par le poids de cette roche est le travail effectué sur un trajet ayant la même longueur que le bâton par la force, appliquée tengentiellement, égale au poids de la roche.

Et la grandeur "travail" (ou "force vive", ou "énergie") est considérée elle-même comme le produit des grandeurs "longueur" et "force", et les valeurs de la grandeur produit sont précisément les produits des

valeurs possibles des grandeurs facteurs, si L, T, M désignent les grandeurs "longueur", "temps", "masse", toutes les longueurs employées dans la physique classique (fin du XIXè siècle) ont été de la forme $L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$, où α, β, γ étaient des fractions rationnels de dénominateur 2. Parmi ces grandeurs, il y avait celle dont le symbole était $1 = L^{\circ}T^{\circ}M^{\circ}$, qui était "nombre", dont les valeurs étaient les nombres réelles (éventuellement, complexes). D'ailleurs, si $e \neq 0$ et a étaient deux vecteurs d'une même grandeur A, on pouvait considérer a comme produit $\mu_e(a)e$ de e par un nombre $\mu_e(a)$, qui était précisément, la mesure de a à l'aide de l'unité e. Bien que pas tous les $L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Z/2)$ étaient effectivement employées, ni même définis du point de vue physique, on peut considérer, en principe, leur ensemble comme formant le cadre du système des grandeurs de la physique classique (tel est, d'ailleurs, le point de vue, plus ou moins explicite et conscient, des physiciens eux-mêmes). Les mesures des valeurs de certains grandeurs ne prennent, dans le monde physiques que les valeurs réelles non-négatives mais rien n'empêche de considérer comme "imaginables" toutes les valeurs réelles (et même complexes) et comme "réalisables" les seules valeurs non-négatives, et là, encore, les physiciens agissent ainsi. De cette manière, ils ont un système des valeurs x de différentes grandeurs $X = L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$ avec une addition partielle (seules les valeurs d'une même grandeur sont addibles, les valeurs nulles de toutes les grandeurs étant confondues) tandis que la multiplication de ces valeurs est partout définie. On vérifie sans peine que ce système est un corpoïde commutatif. Ses deux éléments x,y non-nulles ont un même grade (sont addibles) si, et seulement s'ils sont des valeurs d'une même grandeur. Donc si $x \neq 0$ est une valeur d'une grandeur $X=L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$, on peut poser le grade $\delta(x)$ de x égal à $X = L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}$ et si $\delta(x') = L^{\alpha'}T^{\beta'}M^{\gamma'}$ (ou $x' \neq 0$), on a

$\delta(xx') = L^{\alpha+\alpha'} T^{\beta+\beta'} M^{\gamma+\gamma'} = \delta(x)\ \delta(x')$. Ainsi, le groupe des grades de ce corpoïde est un groupe abélien libre de rang 3, donc sans torsion. Quant au corps de ce corpoïde, si l'on se borne aux grandeurs, dont les valeurs n'ont que des mesures réelles, on peut prendre comme ce corps le corps réel R, et si l'on veut inclure celles, dont les valeurs ont les mesures complexes, on doit prendre comme ce corps le corps complexe C (on peut donc distinguer les corpoïdes des physiciens réel et complexe). Bien entendu, le corpoïde (ou les corpoïdes) des physiciens s'élargit à mesure que la physique progresse. La physique quantique a introduit les grandeurs, qui sont d'ordre fini, tel le spin. Si l'on fait correspondre à chaque grandeur X une unité e(X), ce système d'unités est "absolu" au sens des physiciens si et seulement si $X \to e(X)$ est un isomorphisme. D'une manière évidente, dans la physique classique, un tel système est défini par e(L), e(T) et e(M) qui peuvent être prises arbitrairement, et on a $e(L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}) = e(L)^{\alpha}e(T)^{\beta}e(M)^{\gamma}$. [pour le système CGS, e(L)=cm, e(T)=sec, e(M)=gr]. D'ailleurs, il peut y avoir plusieurs conventions pour définir la multiplication des grandeurs (telles systèmes électrostatiques et systèmes électromagnétiques).

Le plus ancien corpoïde des physiciens a été celui défini par Viète (XVIe siècle) dans son algèbre. Comme on sait, les premières algèbres systèmatiques ont été celle de Viète et celle (un peu plus tardive) de Descartes (XVIIe siècle). L'Algèbre de Descartes est une algèbre du corps réels tandis que celle de Viète est celle de corpoïde (le corpoïde des physiciens de son époque, bien entendu plus restreint que ceux des époques plus tardives), dont le corps est le corps réel. Les historiens de mathématique considèrent l'Algèbre de Descartes comme un couronnement des efforts et des tatonnements de sa période la plus ancienne (Diophante,

Arabes, Europe médiévale et de l'époque de Renaissance) en vue de sa constitution, et ne comprenant pas la nature de la structure, qui est à la base de celle de Viète, considèrent cette dernière comme une bizarrerie et un état imparfait par rapport à celle de Descartes. S'il est exact qu'à l'époque, la mathématique (algèbre, géométrie analytique, analyse) ne pouvait se développer commodément que sur la base de l'algèbre de Descartes, celle de Viète est, par son inspiration, plus large et, en un certain sens, plus moderne. D'ailleurs, elle avait laissé des traces dans l'enseignement élémentaire (primaire et secondaire), où, jusqu'aux temps assez récents, on enseignait à côté des nombres "abstraits" (c'est-à-dire nombres réels, éléments de grade 1 du corpoïde des physiciens), les nombres "qualifiés" (c'est-à-dire les valeurs des grandeurs, comme 3 mètres, 50 grammes, etc...), en ne parlant, toutefois, presque pas de leur multiplication (qui était réservée aux cours de physique). Il n'est pas certain que la suppression de cet enseignement dans la "mathématique moderne" soit un bien.

D'ailleurs, une partie du corpoïde des physiciens de Viète avait été déjà considérée par les anciens grecs. Des les premiers Pythagoriciens, ils employaient explicitement la "multiplication des segments" et peut être, implicitement, d'autres multiplications des grandeurs (μεγεΤε) encore. On peut dire que, jusqu'à Eudoxe, les grandeurs employées par les grecs étaient L, L^2, L^3, T, LT^{-1}, P (poids) (identifié plus ou moins avec F-force), "angle" (dont le statut n'était pas clair). La construction d'Endoxe était au fond celle de la partie positive de la grandeur 1 de ce corpoïde grec partiel des physiciens, c'est-à-dire de son corps, à partir

de ses éléments d'un grade arbitraire connu, en prenant les quotients des éléments de ce grade, leurs "rapports". Toutefois, ce n'était qu'une construction "en pointillé", car, pour des raisons philosohiques, les anciens grecs ne considéraient pas les rapports comme des objets et n'opéraient avec eux que rarement et à leur corps défendant, et, en plus, refusaient de considérer les collections infinies d'une manière extensionnaliste. Ce n'est que graduellement (chez les derniers mathématiciens de l'époque romaine : Diophante, Ptolemée et chez les algébristes de civilisation arabe) que s'est établie l'interprétation actuelle des rapports d'Endoxe comme nombres (évolution, qui a abouti avec Omar Hayam, Xè siècle). Archimède a introduit aussi la grandeur PL^{-3} (poids spécifique) et élargi le domaine des valeurs de la grandeur "angle" en introduisant les angles de rotation. En ce qui concerne les grandeurs L, L^2, L^3, on trouve leur multiplication, sous une forme embrionnaire, déjà dans la mathématique Sumero-Babylonnienne.

Il semble probable que le corps rationnel $\underline{Q}$ a été conçu par les différents peuples, qui l'ont envisagé (Egyptiens, Suméro-Babyloniens, Grecs, Indiens, Chinois, Japonais, peut-être Maya) avant la mesure des grandeurs ou, en tout cas, pas plus tard. Par contre, il apparaît que le corps réel a été conçu (même seulement "en pointillé") par les anciens grecs <u>après</u> certaines autres parties du corpoïde des physiciens correspondants.

Considérons maintenant la question d'extension des grades dans un anneau gradué aux éléments non-homogènes quand l'opéroïde des grades est totalement ordonné et celui des relations entre les anneaux filtrés et les anneaux gradués.

D'abord, puisqu'on ne s'occupe, dans la première question que de grades d'éléments, il est raisonnable de considérer la graduation propre de l'anneau gradué A, car aucun élément homogène de a n'a aucun grade vide et non-nul. Le problème n'est raisonnable que si l'on suppose que l'ordre du monopère Δ des grades de A est coordonné avec sa composition, autrement dit si δ_1, δ_2, δ'_1, δ'_2 sont $\in \Delta$, on leur impose la condition : $\delta_1 \leq \delta'_1$ et $\delta_2 \leq \delta'_2$ impliquent $\delta_1\delta_2 \leq \delta'_1\,\delta'_2$. On doit supposer, en plus, que le grade nul 0 est le plus petit élément de Δ. Dans ces conditions, si l'on définit le grade de l'élément pas forcément homogène $x = \Sigma\, x_\delta$ de A, où $x_\delta \in A_\delta$ si $\delta \neq 0$ et $x_o = 0$, par $\delta(x) = \underset{\delta \in \Delta}{\text{Max}}\ \delta(x_\delta) = \underset{\delta \in \Delta}{\text{Max}}\{\delta \in \Delta;\ x_\delta \neq 0\}$ (ce maximum étant 0 si $\{\delta \in \Delta\ ;\ x_\delta \neq 0\} = \emptyset$). Alors, on a visiblement :

1°) $\delta(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 2°) $\delta(\overline{x} + \overline{y}) \leq \text{Max}\ \delta(x), \delta(\overline{y})$; 3°) $\delta(xy) \leq \delta(x)\delta(y)$.

Le grade apparait comme, une sorte de norme "hyperultramétrique" de A. Si A est un anneau gradué régulier (autrement dit, si ($\delta\xi = \delta\eta \neq 0$ ou $\xi\delta = \eta\delta \neq 0$) implique $\xi = \eta$, et si la partie homogène H de A n'a pas de diviseurs de zéro, on démontre, par le procédé standard du lemme de Gauss, que :

3°' $\delta(xy) = \delta(\overline{x})\ \delta(\overline{y})$, autrement dit $\delta(\overline{x})$ est une hypervaluation de A.

Si H est un annéïde régulier,on peut étendre la structure d'anneau de son linéarisé $A = \overline{H}$ à son completé de Hahn. Soient $\overline{x} = \underset{\delta \in \Delta}{\Sigma}\, x_\delta$ et $\overline{y} = \underset{\delta \in \Delta}{\Sigma}\, y_\delta$ deux éléments de ce complété : autrement dit $R = \{\delta \in \Delta;\ x_\delta \neq 0\}$ et $S = \{\delta\ ;\ y_\delta \neq 0\}$ sont bien ordonnés. Considérons $xy = \underset{\delta \in \Delta}{\Sigma}\ \underset{\delta' \in \Delta}{\Sigma}\ x_\delta\, y_{\delta'}$. Mettons le sous la forme $\underset{\delta^* \in \Delta}{\Sigma}\ (\underset{\delta\delta' = \delta^*}{\Sigma}\, x_\delta y_{\delta'})$, et soit

$D(\delta^*) = \{(\delta, \delta') \in \Delta \times \Delta\ ;\ \delta\delta' = \delta^*$ et $x_\delta\, y_{\delta'} \neq 0\}$

Alors, si $\delta_1\delta'_1 = \delta_2\delta'_2 = \delta^*$, $\delta_1 < \delta_2$ entraîne $\delta'_1 > \delta'_2$ (car $\delta'_1 \leq \delta'_2$, entraînerait $\delta_1\delta_1' \leq \delta_2\delta_1' \leq \delta_2\delta_2'$ donc $\delta_1\delta'_1 = \delta_1\delta'_2 = \delta_2\delta_2'$ et à cause de régularité, $\delta_1 = \delta_2$). Il en résulte puisque $\{\delta \in \Delta\ ;\ (\delta, \delta') \in D(\delta^*)\}$

est bien ordonné (car, pour de tels δ, $x_\delta\, y_{\delta'} \neq 0$, donc $x_\delta \neq 0$ et $\delta \in R$), que l'ensemble $\{\delta' ; (\delta, \delta') \in D(\delta^*)$ est inversement bien ordonné. Mais comme c'est un sous-ensemble de S, il est aussi bien ordonné, donc fini. Ainsi $D(\delta^*)$ est fini, et la somme est finie $\sum_{\delta\delta'=\delta^*\neq 0} x_\delta y_{\delta'}$ peut se remplacer par un seul $z_\delta \in H_\delta$. Si $\delta\delta'=0$, on a, par définition, $x_\delta y_{\delta'}=0$. Et l'ensemble $\{\delta\delta' ; (\delta, \delta') \in A \times B\}$ est, visiblement, bien ordonné. Donc, $\bar{x}\bar{y}$ est bien un élément du complété de Hahn de M. Pour des raisons formelles, ce complété est bien un anneau par rapport à son addition et la multiplication ainsi définie. Et, dans cet anneau par rapport à son addition et la multiplication ainsi définie. Et, dans cet anneau, $\delta(x)$ est une hypervaluation si H n'a pas de diviseurs de zéro (sinon, c'est une norme hyperultramétrique).

Soit A un anneau, et soit $(A_\delta ; \delta \in \Delta)$ une filtration totale de son groupe additif. En conservant les notations de §1, soit $gr(A) = \bigoplus_{\delta \in \Delta} A_\delta/\bar{A}_\delta$ le gradué du groupe additif filtré de A. Supposons que Δ est munie d'une composition associative compatible avec son ordre, c'est-à-dire telle que $\xi \leq \xi'$ et $\eta \leq \eta$ impliquent $\xi\xi' \leq \eta\eta'$, et telle que 1°) $A_\xi A_\eta \leq A_{\xi\eta}$; 2°) $A_\xi \bar{A}_\eta \cup \bar{A}_\xi A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}$. Cette composition sera dite <u>multiplication</u>, et elle induit, comme suit, une multiplication sur le gradué gr(A) du groupe additif de A, qui en fait un anneau gradué : Soient $\tilde{x} = x + \bar{A}_\xi$ et $\tilde{y} = y + \bar{A}_\eta$. Alors $\tilde{x}\tilde{y} = xy + x\bar{A}_\eta + \bar{A}_\xi y + \bar{A}_\xi\bar{A}_\eta \subseteq xy + A_\xi\bar{A}_\eta + \bar{A}_\xi A_\eta + \bar{A}_\xi\bar{A}_\eta \subseteq xy + \bar{A}_{\xi\eta} + \bar{A}_{\xi\eta} + \bar{A}_{\xi\eta} = xy + \bar{A}_{\xi\eta}$ (en effet, $\bar{A}_{\xi\eta}$ est un groupe additif). Comme $xy \in A_\xi A_\eta \subseteq A_{\xi\eta}$, $xy + \bar{A}_{\xi\eta}$ est l'élément $\widetilde{xy}$ de $A_{\xi\eta}/\bar{A}_{\xi\eta}$, qui ne dépend pas du choix des x,y, car c'est le seul, qui contient le produit des sous-ensembles $\tilde{x},\tilde{y}$ de A. On pose, dans

dans l'homogroupoïde $sq(A) = \bigcup_{\delta \in \Delta} A_\delta/A_\delta$, $\tilde{x}\,\tilde{y} = \widetilde{xy}$. On vérifie facilement que sq(A) devient alors un annéïde, donc son linéarisé gr(A) devient, en prolongeant cette multiplication par distributivité, un anneaux gradué. Bien entendu, ce gradué dépend de la multiplication choisie sur Δ. On dira qu'il s'agit d'un gradué strict de A si $A_{\xi\eta}$ est le groupe additif engendré par $A_\xi A_\eta$ (9).

Un cas important pour certaines applications est celui, où il existe un sous-anneau B de A tel que tous les A_δ soient des B-modules bilatères. Tel est le cas classique des anneaux locaux, ou B=A et les A_δ ($\delta \in \Delta$) sont les puissances m^δ de l'idéal maixmal m et Δ est l'ensemble ordonné N des entiers ≥ 0. Un autre cas est celui où A = Q est un corps (pas forcément commutatif) valué ou hypervalué (c'est-à-dire valué à l'aide d'un groupe totalement ordonné quelconque T) et B=I est son anneau de valuation. On prend, dans ce cas, comme filtration totale de K la famille $\{A_\gamma = \{x \in K ; |x| \leq \gamma ;$ $\gamma \in T$ de ses B sous-modules principaux, autrement dit de ses disques circonférenciés $\neq \{0\}$ de centre 0. Dans les deux cas, les filtrations additive est principale et on considère les gradués stricts (qui existent) de ces anneaux totalement filtrés. En plus, dans le second cas, comme $|xy| = |x||y|$ et, si $x \neq 0$, $\tilde{x}\,\tilde{x}^{-1} = \tilde{1}$, le squelette est un corpoïde. Ainsi, en vertu de § 1, on peut définir ainsi le squelette s(K) d'un corps valué ou hypervalué K : l'indice filtratif de $x \in K$ est ici $|x|$ et $\tilde{x}=\tilde{x} + A_{\delta(x)} = x(1+m)$, où m est l'idéal maximal de I. On a $\tilde{x}\#\tilde{y}$ ssi $|x| = |y|$ ou $xy = 0$. Si $\tilde{y} \neq -\tilde{x}$, $\tilde{x}+\tilde{y}$ est leur somme en tant

---

(9) Ce gradué peut ne pas exister pour double raison : a) ce groupe additif peut ne pas être parmi les A_δ ; b) la condition 2° peut ne pas être satisfaite pour une telle multiplication de Δ.

que sous-ensembles de K et $\tilde{x} + (-\tilde{x}) = \tilde{0} = \{0\}$. Le produit $\tilde{x}\tilde{y}$ des $\tilde{x},\tilde{y}$ est leur produit en tant que sous-ensembles de K.

Un couplé (A,M), où H est un anneau gradué et M un groupe gradué (écrit additivement) s'appelle un <u>module (gauche) gradué</u> si une multiplication externe $(\alpha, m) \to \alpha m$ de M par A est donnée telle que a) M soit un A-module ; b) M et N étant les parties homogènes de A et M, on ait $MN \subseteq N$. (c'est une définition "semi-homogène"). La notion homogène correspondante est celle de M-<u>moduloïde</u>. Un couple (H,N), où H est un annéïde et N un homogroupoïde abélien additif, est dit un H-moduloïde (à gauche) si, en plus, est donnée une multiplication externe $(\alpha, x) \to \alpha x (\alpha \in H, x \in N, \alpha x \in N)$ de N par H telle que : 1° $\alpha \# \beta \Rightarrow \alpha x \# \beta x$ et $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$; 2° $x \# y \Rightarrow \alpha x \# \alpha y$ et $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, 3° $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$. Si H est unitaire, le H-moduloïde N est dit <u>unitaire</u> si : 4° $1x = x$. Si $a \in H$ et $x \in N$ sont tels que $ax \neq 0$, le grade d(ax) de ax ne dépend que de ceux $\delta(a)$, d(x) de a et de x (la démonstration est semblable à celle qu'on a fait pour le grade du produit dans un anneau gradué). Soient Δ et D les ensembles des grades de H et de N. Si $H_\delta N_d \neq \{0\}$, il existe des $\alpha \in H_\delta$ et des $x \in N_d$ tel que $\alpha x \neq 0$, et on peut poser (et on posera) $\delta d = d(\alpha x)$. Une graduation de A-moduloïde N (ou de A-modules gradué M) est un triplé $(\Delta, D, \delta d)$, où δd est une application partielle $(\delta , d) \to \delta d$ de (Δ, D) dans D, qui est définie comme précédemment pour les δ, d tels que $H_\delta N_d \neq \{0\}$, nous peut être définie aussi pour d'autres paires (δ, d). Ainsi, D devient un Δ- extopéroïde par rapport a cette application. Si $\alpha, \beta \in \Delta$ et $d \in D$ sont tels que $H_\alpha H_\beta N_d \neq \{0\}$, on a $\alpha(\beta d) = (\alpha\beta)d$. Mais sinon, cette associativité (comme l'a montré aussi M. Chadeyras) peut être en défaut.

Si ses graduations de H et de N sont strictes et δd n'est définie que si $H_\delta N_d \neq \{0\}$, celle $(\Delta, D, \delta d)$ de H-moduloïde N est dite <u>stricte.</u> Si celles des H, N sont propres et si l'on définit δd pour tous $\delta \in \Delta$, $d \in D$ en posant $\delta d = 0$ si $\delta = 0$ ou $d = 0$ ou $H_\delta N_d = \{0\}$, la graduation du H-moduloïde N est dite <u>propre</u> et D est un Δ-extopère par rapport à cette graduation.

Un H-moduloïde N est dit <u>strict</u> si $\alpha x \not\# \alpha y$, $\alpha x \neq 0$, $\alpha y \neq 0$, $(\alpha \in H, x, y \in N)$ impliquent $x \not\# y$, et il est dit <u>régulier</u> si $\alpha x \not\# \beta x$, $\alpha x \neq 0$, $\beta x \neq 0$ impliquent $\alpha \# \beta$. Un annéïde A peut être considéré comme un A-moduloïde gauche si l'on considère comme un homogroupoïde additif et si l'on définit sa multiplication externe comme la multiplication à gauche par les $\alpha \in A$. Si q est un corpoïde, un q-moduloïde unitaire s'appelle un q-<u>espace vectoriel</u>. Visiblement, le H-moduloïde N est strict ssi, en graduation propre, $\delta d = \delta d' \neq 0 \Rightarrow d = d'$ et est régulier ssi $\delta d = \delta' d \neq 0 \Rightarrow \delta = \delta'$. Aux sous-modules homogènes des modules gradués correspondent, dans le point de vue homogène, des sous-moduloïdes, c'est-à-dire des sous-homogroupoïdes additifs N' de N tels que $HN' \subseteq N'$. On définit le moduloïde quotient (ou différence), noté N-N' ou N/N', comme quotient l'homogroupoïdes additifs correspondants, ou on définit comme suit la multiplication externe : Soit x, la classe de $x \in N \pmod{N'}$; alors, on pose, si $a \in H$, $\overline{ax} = \overline{ax}$ (on vérifie aisément la cohérence de cette définition et le fait que N - N' est un H-homogroupoïde). Si H est un annéïde, les sous-moduloïdes du H-moduloïde gauche (resp. droit) H correspondent aux idéaux homogènes de son linéarisé $A = \overline{H}$ et s'appellent <u>idéaloïdes</u> gauches (resp. droits) de A, et

idéaloïdes bilatères seront dits, idéaloïdes tout court. Si q est un idéaloïde de A, on définit l'annéïde quoitient H/q de H par q à peu près comme dans les anneaux : son support et sa structure additive sont ceux de l'homogroupoïde quotient de même nom, et la multiplication est définie par $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}$. Toutes les propriétés de nature ensembliste ou multiplicative des idéaux comme : premier, primaire, indécomposable, maximal, etc. définissent de la même manière pour les idélaoïdes, et on a les mêmes propriétés des annéïdes quotients : 1°) A/q est sans diviseurs de zéro ssi q est premier ; 2°) A/q est un corpoïde ssi : a) $A^2 \not\subseteq q$; b) q est maximal (et la démonstration, qui est purement multiplicative, reste inchangée). On définit la notion des annéïdes et des moduloïdes artiniens et noetheriens comme d'habitude, en remplaçant ces idéaux par les idéaloïdes et les sous-modules par les sous-moduloïdes.

Soit H un annéïde et $\bigcup_{\delta \in \Delta} H_\delta$ une graduation de H. Alors, l'application $\delta : x \to \delta(x)$ définie pour tout $x \in H$ non nul (mais pouvant être aussi définie pour $x = 0$ pour certaines graduations, en particulier pour la graduation propre) applique tout sous-annéïde de H sur un sous-monopéroïde de Δ, et tout idéaloïde (unilatère) de H sur un idéaloïde même côté de Δ. De même, si N est un H-moduloïde, $d : x \to d(x)$ applique tout sous-moduloïde de N sur un sous-ensemble stable du Δ - exopéroïde D. Soient $\Sigma(H)$, $I_g(H)$, $\Sigma(N)$ les ensembles des sous-annéïdes et d'idéaloïdes gauches de H, et celui des sous-moduloïdes de N, et soient $\Sigma(\Delta)$, $I_g(\Delta)$, $St_\Delta(D)$ les ensembles des sous-opéroïdes et des idéaloïdes gauches de Δ et celui des parties stables du Δ-opéroïde D. Alors, des

applications précédentes $\Sigma(H) \to \Sigma(\Delta)$, $I_g(H) \to I_g(\Delta)$, $\Sigma(N) \to St_\Delta(D)$ sont surjectives mais, en général, pas injectives. Mais si l'on fait correspondre à un sous-ensemble T de Δ ou de D son image inverse par δ resp. par d, auquel on ajoute 0 (s'il n'y est pas déjà), on obtient des injections $\Sigma(\Delta) \to \Sigma(H)$, $I_g(\Delta) \to I_g(H)$, $St_\Delta(D) \to \Sigma(N)$. Soient $\Sigma^{(\ell)}(H)$, $I_g^{(\ell)}(H)$, $St_\Delta^{(\ell)}(D)$ les images des $\Sigma(\Delta)$, $I_g(\Delta)$, $St_\Delta(D)$ par ces applications. Les objets U appartenant à ces images sont précisément les objets <u>larges</u> de la sorte considérée (sous-annéïdes et idéaloïdes gauches de H, sous-moduloïdes de N). Si q est un corpoïde, également δ: $x \to \delta(x)$ applique tout sous-corpoïde q' sur un sous-groupe $\Gamma(q')$ de son groupe des grades $\Gamma(q)$. Vice versa, sa Γ' est un sous-groupe de $\Gamma(q)$, $\delta^{-1}\,\Gamma' \cup \{0\}$ est un sous-corpoïde large de q et, visiblement, tous les sous-corpoïdes larges de q sont de cette forme. Les objets larges jouent un rôle important dans la théorie des annéïdes et des corpoïdes.

Soient H un annéïde commutatif et $S \subseteq H^* = H.. \{0\}$ un sous-ensemble multiplicativement fermé de H . On peut, sans difficulté, localiser H, et aussi tout H-moduloïde N, à l'aide S. Du point de vue multiplicatif, il n'y a guère de différence avec le cas des anneaux commutatifs et de leurs modules, car il s'agit de deux cas particuliers de localisation des semi-groupes commutatifs et de leurs extopères. D'une manière précise, les localisés H_S et N_S sont, du point de vue mulitplicatif, les quotients $S \times H / \equiv$ resp. $S \times N / \equiv$, ou $\equiv$ est l'équivalence suivante : $(a,x) \equiv (b,y)$ [a, b $\in$ S, x,y $\in$ H resp. N] ssi il existe un s $\in$ S tel que $(sb)x = (sa)y$. Si $\overline{(a,x)}$ est la classe (mod $\equiv$) de (a,x), on pose dans le cas de H_S, $\overline{(a,x)}\ \overline{(b,y)} = \overline{(ab,\ xy)}$, et dans le cas N_S, $c\overline{(a,x)} = \overline{(a,cx)}$. Et on définit l'application canonique de H resp. N dans H_S resp. N_S en fai-

sant correspondre à un $x \in H$ resp. N la classe $(\overline{s,\ sx})$ (mod Ξ), où $s \in S$ (cette classe ne dépend pas du choix de s). Mais il faut encore définir l'addition (partielle) et l'addibilité dans H et dans N. On le fait comme suit : on pose $(a,x) \# (b,y)$ ssi il existe un $s \in S$ tel que $sbx \# say$, et on pose, pour un tel s, $(a,x) + (b,y) = (s\ a\ b,\ s\ b\ x + s\ a\ y)$. L'application canonique n'est pas, en général, un homomorphisme de H (resp. N) dans H_s (resp. N_s), mais un quasi-homomorphisme (voir les définitions au § 4).

Pour que cette application soit un isomorphisme, il faut et il suffit que 1° : tous les $s \in S$ soient simplifiables, c'est-à-dire que $s \in S$ et $sx = sy$ impliquent $x=y$; 2° tous les $s \in S$ soient réguliers, c'est-à-dire que $s \in S$ et $sx \# sy$ impliquent $x \# y$. Sans la seconde condition, cette application est seulement injective, mais les images des éléments non - addibles peuvent être addibles. On peut, également, généraliser aux annéïdes et moduloïdes les théories connues de localisation non-commutative.

Soit q un corpoïde et V un q-espace vectoriel (à gauche). Soient Γ le groupe des grades de q et D une graduation stricte de V. Visiblement, D est un Γ - permutationnel, dont les Γ d, $d \in D$, forment la partition d'intransitivité. On va noter, D/Γ cette partition. Soit $\Theta \in D/\Gamma$ et soit $V_\Theta = \{x \in V\ ;(x = 0) \vee (d(x) \in \Theta)\}$. V_Θ est visiblement un sous-espace vectoriel de V, et V, en tant qu'homogroupoïde, est le composé direct disjoint $\dot{\bigoplus}_{\Theta \in D/\Gamma} V_\Theta$ des V_Θ. Si x,y sont $\in V$, il existe des $a, b \in q^* = q.. \{0\}$ tels que $ax \# by$ ssi x et y appartiennent à un même V_Θ. D'autre part, si $d \in \Theta$, l'ensemble V_d des $x \in V$ tels que $x=0$ ou $d(x) = d$ (donc $V_d \subseteq V_\Theta$) est, visiblement, un r-espace vectoriel, où r est

le corps de q, et on montre que $(V_\Theta : q) = (V_d : r)$.

Si $A \subseteq V$, une somme finie $\Sigma\lambda_i a_i$, où les λ_i sont $\in q$ et les a_i sont A, est dite une <u>combinaison linéaire</u> de A si les $\lambda_i a_i$ sont tous addibles deux à deux. Elle est dite une <u>combinaison linéaire réduite</u> de A si $i \neq j$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$ impliquent $a_i \neq a_j$. Si V est un espace vectoriel régulier, $a_i = a_j \neq 0$ et $\lambda_i a_i \# \lambda_j a_j$ impliquent $\lambda_i \# \lambda_j$, d'où résulte que la somme de toute combinaison linéaire est, dans ce cas, égale à celle d'une telle combinaison réduite. A est dit <u>libre</u> si, pour toute combinaison linéaire $\ell = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, $\ell = 0$ implique, pour tout $i \in I$, $\lambda_i a_i = 0$. Il est clair qu'un $A \subseteq V$ est libre si tout son sous-ensemble fini l'est, donc qu'il existe des ensembles libres maximaux. A est dit <u>générateur</u> si tout $x \in V$ est la somme d'une combinaison linéaire de A. Si V est régulier, on démontre, exactement comme pour les espaces vectoriels sur les corps, que les ensembles $A \subseteq V$ libres maximaux coïncident avec ceux, qui sont libres et générateurs, et avec ceux qui sont générateurs minimaux. Comme on peut dans ce cas, ne considérer que les combinaisons réduites, on prouve que ces ensembles, appelés dans ce cas les <u>bases</u> de V/q, ont un même cardinal, dit la dimension de V/q et noté (V : q) on a, évidemment,

$(V : q) = \sum_{\Theta \in D/\Gamma} (V_\Theta : q)$ En ce qui concerne les espaces non réguliers la situation est beaucoup plus compliquée .

En particulier, si a/q est une extension corpoïdale, Q peut être considérer d'une manière naturelle, comme un q-espace vectoriel à gauche ${}_qQ$ et à droite Q_q : il suffit, en effet, considérer Q comme un Q-modul à gauche ${}_QQ$ ou à droite Q_Q et restreindre les multiplications externes aux éléments de q. Alors $[Q : q]_g = ({}_qQ : q)$ et $[Q : q]_d = (Q_q : q)$ seront dits les <u>degrés gauche</u> et <u>droit</u> de Q/q. On a la formule habituelle du produit des degrés : si $q \subseteq Q' \subseteq Q$, on a $[Q : q]_\alpha = [Q : Q']_\alpha [Q' : q]_\alpha (\alpha = g,d)$ et ses conséquences.

Dans le cas considéré, D est égal au groupe des grades $\Gamma(Q)$ de q, et $D/\Gamma(q)$ est la partition de $\Gamma(Q)$ en classes à gauche resp. à droite (mod $\Gamma(q)$) selon qu'on considère ${}_qQ$ ou Q_q. Dans les deux cas, le cardinal de $D/\Gamma(q)$ est l'indice $(\Gamma(Q) : \Gamma(q))$ de $\Gamma(q)$ dans $\Gamma(Q)$, et cet indice sera dit le <u>degré groupique</u> de Q/q et note $[Q : q]_{gr}$. Soient R, r les corps des Q,q. Si $\Theta \in D/\Gamma(q)$, si $d \in \Theta$, et si $x \in Q$ est tel que $d(x) \in d$, visiblement $Q_d = Rx = xR$, d'où résulte que $[Q_\Theta : q]_g = [Q_d : r]_g = [R : r]_g$ et $[Q_\Theta : q]_d = [Q_d : r]_d = [R : r]_d$. Le degré $[R : r]_g$ resp. $[R : r]_d$ sera appelé le <u>degré corpique</u> gauche resp. droit de Q/q de Q/q et sera noté $[Q : q]_{corp,g}$ $[Q : q]_{corp,d}$. Et on a, visiblement, $[Q : q]_\alpha = [Q : q]_{corp,\alpha}[Q : q]_{gr}$. A remarquer que $Q_{T,q} = qR = Rq$ est un corpoïde intermédiaire large de Q/q, dit le <u>corpoïde d'étalement</u> de Q/q dont le groupe est $\Gamma(q)$ et le corps R. On a donc $[Q_{T,q} : q]_\alpha = [Q : q]_{corp,\alpha}$ et $[Q : Q_{T,q}] = [Q : q]_{gr}$ ce qui donne une autre démonstration de la formule précédente.

Il est facile d'étendre aux moduloïdes et aux annéïdes la notion de composé direct (ici somme directe[10]). Si A est un annéïde, $\{A_i ; i \in I\}$ une famille de ses idéaloïdes (bilatères), A est dit la somme directe $\bigoplus_{i \in I} A_i$ des A_i s'il l'est pour sa structure d'homogroupoïde additif sous jacent. Mais ceci implique plusieurs conséquences. Primo, si $i \neq j$, on a, puisque A_i et A_j sont des idéaloïdes, que $A_iA_j \subseteq A_i \cap A_j = \{0\}$, donc $A_iA_j = A_jA_i = \{0\}$. D'autre part, si x, $x' \in A_i$ et y, $y' \in A_j$ non nuls ont les mêmes grades respectifs $\delta = \delta(x) = \delta(y)$, $\delta' = \delta(x') = \delta'y')$, et si $xy \neq 0$,

---

(10) et de composé direct complet (ici somme directe complète).

$x'y' \neq 0$, on a $\delta(xx') = \delta(yy') = \delta\delta'$. Il en résulte la définition suivante pour les sommes directes "extérieures" d'une famille $\{A_i, i \in I\}$ d'annéïdes Soient Δ_i l'opéroïde de grades de la graduation stricte de A_i (tous les Δ_i étant supposés disjoints deux à deux) et $D = \dot{\bigcup}_{i \in I} \Delta_i$. Du point de vue additif, les sommes directes des A_i seront les η-composés directs $\oplus^{(\eta)}_{i \in I} A_i$, mais avec les équivalences η sur D orthogonales à la partition $\dot{\bigcup}\Delta_i$ telles que si $\delta_i, \delta'_i \in \Delta_i$, $\delta_j, \delta'_j \in \Delta_j$, $\delta_i \equiv \delta_j \pmod{\eta}$, $\delta'_i \equiv \delta'_j \pmod{\eta}$ et $\delta_i\delta_j$, $\delta'_i\delta'_j$ existent tous les deux, on doit avoir $\delta_i\delta_j \equiv \delta'_i\delta'_j \pmod{\eta}$. Un élément de $\oplus^{(\eta)}_{i \in I} A_i$ est toujours, en vertu de ce qui a été dit sur les composés directs des homogroupoïdes, un vecteur (satisfaisant à certaines conditons) $a=(a_i ; i \in I)$, où $a_i \in A_i$. Et ces vecteurs se multiplient, comme dans le cas des anneaux, par composantes correspondantes autrement dit, si $a = (a_i \in A_i ; i \in I)$ et $b = (b_i \in A_i ; i \in I)$, on pose $ab = (a_ib_i ; i \in I)$.

Si M est A-moduloïde et si $(\Delta, D ; \delta d)$ est son extopéroïde des grades, supposons que M est la somme directe $\oplus_{i \in I} M_i$ de ses sous-moduloïdes M_i. Alors, si $x_i \in M_i$, $x_j \in M_j$, $a \in A_j$, $ax_i \neq 0$, $ax_j \neq 0$, l'égalité des grades $d(x_i) = d(x_j)$ implique $\delta(a)d(x_i)=d(ax_i)=d(ax_j)=\delta(a)dx_j)$. Il en résulte que si $\{M_i ; i \in I\}$ est une famille de A-moduloïdes et si $(\Delta, D_i ; \delta d_i)$ est l'extopéroïde des grades de M_i, $\oplus^{(\eta)}_{i \in I} M_i$ n'est un A-moduloïde, en définissant $a(x_i \in M_i ; i \in I)$ comme $(ax_i ; i \in I)$, que si η satisfait à la condition : si $d_i \in D_i$ et $d_j \in D_j$ sont tels que $d_i = d_j \pmod{\eta}$, on a, pour tout $\delta \in \Delta$, $\delta d_i \equiv \delta d_j \pmod{\eta}$.

On peut aussi définir les produits tensoriels des moduloïdes et des annéïdes commutatifs.

Quand les monopéroïdes des grades stricts de A et de M sont totalement ordonnés de manière que $\delta \leq \delta'$ et $d \leq d'$ impliquent $\delta d \leq \delta' d'$, on peut étendre, d'une manière adéquate, la notion de grade aux éléments non-homogènes du linéarisé $\overline{M}$ de M, et quand A est régulier et M est régulier et strict, on peut munir le complété de Hahn de M de structure de module gradué sur celui de A. Les démonstrations et les résultats sont analogues à ceux des anneaux gradués.

Sous les conditions analogues à celles des anneaux totalement filtrés, on peut définir les gradués (et, éventuellement, les gradués stricts) des modules totalement filtrés, dont les parties homogènes seront encore appelées squelettes. En particulier, si M est un espace normé sur un corps valué ou hypervalué K, dont la norme est notée $\|..\|$, et si on le filtre par $(M_d = \{x \in M ; \|x\| \leq d\}; d \in D)$, où D est l'ensemble des valeurs non-nulles prises par $\|...\|$ sur M, le squelette sq(M) de M est un espace vectoriel sur le squelette de K.

§ 3 - CORPOIDES COMMUTATIFS SANS TORSION ET LEURS APPLICATIONS A LA THEORIE DE LA RAMIFICATION.

Soient q un corpoïde commutatif sans torsion, $\Gamma(q)$ son groupe, r son corps. Quand on parlera, dans ce paragraphe, des extensions corpoïdales Q/q , il sera toujours sous-entendu que le corpoïde Q est aussi commutatif sans torsion. Introduisons, d'abord, la notion de polynôme sur q. Soient Γ' un surgroupe commutatif sans torsion arbitraire de $\Gamma(q)$, $\mathfrak{X}$ un ensemble (pouvant être infini) d'indéterminées et $\Theta : \mathfrak{X} \longrightarrow \Gamma'$ une application arbitraire de $\mathfrak{X}$ dans Γ'. On va attribuer à un monôme non nul $m = aX_1^{L_1}\dots X_S^{L_S}$ où $a \in q$, $X_1, X_2, \dots, X_S$ sont $\in \mathfrak{X}$ et $L_1, \dots, L_S$ sont des entiers ≥ 0 (on parlera de monômes généralisés, si l'on suppose simplement que $L_1, \dots, L_S$ sont des entiers), le grade $\delta(m) = \delta(a)\Theta(X_1)^{L_1}\dots\Theta(X_S)^{L_S}$ (qu'on dira son Θ-grade). Un polynôme de graduation (ou de pente) Θ (ou, encore, un Θ-polynôme) est, par définition, la somme $f = \Sigma m_i$ d'un ensemble (pouvant être vide, auquel cas la somme est 0) de monômes (non nuls) m_i d'un même Θ-grade, qui sera noté, si $f \neq 0$, $\delta(f)$, et sera appelé le Θ-grade de f. Deux polynômes f,g seront addibles (notation : $f \# g$) si un au moins est nul ou si $\delta(f) = \delta(g)$, et on additionne les polynômes selon les règles habituelles (ce qui permet, en particulier de réduire les termes semblables : en effet, si $aX_1^{L_1}\dots X_S^{L_S} \# bX_1^{L_1}\dots X_S^{L_S}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$, on a $\delta(a)\Theta(X_1)^{L_1}\dots\Theta(X_S)^{L_S} = \delta(b)\Theta(X_1)^{L_1}\dots\Theta(X_S)^{L_S}$, et, puisque on est dans le groupe Γ' sans torsion, ceci implique $\delta(a)=\delta(b)$ et $a \# b$; ainsi, si l'on a, dans un Θ-polynôme, des termes semblables, leurs coefficients sont addibles, et il suffit, pour les remplacer par un terme, d'additionner leurs coefficients). La somme de deux polynômes d'un certain grade δ est évidemment encore un polynôme, qui, s'il n'est pas = 0, est du même grade. Comme le Θ-grade du produit de deux monômes non-nuls est le produit des Θ-grades des facteurs, il en résulte que le produit de deux Θ-polynômes est encore un Θ-polynôme qui,

si les facteurs sont non-nuls, n'est pas 0, auquel cas son grade est le produit des grades des facteurs. On constate sans difficulté que l'ensemble $q_\Theta[\mathfrak{X}]$ des Θ-polynômes de $\mathfrak{X}$ est un integroïde par rapport à l'addition et la multiplication ainsi définies, dit l'intégroïde (ou l'annéïde) des Θ-polynômes de $\mathfrak{X}$ sur q. Le localisé $q_\Theta(\mathfrak{X}) \supseteq q_\Theta[\mathfrak{X}]$ de $q_\Theta[\mathfrak{X}]$ à l'aide de $q_\Theta[\mathfrak{X}]^* = q_\Theta[\mathfrak{X}]..\{0\}$ est un corpoïde, dit le corpoïde des Θ-fractions rationnelles de $\mathfrak{X}$ sur q. Si $\Theta(\mathfrak{X}) = \{\Theta(X); X\in\mathfrak{X}\}$, le monopéroïde (en réalité, le monopère) des grades stricts de $q_\Theta[\mathfrak{X}]$ est le sous-semigroupe $\Gamma(a)[\Theta(\mathfrak{X})]$ de Γ' engendré sur $\Gamma(q)$ par $\Theta(\mathfrak{X})$, et celui de $q_\Theta(\mathfrak{X})$ est le sous-groupe $\Gamma(q)(\Theta(\mathfrak{X}))$ de Γ' engendré sur $\Gamma(q)$ par le même ensemble. Le corps de $q_\Theta(\mathfrak{X})$ est aussi facilement déterminable.

Dans l'integroïde $q_\Theta[X]$ d'une seule variable X (où $\Theta : \{X\} \longrightarrow \Gamma'$; on va, parfois, désigner par Θ aussi l'élément $\Theta.X$ de Γ') a lieu la division avec reste. En effet soient $g = b_m X^m + \ldots (b_m \neq 0)$ et $f = a_n X^n + \ldots (a_n \neq 0)$ deux Θ-polynômes de degrés respectifs m,n et de Θ-grades respectifs $\delta(g),\delta(f)$. Alors, si $m \geq n$, $b_n a_n^{-1} X^{m-n} f(X)$ est un Θ-polynôme de degré, ayant le même terme majeur $b_n X^n$ (donc le même Θ-grade $\delta(g)$) que g. Ainsi $b_n a_n^{-1} X^{n-m} f(X) \# g(X)$, $g(X) - b_n a_n^{-1} X^{n-m} f(X)$ est un Θ-polynôme du Θ-grade $\delta(g)$ et de degré $m_1 < m$ et $\delta(b_n a_n^{-1} X^{n-m}) = \delta(g) : \delta(f)$. Si $m_1 > n$, on continue le procédé, les monômes multiplicateurs ayant toujours le Θ-grade $\delta(g) : \delta(f)$ et le dégré de la différence, qui est toujours un Θ-polynôme de Θ-gradé $\delta(g)$, diminue à chaque pas. Ainsi, les monômes quotients sont tous addibles deux à deux et, finalement, il ne reste comme différence, après un nombre fini convenable de pas, qu'un Θ-polynôme $r(X)$ de degré $< n$ (si $m < n$, le nombre de ces pas est 0 et $r(X) = g(X)$) et de Θ-grade $\delta(g)$. La somme des monômes quotients de tous les pas est aussi un Θ-polynôme $q(x)$ qui est 0 si $m < n$ et est de degré $m-n$ si $m \geq n$, dont le Θ-grade est $\delta(g) : \delta(f)$. Et on a ainsi

$$g(X) \# q(X)f(X) \# r(X) \quad \text{et} \quad f(X) = q(X)f(X) + r(X).$$

Il en résulte que $q_\Theta[X]$ est un annéïde euclidien au même sens que l'anneau des polynômes $k[X]$ de X sur un corps k l'est. Ceci a les mêmes conséquences :

1) tous les $q_\Theta[X]$ sont factoriels et l'idéaloïde (f) est premier ssi f est irréductible ;

2) $q_\Theta[X]$ est principal ;

3) le nombre des zéros de $f \in q_\Theta[X]$ dans une extension quelconque Q de q est fini et ne dépasse pas le degré de f. De lors il est facile de développer une théorie des extentions corpoïdales (commutatives sans torsion) et du prolongement de leurs isomorphismes analogue à celle de Steinitz pour les extensions des corps .

Si Q/q est une extension corpoïdale et $\alpha \in Q$, α est dit <u>algébrique</u> sur q s'il existe un polynôme $f(X) \neq 0$ sur q tel que $f(\alpha) = 0$ [forcément, $f(X) \in q_\delta(\alpha)[X]$ et $\delta(\alpha)$ est d'ordre fini par rapport à $\Gamma(q)$]. Sinon il est dit <u>transcendant</u> sur q.

Toutes les notions et tous les résultats de la théorie des extensions des corps (commutatifs) se généralisent sans presque changer les définitions et les démonstrations, aux extensions corpoïdales (commutatives sans torsion). Bien entendu, "isomorphisme" signifie isomorphisme par rapport à la multiplication, addition et addibilité. Mais la théorie des extensions corpoïdales est sous certains rapports, plus riche que celle des extensions des corps : ainsi une extension corpoïdale transcendante pure est ici également isomorphe à un corpoïde $q_\Theta(\mathfrak{X})$ des Θ-fractions rationnelles d'un ensemble $\mathfrak{X}$ de variables, où Θ est une application de $\mathfrak{X}$ dans un surgroupe sans torsion de $\Gamma(q)$, et ce corpoïde, contrairement à ce qui a lieu pour les corps dépend, à l'isomorphie près, pas seulement de card $\mathfrak{X}$, mais aussi de l'application Θ. Ainsi, contrairement au cas des corps, les extensions transcendantes pures d'un degré de transcendence fixé ne sont pas toutes isomorphes. Si q(A)/Q est une extension

algébrique et si Q' est un corpoïde décomposant pour tous les polynômes minimaux $f_{a/k}$ des $a \in A$ (autrement dit, tous ces polynômes s'y décomposent en facteurs linéaires), on montre que tout isomorphisme de Q/q dans un surcorpoïde quelconque Q" de Q' en est un dans Q' et que le cardinal de l'ensemble $G_{Q/q}^{(Q')}$ des isomorphismes de Q/q dans Q' ne dépend pas du choix du corpoïde décomposant Q'. Il s'appelle le <u>degré galoisien</u> de Q/q et se note $[\overline{Q:q}]$, et on prouve que, si Q' est un corpoïde intermédiaire de Q/q, on a le théorème de multiplication des degrés galoisiens : $[\overline{Q:q}] = [\overline{Q:Q'}]\ [\overline{Q':q}]$. Si Q/q est de degré fini on montre facilement que $[\overline{Q:q}] \leq [Q:q]$, et une telle extension Q/q est dite <u>séparable</u> resp. <u>inséparable</u> si $[\overline{Q:q}] = [Q:q]$ resp. $[\overline{Q:q}] = 1$. Un élément α algébrique sur q est dit <u>séparable</u> resp. <u>inséparable</u> si $q(\alpha)/q$ l'est, et une extension algébrique quelconque Q/q est dite <u>séparable</u> resp. <u>inséparable</u> si tout $\alpha \in Q$ l'est... On démontre, comme dans les corps, l'existence, dans toute extension corpoïdale Q/q, des plus grandes sous-extensions séparables $\tilde{Q}_q/q$ et inséparable $\hat{Q}_q/q$, appelées : noyaux séparables resp. inséparables de Q/q. Une extension algébrique Q/q est dite normale si Q est décomposant pour le polynôme minimal $f_{\alpha/q}(X)$ de tout son élément $\alpha \in Q$, ce qui revient à dire que tout isomorphisme de Q/q est un automorphisme. Le groupe $G_{Q/q}$ de ces automorphismes s'appelle le <u>groupe de Galois</u> de Q/q, et on démontre sans peine le théorème : $\mathrm{Inv}\ G_{Q/q} = \hat{Q}_q$, d'où résulte le premier théorème de Galois : si $A \subseteq Q$ et si $G_{Q/q,A}$ est l'ensemble des $\sigma \in G_{K/k}$ préservant tout $a \in A$, on a $\mathrm{Inv}\ G_{Q/q,A} = \hat{Q}_{q(A)}$.

Les propriétés des extensions corpoïdales Q/q se décrivent souvent en termes de celles de leur extension corpique R/r (où R est le corps de Q) et groupique $\Gamma(Q)/\Gamma(q)$. Ainsi, Q/q est algébriquement close ssi R/r l'est et $\Gamma(Q)$ est indéfiniment divisible, Q/q (supposé algébrique) est séparable resp. inséparable ssi R/r l'est et $\Gamma(Q)/\Gamma(q)$ n'a pas d'éléments d'ordre p resp. est p-primaire, où p est la caractéristique de r (et de q).

En théorie des extensions des corps a lieu le second théorème de Galois : si K/k est une extension normale de degré fini, pour tout sous-groupe g de $G_{K/k}$, il existe un corps intermédiaire L de K/k tel que $g = G_{K/L}$, et ce théorème s'y démontre à l'aide de celui d'élément primitif : si K/k est une extension séparable de degré fini, il existe un $\alpha \in K$ tel que $K = k(\alpha)$. Le théorème d'élément primitif est faux dans les extensions corpoïdales, mais l'analogue du second théorème de Galois est vrai, et je vais donner l'idée de sa démonstration, qui exige l'étude approfondie du groupe $G_{Q/q}$.

Soient Q/q une extension corpoïdale algébrique, Q' une extension de Q, et $\sigma : Q \longrightarrow Q'$ un isomorphisme de Q/q dans Q'. On a $\Gamma(q) \subseteq \Gamma(Q) \subseteq \Gamma(Q')$. Alors, σ préserve les grades, autrement dit, pour tout $\alpha \in Q$, on a $\delta(\sigma.\alpha) = \delta(\alpha)$. C'est évident pour $\alpha = 0$. Supposons $\alpha \neq 0$, et soit $f(X) = f_{\alpha/q}(X) \in q_{\delta(\alpha)}[X]$ le polynôme minimal de α.

Si $f(X) = \sum_{i=o}^{n} a_i X^i$ $(a_n=1)$, tous les $a_i\alpha^i$ sont mutuellement addibles et, puisque $\alpha \neq 0$, il y en a au moins deux non-nuls, car leur somme est 0. Soient $a_i\alpha^i$ et $a_j\alpha^i$ $(a_i\neq 0, a_j\neq 0)$ deux termes de cette sorte, donc $\delta(a_i)\delta(\alpha)^i = \delta(a_i)\delta(\alpha)^j$ et $\delta(\alpha)^{i-j} = \delta(a_i^{-1}a_j)$. De $a_i\alpha^i \# a_j\alpha^j$ résultent

$$a_i(\sigma.\alpha)^i = (\sigma.a_i)(\sigma.\alpha)^i = \sigma.a_i\alpha^i \# \sigma.a_j\alpha^j = (\sigma.a_j)(\sigma.\alpha)^j = a_j(\sigma.\alpha)^j ,$$

donc on a aussi $\delta(\sigma.\alpha)^{i-j} = \delta(a_i^{-1}a_j)$, donc $\delta(\sigma.\alpha)^{i-j} = \delta(\alpha)^{i-j}$. Mais comme $\Gamma(Q')$ est un groupe sans torsion, il en résulte que $\delta(\sigma.\alpha) = \delta(\alpha)$.

Soient r,R,R' les corps des q,Q,Q'. Alors, $\chi_\sigma(\alpha) = (\sigma.\alpha)\alpha^{-1}$ est $\in R'$ et satisfait aux conditions $\chi_\sigma(\alpha\beta) = \chi_\sigma(\alpha)\chi_\sigma(\beta)$ et $\chi_\sigma(\alpha) = 1$ si $\alpha \in q^* = q\ldots\{0\}$. C'est donc un caractère du groupe multiplicatif Q^*/q^* dans R'. Mais en plus, σ induit sur R un isomorphisme $\bar{\sigma}$ de R/r dans R' et si $\alpha \in R$, on a $\chi_\sigma(\alpha) = (\sigma.\alpha)\alpha^{-1} = (\bar{\sigma}.\alpha)\alpha^{-1} = \alpha^{\bar{\sigma}-1}$. On a $\sigma.\alpha = \alpha$ ssi $\chi_\sigma(\alpha) = 1$. On appellera (R/r)-caractère de Q/q un caractère χ du groupe "multiplicatif" Q^*/q^* dans une

clôture algébrique fixée de R tel qu'il existe un isomorphisme $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\chi)$ de R/r dans le corps de cette clôture tel que, pour tout $\alpha \in R$, on ait $\chi(\alpha) = \alpha^{\bar{\sigma}-1}$. Si χ est un tel caractère, $\sigma_\chi : \alpha \longrightarrow \alpha\chi(\alpha)$ (avec $\sigma_\chi.0 = 0$) est, comme il est facile de montrer, un isomorphisme de Q/q dans cette clôture algébrique tel que $\bar{\sigma}_\chi = \bar{\sigma}(\chi)$. On notera $X_{Q/q}^{(R')}$, où, cette fois-ci Q' est un corpoïde décomposant pour un ensemble générateur de Q/q, l'ensemble des R/r-caractères de Q/q dans R'. Si Q/q est normale, on peut prendre (et on prendra) Q' = Q et $\bar{\sigma}$ sera un automorphisme de R/r. Visiblement, dans ce cas, on a $\bar{\sigma}\bar{\tau} = \overline{\sigma\tau}$, donc $\eta : \sigma \longrightarrow \bar{\sigma}$ est un homomorphisme de $G_{Q/q}$ dans $G_{R/r}$. Le noyau de cet homomorphisme est le groupe $T_{Q/q} = \{\sigma \in G_{Q/q} ; \bar{\sigma} = 1_R\}$, (où 1_A désigne l'application identique d'un ensemble A) dit le <u>groupe d'inertie</u> de Q/q. En fait, η est un homomorphisme de $G_{Q/q}$ sur $G_{R/r}$, ce qui sera prouvé quand [Q:q] est fini.

Soit alors $g = \eta.G_{Q/q} \neq G_{R/r}$ et considérons L = Inv g, qui, en vertu de la théorie de Galois dans les corps, $\neq$ Inv $G_{R/r} = \hat{R}_r$. Il existe donc un $\alpha \in$ Inv g tel que $\alpha \notin \hat{R}_r$ et, comme $\alpha \in R$, on a $\delta(\alpha) = 1$. On a, pour tout $\sigma \in G_{Q/q}$, $\sigma.\alpha = \bar{\sigma}.\alpha = \alpha$, car $\bar{\sigma} \in g$, donc $\alpha \in$ Inv $G_{Q/q} = \hat{Q}_q$. Donc, touts les zéros de $f_{\alpha/q}(X) \in q_{\delta(\alpha)}[X] = q_1[X]$ dans Q sont égaux. Mais, puisque le coefficient majeur de $f_{\alpha/q}$ X est 1, tous ses coefficients sont $\in R$, donc $\in R \cap q = r$ et tous ses zéros sont $\in R$. Ainsi, α est inséparable sur r, donc, contre l'hypothèse, est $\in \hat{R}_r$. On a donc $g = G_{R/r}$ et $G_{Q/q}/T_{Q/q} \simeq G_{R/r}$. On a, puisque $\frac{\tau.\alpha}{\alpha} \in R$,

$$\chi_{\sigma\tau}(\alpha) = \frac{\sigma\tau.\alpha}{\alpha} = [\sigma.(\tfrac{\tau.\sigma}{\alpha})](\tfrac{\sigma.\alpha}{\alpha}) = (\tfrac{\sigma.\alpha}{\alpha})\,[\bar{\sigma}.(\tfrac{\tau.\alpha}{\alpha})] = \chi_\sigma(\sigma)\chi_\tau(\alpha)^{\bar{\sigma}} .$$

Si, f : A $\longrightarrow$ Q étant une fonction à valeurs dans Q, on définit f^σ par $f^\sigma(a) = \sigma.f(a)$. On peut écrire l'égalité précédente comme

$$\chi_{\sigma\tau} = \chi_\sigma\, \chi_\tau^{\bar{\sigma}}$$

Ainsi, si l'on organise le groupe $X_{Q/q}$ par la composition

$$\chi \circ \chi' = \chi\chi'^{\bar{\sigma}_\chi}$$

$\sigma \longrightarrow \chi_\sigma$ devient un isomorphisme de $G_{Q/q}$ sur le groupe $(X_{Q/q},\circ)$ (qu'on écrira, le plus souvent, simplement $X_{Q/q}$), dont $\chi \longrightarrow \sigma_\chi$ est évidemment l'isomorphisme inverse. L'image de $T_{Q/q}$ par cet isomorphisme est l'ensemble des caractères de Q^* égaux à 1 sur q^* et sur R^*, c'est-à-dire sur q^*R^*. Or, Q^*/qR^* s'identifie canoniquement à $(Q^*/R^*) / (q^*R^*/R^*)$ et q^*R^*/R^* est canoniquement isomorphe à $q^*/q^* \cap R^* = q^*/r^*$. Ainsi, comme $Q^*/R^* = \Gamma(Q)$ et $q^*/r^* = \Gamma(q)$, $\eta.T_{Q/q}$ s'identifie au groupe $X^{(R)}_{\Gamma(Q)/\Gamma(q)}$ des caractères de $\Gamma(Q)/\Gamma(q)$ dans R (en réalité, ce groupe peut s'identifier avec celui $X_{\Gamma(Q)/\Gamma(q),p}$ des caractères complexes d'ordre premier à p du même groupe). Et si $\chi,\chi' \in \eta.T_{Q/q}$, on a $\overline{\sigma}(\chi) = 1_R$ et $\chi\circ\chi' = \chi\chi'$. Ainsi, sur le groupe $X^{(R)}_{\Gamma(Q)/\Gamma(q)} = \eta.T_{Q/q}$, la composition $\circ$ coïncide avec la multiplication des caractères.

Si τ est un sous-groupe de $T_{Q/q}$ et $X_\tau = \eta.\tau$, X_τ est un sous-groupe de $X^{(R)}_{\Gamma(Q)/\Gamma(q)}$ et Inv τ est l'ensemble des $\alpha \in Q$ tels que, pour tout $\chi \in X_\tau$, $\chi(\delta(\alpha)\Gamma(q)) = 1$. C'est un sous-corpoïde large $Q^{(\tau)} \supseteq q$ de Q tel que le groupe $\Gamma(Q^{(\tau)})/\Gamma(q)$ soit le dual du groupe de caractères X_τ.
Ainsi, $[Q:Q^{(\tau)}] = [\Gamma(Q):\Gamma(Q^{(\tau)})]$ = ordre de X_τ = ordre de τ.

Soient g un sous-groupe de $G_{Q/q}$ et $\overline{g} = \{\overline{\sigma};\sigma \in g\}$, $\tau = g \cap T_{Q/q}$. Pour démontrer qu'il existe un corpoïde intermédiaire F tel que $g = G_{Q/F}$, il suffit de le prouver pour les Q/q séparables, car on peut toujours remplacer Q/q par son noyau séparable $\tilde{Q}_q/q$ sans changer le groupe de Galois. On a Inv g $\subseteq$ Invτ, donc $\Gamma(\text{Inv}\, g) \subseteq \Gamma(Q^{(\tau)})$ et $[Q:\text{Inv}g]_{gr} \geq [Q:Q^{(\tau)}]_{gr} = [Q:Q_\tau]$ = ordre de τ, l'égalité ayant lieu ssi $\Gamma(\text{Inv}g) = \Gamma(Q^{(\tau)})$. D'un autre côté $\eta : \sigma \longrightarrow \overline{\sigma}$ restreint à g est un homomorphisme de noyau $g \cap T_{Q/q} = \tau$ et $\sigma\tau \longrightarrow \overline{\sigma}$ est un isomorphisme de g/τ sur $\overline{g} \subseteq G_{R/r}$. Le corps R_g de Q_g=Invg, qui est l'ensemble des $\alpha \in R$ tels que pour tout $\sigma \in g$, on ait $\overline{\sigma}.\alpha = \sigma.\alpha = \alpha$ est donc Inv$\overline{g}$, donc $[Q:Q_g]_{corp} = [R:R_g] = [R:\text{Inv}\overline{g}]$ = ordre de $\overline{g} = (g:\tau)$. Ainsi $[\overline{Q}:Q_g] = [R:R_g]\,[\Gamma(Q):\Gamma(Q_g)] \geq [g:\tau]$ (ordre de τ) = ordre de g, et on a l'égalité ssi $\Gamma(Q_g) = \Gamma(Q^{(\tau)})$, autrement dit ssi, pour tout

$\delta \in \Gamma(Q^{(\tau)})$, il existe un $\alpha \in Q_g$, tel que $\delta(\alpha) = \delta$, c'est-à-dire tel que $\chi(\alpha) = 1$ si $\chi \in \eta.g$.

Nous allons démontrer cette existence. Puisque $\delta \in \Gamma(Q^{(\tau)})$, il existe un $\beta \in Q^{(\tau)}$ tel que $\delta(\beta) = \delta$. Si $\tilde{\chi}$ est la restriction de $\chi \in \eta.g$ au groupe $Q^{(\tau)*}/q^*$, on a $\bar{\sigma}(\tilde{\chi}) = \bar{\sigma}(\chi)$ et $\tilde{\chi}$ ne dépend que de l'isomorphisme σ' (qui est, en fait, un automorphisme, car $G_{Q/Q^{(\tau)}} = \tau$ est un sous-groupe invariant de g) induit par σ sur $Q^{(\tau)}$, c'est-à-dire de la classe de σ (mod τ). Donc $\tilde{\chi} \longrightarrow \bar{\sigma}(\tilde{\chi})$ est une bijection de $\tilde{\chi}_g = \{\tilde{\chi} : \chi \in \eta.g\}$ sur $\bar{g} = G_{R/R_g}$.

Donc, si, pour un $\bar{\sigma} \in G_{R/R_g}$, $\tilde{\chi}(\bar{\sigma})$ est l'unique élément de X_g tel que $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\tilde{\chi}(\bar{\sigma}))$, on va poser $\varphi(\bar{\sigma}) = \chi(\bar{\sigma})(\beta)$. De lors, si $\sigma_1, \sigma_2 \in g$, on a

$$\varphi(\bar{\sigma}_1\,\bar{\sigma}_2) = \chi_{\sigma_1\sigma_2}(\beta) = \chi_{\sigma_1}(\beta)\chi_{\sigma_2}(\beta)^{\bar{\sigma}_1} = \varphi(\bar{\sigma}_1)\varphi(\bar{\sigma}_2)^{\bar{\sigma}_1}.$$

Ainsi, si nous considérons l'extension normale R/R_g, $\varphi(\bar{\sigma})$ est un cocycle de dimension 1 de sa cohomologie galoisienne. Mais, puisque cette cohomologie est triviale en dimension 1, $\varphi(\bar{\sigma})$ est un cobord, donc il existe un $\gamma \in \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi(\bar{\sigma}) = \gamma^{1-\bar{\sigma}}$. Mais alors si $\alpha = \beta\gamma$, on a pour tout $\sigma \in g$,

$\chi_\sigma(\alpha) = \chi_\sigma(\beta)\chi_\sigma(\gamma) = \chi_\sigma(\beta)\gamma^{\bar{\sigma}-1} = \tilde{\chi}_\sigma(\beta)\gamma^{\bar{\sigma}-1} = \varphi(\bar{\sigma})\varphi(\bar{\sigma})^{-1} = 1$ et $\alpha \in \mathrm{Inv}\, g$.

D'autre part, comme $\gamma \in \mathbb{R}^*$, on a $\delta(\alpha) = \delta(\beta\gamma) = \delta(\beta)\delta(\gamma) = \delta(\beta) = \delta$, car $\delta(\gamma) = 1$. Donc $\Gamma(\mathrm{Inv}\, g) = \Gamma(Q^{(\tau)})$ et $[Q : \mathrm{Inv}\, g]$ = ordre de g, ce qui prouve que $g = G_{Q/\mathrm{Inv}g}$, car $g \subseteq G_{Q/\mathrm{inv}g}$ et ordre $G_{Q/\mathrm{Inv}g} \leq [Q : \mathrm{Inv}g]$.

Soient k un corps valué complet, K une extension algébrique valuée de k (autrement dit, K est un corps valué, dont la valuation prolonge celle de k ; on sait, d'ailleurs, que la structure algébrique des surcorps K de k détermine sa valuation). Soient $\bar{k}, \bar{K}, \bar{K}'$ les corps résiduels (et p leur caractéristique),

$\Gamma(k),\Gamma(K),\Gamma(K')$ les groupes de valuation, s,S,S' les squelettes des k,K,K'(11). Le squelette s de k peut être plongé canoniquement dans celui S de K : les éléments non nuls de s sont les disques $\overline{\alpha}_k = C_k(\alpha, |\alpha|^-)(\alpha \in k^*)$ de k, et on fait correspondre à $\overline{\alpha}_k$ le seul disque analogue $\overline{\alpha}_K = C_K(\alpha,|\alpha|^-)$ de K (qui ne dépend pas du choix de $\alpha \in \overline{\alpha}_k$). Et on fait correspondre à $\overline{0}_k = \{0\} = \overline{0}_K$ ce disque lui-même.

Si l'on considère ce plongement comme une identification, s devient un sous-corpoïde de S, et r devient un sous-corps de R, et $c = [S:s]$, qui est dit le degré squelettique de K/k est $= fe$ où $f = [\overline{K}:\overline{k}]$ est le degré résiduel de K/k et $e = (\Gamma(K):\Gamma(k))$ est son ordre de ramification(11). On sait (théorème d'Ostrovski) que, dans le cas, où $n = [K:k]$ est fini, $c \leq n$ et $d = n/c$, dit défaut de K/k, est une puissance de p. Si $d = 1$ (autrement dit, n=G), K/k est dit non-défective, et si $c = 1$, elle est dite complètement défective (ou immédiate). Elle est dite complètement étalée si $n = f$ et complètement étagée si $n = e$. Grâce aux squelettes, ces notions s'étendent aux extensions de degré infini : un ensemble $A \subseteq K$ est dit squelettiquement libre sur les restes squelettiques $\overline{a} = C(a,\mathrm{Max}(|a|,0)^-)$ sont tous distincts et forment un ensemble linéairement libre sur s. Un tel $A \subseteq K$ est dit une base topologique de K/k si la fermeture (par rapport à la topologie de valuation) $\overline{V}_k(A)$ du k-espace vectoriel $V_k(A)$ engendré par A sur k coïncide avec K. On dira que K/k est non-défective s'il existe une base topologique A de K/k, qui est squelettiquement libre. On dira que K/k est complètement défective si $S = s$. On dira que K/k est complètement étalée si elle est non-défective et $\Gamma(K) = \Gamma(k)$, et on dira qu'elle est complètement étagée si elle est non défective et $\overline{K} = \overline{k}$.

---

(11) *Visiblement,* $\overline{k},\overline{K},\overline{K}'$ *et* $\Gamma(k),\Gamma(K),\Gamma(K')$ *sont les corps et les groupes des grades des* s,S,S'.

Soit $K' \supseteq K$ une extension normale de k, et soient $\overline{K}, \Gamma(K')$, S' les corps résiduel, groupe de valuation et squelette de K'. On considerera s et S comme sous-corpoïdes de S'. Soit σ un isomorphisme de K/k dans K'. Comme σ est une isométrie (lemme d'Ostrovski), il transforme, pour tout $\alpha \in K$, $\overline{a} = C(a, \mathrm{Max}(|a|^{-}, 0))$ (identifié avec $C_{K'}(a, \mathrm{Max}(|a|^{-}, 0))$ en $C_{\sigma.K}(\sigma.a\ ,\ \mathrm{Max}(|a|^{-}, 0))$, qui s'identifie avec $C_{K'}(\sigma.a\ ,\ \mathrm{Max}(|a|^{-}, 0))$, donc induit une application $\sigma : S \longrightarrow S'$ de S dans S', et il est facile de voir que σ est un isomorphisme de S/s dans S'. Montrons que S' est un corpoïde décomposant pour le polynôme minimal par rapport à s, de tout élément de S (ce qui entraîne, en particulier, que S/s est normale si K/k l'est) et que $\sigma \longrightarrow \overline{\sigma}$ est la surjection de l'ensemble $G_{K/k}^{(K')}$ des isomorphismes de K/k dans K sur celui $G_{S/s}^{(S')}$ des isomorphismes de S/s dans S'. En effet, tout élément de S est le reste squelettique $\overline{a}$ de quelque $a \in K$, et $f_{a/k}(X)$ se décompose dans K' en facteurs linéaires. On a donc $f_{a/k}(X) = [\Pi(X-\sigma.a)]^{m}$, où σ parcourt $G_{K/k}^{(K')}$ et $m = [k(a):k]/[\overline{k(a)}:\overline{k}]$. En vertu du lemme d'Ostrovski, tous les $\sigma.a$ ont la même valuation $|a|$ que a. Valuons l'anneau $K'[X]$ en maintenant aux $a' \in K'$ leur valuation dans K', en posant $|X| = |a|$ (ceci détermine la valuation des monômes en X) et en posant, pour un polynôme $f = \Sigma m_i$, où les m_i sont ses monômes, supposés non-semblables deux à deux, $|f| = \mathrm{Max}_i |m_i|$. Si $f \in K'[X]$, soit $f^* = \Sigma m_i$ la somme de ses monômes de valuation maximale (c'est-à-dire $= |f|$; on a $f^* = 0$ ssi $f = 0$). Si $m_i = a_i X^{j(i)}$, on posera $\overline{m}_i = \overline{a}_i X^{j(i)}$, où $\overline{a}_i$ est le reste squelettique de a_i et $\overline{f}^* = \Sigma_i \overline{m}_i$. Visiblement $\overline{f}^*$ est un polynôme $\in S'_{|a|}[X]$ et $\lambda : f \longrightarrow f^*$ est une surjection de $K'[X]$ sur $S'_{|a|}[X]$ qui s'applique d'ailleurs $k[X]$ sur $s_{|a|}[X]$. Cette application est un homomorphisme au sens suivant : $\lambda.f \# \lambda.g$ ssi $fg = 0$ ou $|f| = |g|$, auquel cas $\lambda.(f+g) = \lambda.f + \lambda.g$ où $\overline{0}$ selon que $|f+g|$ est $=$ ou $< \mathrm{Max}(|f|, |g|)$, et pour $f.g$ arbitriares, $\lambda.fg = (\lambda.f)(\lambda.g)$. En particulier, on voit que $f_{a/k}(X)$ appartient à $K'[X]$ ainsi valué (il suffit de considérer son polygône de Newton) ainsi que tous les $X-\sigma.a$, et $f_{a/k}(X)$ appartient même à $k[X]$.

On a donc $\lambda.f_{a/k}[X]=\Pi[\lambda.(X-\sigma.a)]^m$, $\lambda.f_{a/k}(X)\in s_{|a|}[X]$ et tous les $\lambda.(X-\sigma.a)$ sont $\in S'_{|a|}[X]$. Comme $(\lambda.f_{a/k})(\overline{a}) = \overline{0}$ [car $X-\overline{a} = \lambda.(X-a)\,|\,\lambda.f_{a/k}(X)$] , $f_{\overline{a}/s}(X)$ divise $\lambda.f_{a/k}(X)$ et, par suite, se décompose en facteurs linéaires dans S'. En particulier, si l'on prend S = S', il en résulte que S' est normale.

Soit $\sigma' \in G_{K'/k}$ et $\overline{\sigma}'$ l'automorphisme induit par σ' sur S'. Il est clair, d'abord, que $\eta'.\sigma' \longrightarrow \overline{\sigma}'$ est un homomorphisme de $G_{K'/k}$ dans $G_{S'/s}$. D'autre part, si $\sigma = (\sigma'|K)$ est la restriction de σ sur K, $\eta.\sigma = \overline{\sigma}$ coïncide avec la restriction $(\overline{\sigma}'|S)$ de $\overline{\sigma}'$ à S. Donc $G_{S/s}^{(S')}$ est l'ensemble des isomorphismes induits sur S par les $\sigma' \in \eta'.G_{K'/k}$, et $\eta'.G_{K'/k}$ est un sous-groupe de $G_{S'/s}$. Ainsi $\eta.G_{K/k}^{(K')} \# G_{S/s}^{(S')}$ implique $\eta'.G_{K'/k} \# G_{S'/s}$.

Soit $\overline{g}' = \eta.G_{K'/k}$ et soit $L = \mathrm{Inv}\overline{g}'$. Si $\overline{g}' \# G_{S'/S'}$, en vertu de la théorie de Galois pour les corpoïdes commutatifs sans torsion, on a $\mathrm{Inv}\overline{g} \# \hat{S}'_s$. Il existe donc un $\alpha' \in \mathrm{Inv}\overline{g}'$ tel que $\alpha' \notin \hat{S}'_s$. Soit $a' \in K'$ tel que $\alpha' = \overline{a}'$. On a $f_{a'/k}(X) = (\Pi(X-\sigma'.a'))^{m'}$, où σ' parcourt $G_{K'/k}$ et $m' = [k(a'):k]/\overline{[k(a'):k]}$. Comme, pour tout $\sigma \in G_{K'/k}$, on a $|\sigma'.a'| = |a'|$ et $f_{a'/k}(X) \in k[X]$, on voit que $\overline{f}_{a'/k}(X) \in S_{|a'|}[X]$, $\overline{X-\sigma'.a'} = X-\overline{\sigma}'.\alpha' \in S'_{|a'|}[X]$ et $\overline{f}_{a'/k}(X) = (\Pi(\overline{X-\sigma'.a'}))^{m'}$. Or, puisque $\overline{\sigma}' \in \overline{g}'$ et $\alpha' \in \mathrm{Inv}\overline{g}'$, on a $\sigma'.\alpha' = \alpha'$, et $\overline{f}_{a'/k}(X)$ est une puissance de $X-\alpha'$. Comme $f_{\alpha'/s}(X)$ divise $\overline{f}_{a'/k}(X)$, il en est de même pour $f_{\alpha'/s}(X)$, donc α' est inséparable sur s, donc est $\in S'_s$ contre l'hypothèse.

Supposons que K/k est normale (auquel cas on peut prendre K' = K). Alors, $\eta : \sigma \longrightarrow \overline{\sigma}$ est un homomorphisme de $G_{K/k}$ sur $G_{S/s}$, dont le noyau est $V_{K/k} = \{\sigma \in G_{K/k} \ ; \ \overline{\sigma} = 1_S\}$. Or, $\overline{\sigma} = 1_S$ signifie que, pour tout $a \in K$, on a $\overline{\sigma.a} = \overline{a}$, autrement dit, si $a \neq 0$, $|\sigma.a-a| = d(\sigma.a,a) < |a|$. C'est ce qu'on appelle <u>groupe de ramification</u> de K/k. Et on voit que $G_{K/k} / V_{K/k}$ est canoniquement isomorphe à $G_{S/s}$. On peut montrer que, dans le cas où [K:k] est infini,

$V_{K/k}$ est fermé par rapport à la topologie de Krull de $G_{K/k}$ et que (par rapport à cette topologie), l'isomorphisme canonique de $G_{K/k} / V_{K/k}$ à $G_{g/s}$ est aussi un homéomorphisme. L'image inverse de $T_{S/s}$ dans l'homomorphisme η est l'ensemble des $\sigma \in G_{K/k}$ tels que la restriction $(\overline{\sigma}|\overline{K})$ de $\overline{\sigma}$ à $\overline{K}$ soit $1_{\overline{K}}$, autrement dit que $|\alpha| = 1$ $(\alpha \in K)$ implique $|\sigma.\alpha-\alpha|<1$. C'est ce qu'on appelle le groupe d'inertie $T_{K/k}$ de K/k, lequel est également fermé par rapport à la topologie de Krull de $G_{K/k}$. Ainsi, $G_{K/k} / T_{K/k} \tilde{-} G_{S/s} / T_{S/s} \tilde{-} G_{\overline{K}/\overline{k}}$ et $T_{K/k} / V_{K/k} \tilde{-} T_{S/s} \tilde{-} X_{\Gamma(K)/\Gamma(k),p}$, et ces isomorphismes sont aussi des homéomorphismes (ces deux derniers résultats sont connus, du moins si [K:k] est fini, mais pas le premier).

Les résultats précédents se généralisent aux extensions non-normales. Il faut, d'abord, introduire pour de telles extensions K/k un analogue commode du groupe de Galois, qui est son hypergroupe de Galois $G_{K/k}$. Un ensemble H muni d'une hypercomposition (qu'on va écrire multiplicativement) $(x,y) \to xy \subseteq H$ s'appelle un hypergroupe si

1°) $(xy)z = x(yz)$ et 2°) $xH = Hx = H$.

Si l'on identifie les éléments et les singletons correspondants, les groupes deviennent un cas particulier des hypergroupes. Si g est un sous-groupe pas forcément invariant d'un groupe G, l'ensemble $G/g = \{xg ; x \in G\}$ des classes à droite (mod g) dans G s'organise en un hypergroupe, dit quotient droit de G par g, si l'hypercomposé de deux classes $X = xg$ et $Y = yg$ est défini comme l'ensemble $\{zg ; zg \subseteq xgyg\}$ de telles classes zg contenus dans le composé xgyg de X et Y en tant que sous-ensembles de G. Un sous-ensemble h d'un hypergroupe H en est dit un sous-hypergroupe s'il est fermé et est un hypergroupe par rapport à son hypercomposition, autrement dit si pour tout $x \in h$, on a $hx=xh=h$. Il est dit inversible à droite si les xh, $x \in H$, forment une partition de H.

S'il en est ainsi, l'hypercomposé xhyh ($x,y \in H$) de deux classes xh,yh est une réunion $\bigcup_{z \in xhy} zh$ de classes, et on peut, dans ce cas, définir le quotient droit H/h de H par h comme ensemble des classes $\{X = xh ; x \in H\}$ avec l'hypercomposition, où l'hypercomposé des $X = xh$ et $Y = yh$ est $\{zh ; zh \subseteq xhyh\}$. On démontre facilement que $h \subseteq G/g$ en est un sous-hypergroupe de $H = G/g$ ssi $h = G'/g$, où $G' \supseteq g$ est un sous-groupe de G (si h est d'ordre fini, il faut et il suffit pour cela que $hh \subseteq h$), que h est toujours inversible à droite (et d'ailleurs aussi à gauche) et que H/h est canoniquement isomorphe à G/G'. D'ailleurs, si $\xi = xg \in H$, la classe ξh est la partition en classes (mod g) de $xgG' = xG'$. Il en résulte que le cardinal de H/h, dit indice de h dans H et noté (H:h), est égal à $(G : G')$ dans le cas considéré. On appelle hypergroupes droits les hypergroupes isomorphes aux G/g, et il résulte, de ce qui précède, que dans cette catégorie d'hypergroupes, pas seulement les sous-hypergroupes, mais aussi (contrairement à ce qui à lieu pour les groupes) les quotients droits, appartiennent à la catégorie. Et si on appelle indice de h dans H le cardinal (H:h) de H/h, on a le théorème d'indices : si H' et $h \subseteq H'$ sont des sous-hypergroupes d'un hypergroupe droit H, $(H:h) = (H:H')(H':h)$, ainsi que ordre de $H = (H:h)$ (ordre de h). Un sous-hypergroupe h de H est dit normal si, pour tous $x,y \in H$, on a $xhyh = xyh$.

Il est dit semi-invariant à droite si, pour tout $x \in H$, on a $xh \subseteq hx$. On démontre que si H est un hypergroupe droit, ces deux notions sont équivalentes. On démontre que, sous certaines conditions d'inversibilité (satisfaites dans le cas des hypergroupes droits) a lieu, pour les hypergroupes, le théorème de Jordan-Hölder analogue à celui des groupes, mais où on peut remplacer l'invariance par la semi-invariance à droite. Un $e \in H$ est dit une unité de h si pour tout $x \in H$, on a $x \in ex \cap xe$. Un $s \in H$ est un scalaire à droite resp. à gauche si, pour tout $x \in H$, xs resp. sx est un singleton. Si $h \subseteq H$ est un sous-hypergroupe de H inversible à droite, h est une unité de H/h, qui est

un scalaire à droite. Supposons que H' est un hypergroupe possédant une telle unité e' et qu'en plus, pour tous x',y' $\in$ H', x' $\in$ x'y' implique y' = e'. Si φ: H $\longrightarrow$ H' est un homomorphisme normal[12] de H sur un tel hypergroupe H', on démontre que h = φ^{-1},e' est un sous-hypergroupe normal et inversible à droite de H et que φ^* : xh $\longrightarrow$ φ.x est un isomorphisme de H/h sur H'. Si H est un hypergroupe droit, il en résulte que H' l'est aussi et que h est semi-invariant dans H.

Soient K/k une extension algébrique (de corps) et K'/k une surextension normale de K/k. On peut identifier l'ensemble $G_{K/k}^{(K')}$ des isomorphismes de K/k dans K' avec l'ensemble $G_{K'/k} / G_{K'/K}$ des classes à droite (mod $G_{K'/K}$) dans $G_{K'/k}$ en identifiant chaque $\sigma \in G_{K/k}^{(K')}$ avec l'ensemble des $\sigma' \in G_{K'/k}$ qui l'induisent. Si, ensuite, on transporte sur $G_{K/k}^{(K')}$ l'hypercomposition du quotient droit $G_{K'/k} / G_{K'/K}$, cet ensemble devient un hypergroupe droit, dont l'hypercomposition ne dépend pas, en fait, du choix de K'. Si l'on se place dans une clôture algébrique fixée de K. Cet hypergroupe sera appelé <u>hypergroupe de Galois</u> de K/k et sera noté $G_{K/k}$: un sous-hypergroupe h de $G_{K/k}$ s'identifie donc avec $G' / G_{K'/K}$, ou le sous-groupe $G' \supseteq G_{K'/K}$ de $G_{K/k}$ est précisément l'ensemble des $\sigma' \in G_{K'/k}$, qui induisent sur K les $\sigma \in h$; et on a Invh = InvG'.

Si [K:k] est fini, il en résulte que h $\longrightarrow$ Invh $\cap \tilde{K}_k$ est une bijection, décroissante par rapport à l'inclusion, entre l'ensemble des sous-hypergroupes de $G_{K/k}$ et celui des sous-extensions séparables de K/k, et que ordre de h = $[\tilde{K} : (\text{inv}h \cap \tilde{K})]$.

Dans le cas général, on peut définir sans peine les topologies de Krull sur $G_{K/k}$, et, alors, l'énoncé précédent reste vrai si l'on remplace l'ensemble

---

(12) *Si H,H' sont des hypergroupes, une application* φ: H $\longrightarrow$ H' *est dite un* <u>*homomorphisme normal*</u> *si, pour tous* x,y$\in$H, *on a* φ.xy = (φ.x)(φ.y).

de tous les sous-hypergroupes de $G_{K/k}$ par celui des ses hypergroupes fermés par rapport à cette topologie. Une théorie tout-à-fait analogue peut être faite pour les extensions non normales des corpoïdes commutatifs sans torsion. Si $K \supset L \supset k$, $G_{K/L}$ est un sous-hypergroupe fermé de $G_{K/k}$ et $G_{L/k}$ s'identifie à $G_{K/k} \nearrow G_{K/L}$ en identifiant tout $\xi \in G_{L/k}$ à l'ensemble des $\sigma \in G_{K/k}$ qui l'induisent.

Soient K/k une extension valuée, K'/k une surextension valuée normale de K/k, s,S,S' les squelettes de k,K,K', $G_{K/k} = G_{K/k}^{(K')}$ et $G_{S/s} = G_{S/s}^{(S')}$ les hypergroupes de Galois de K/k et de S/s. Alors, si σ,τ sont $\in G_{K/k}$, on montre que $\overline{\sigma\tau} = \overline{\sigma}\,\overline{\tau}$, autrement dit $\eta : \sigma \longrightarrow \overline{\sigma}$ est un homomorphisme normal de $G_{K/k}$ sur $G_{S/s}$. Son noyau (c'est-à-dire $\eta^{-1}.1_S$) est un sous-hypergroupe normal (donc semi-invariant à droite) de $G_{K/k}$. Ce noyau est

$$V_{K/k} = \{\sigma \in G_{K/k} \; ; \; \eta.\sigma = 1_S\} = \{\sigma \in G_{K/k} \; ; \; |\sigma.\alpha - \alpha| < |\alpha| \text{ si } \alpha \in K \text{ est } \neq 0\} .$$

Il est donc défini par la même condition que, dans le cas normal, le groupe de ramification, et s'appelle <u>hypergroupe de ramification</u> de K/k, et $G_{K/k} \nearrow V_{K/k}$ est isomorphe à l'hypergroupe de Galois $G_{S/s}$ de S/s. Il y a lieu assi à considérer, pour les $\sigma \in G_{S/s}$ l'application $\theta : \overline{\sigma} \longrightarrow \overline{\overline{\sigma}} = (\overline{\sigma}/\overline{K})$, où $(\overline{\sigma}/\overline{K})$ est la restriction de $\overline{\sigma}$ sur le corps $\overline{K}$ de S (qui est aussi le corps résiduel de K) : c'est un homomorphisme normal de $G_{S/s}$ sur $G_{\overline{K}/\overline{k}}$, dont le noyau est l'hypergroupe d'inertie $T_{S/s} = \{\sigma \in G_{S/s} \; ; \; \theta.\overline{\sigma} = 1_{\overline{K}}\}$ de S/s. C'est un sous-hypergroupe normal de $G_{S/s}$ et $G_{S/s} \nearrow T_{S/s}$ est isomorphe à $G_{\overline{K}/\overline{k}}$.

Nous savons que $\overline{\sigma} \longrightarrow \chi_{\overline{\sigma}}$ applique $T_{S/s}$ sur l'ensemble $X_{\Gamma(K)/\Gamma(k)}^{(\overline{K}')} = X_{\Gamma(K)/\Gamma(k),p}$. Donc les $\chi \in X_{\Gamma(K)/\Gamma(k)}^{(K')}$ sont des fonctions à valeurs de $\overline{K}'$. On posera $[\chi]_{\overline{K}} = \{\chi^{\overline{\sigma}'} \; ; \; \overline{\sigma}' \in G_{\overline{K}'/\overline{K}}\}$. Alors, on démontre que, si $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$ sont $\in T_{S/s}$, $\chi_{\overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2} = \{\chi_{\overline{\tau}} \; ; \; \overline{\tau} \in \overline{\sigma}_1\overline{\sigma}_2\} = \chi_{\sigma_1}[\chi_{\sigma_2}]_{\overline{K}}$, donc $T_{S/s}$ est iso-

morphe à $X_{\Gamma(K)/\Gamma(k)}$, organisé par l'hypercomposition $\chi_1 * \chi_2^* = \chi_1[\chi_2]_{\overline{K}}$.

Si $T_{K/k} = \eta^{-1}.T_{S/s}$, $T_{K/k} = \{\sigma \in G_{K/k} \ ; \ |\alpha| = 1 \Longrightarrow |\sigma.\alpha - \alpha| < 1\}$ est un sous-hypergroupe normal de $G_{K/k}$ et $G_{K/k} \nearrow T_{K/k} \simeq G_{S/s} \nearrow T_{S/s} \simeq G_{\overline{K}/\overline{k}}$ et $T_{K/k} \nearrow V_{K/k} \simeq T_{S/s} \simeq (X_{\Gamma(K)/\Gamma(k)}, p, *)$. On montre que $T_{K/k}$ et $V_{K/k}$ sont fermés par rapport à la topologie de Krull de $G_{K/k}$, donc, si $K_{T,k} = \mathrm{Inv}\, T_{K/k} \cap \tilde{K}_k$ et $K_{v,k} = \mathrm{Inv}\, V_{K/k} \cap \tilde{K}_k$, on a $T_{K/k} = G_{K/K_{T,k}}$ et $V_{K/k} = G_{K/K_{V,k}}$. Les corps $K_{T,k}$ et $K_{V/k}$ s'appellent corps de <u>ramification</u> et <u>d'inertie</u> de K/k. Visiblement $G_{K_{T,k}/k}$ est canoniquement isomorphe à $G_{K/k} \nearrow T_{K/k}$, donc à $G_{\overline{K}/\overline{k}}$, et $G_{K_{V,k}/k}$ l'est à $G_{K/k} \nearrow V_{K/k}$ donc à $G_{S/s}$. Une extension K/k est dite <u>non-ramifiée</u> si $K = K_{T,k}$, et elle est dite <u>non-surramifiée</u> (encore <u>séparablement ramifiée</u>, <u>modérément ramifiée</u>) si $K = K_{V,k}$.

Ces extensions (qu'on ne suppose pas de degré fini) peuvent se caractériser ainsi :

1°) K/k est non-surramifiée ssi elle est non-défective et son extension squelettique S/s est séparable ;

2°) K/k est non-ramifiée si elle est complètement étalée (autrement dit, non-défective et $\Gamma(K) = \Gamma(k)$) et son extension résiduelle $\overline{K}/\overline{k}$ est séparable.

Soient K' la clôture algébrique valuée d'un corps valué complet k, S'/s l'extension squelettique et R'/r l'extension résiduelle de K'/k, $K'_{V,k}$ et $K'_{T,k}$ les corps de ramification et d'inertie de K'/k. Alors $K'_{V,k}/k$ et $K'_{T,k}/k$ sont respectivement les plus grandes sous-extensions non-surramifiées et non-ramifiées de K/k. Le squelette de $K'_{V,k}$ est le noyau séparable $\tilde{S}'_s$ de l'extension corpoïdale algébrique et algébriquement close S'/s, et celui de $K'_{T,k}$ est le corpoïde d'étalement $(\tilde{S}'_s)_T = S\tilde{\overline{K}}_{\overline{k}}$ de $\tilde{S}'_s$, où $\tilde{\overline{K}}'_{\overline{k}}$ est le noyau séparable de l'extension algébrique et algébriquement close $\overline{K}'/\overline{k}$ (et $\overline{K}'_{T,k} = \tilde{\overline{K}}'_k$). Comme K'/k est normale, $K'_{V,k}/k$, $K'_{T,k}/k$, $\tilde{S}'_s/s$ et $\tilde{\overline{K}}'_{\overline{k}}/\overline{k}$ le sont, et il existe des

isomorphismes canoniques de $G_{K'_{V,k}/k}$ sur $G_{S'/s} = G_{S'_s/s}$ et de $G_{K'_{T,k}/k}$ sur $G_{\overline{K}'/k} = G_{\overline{K}'_{\overline{k}}/k}$. Si K est un corps intermédiaire de K'/k, notons S(K) son squelette. Alors, $K \longrightarrow S(K)$, quand K parcourt les corps intermédiaires de $K_{V,k}/k$, est une bijection de l'ensemble des sous-extensions non-surramifiées de K'/k sur celui des sous-extensions séparables de S'/s, préservant leurs relations booléennes et si $k \subseteq K \subset L \subseteq K'_{V/k}$, l'isomorphisme canonique de $G_{K'_{T,k}/k}$ sur $G_{S'/s}$ en induit un de $G_{L/K}$ sur $G_{S(L)/S(K)}$. De même $K \to \overline{K}$, quand K parcourt les corps intermédiaires de $K'_{T,k}/k$, est une bijection de l'ensemble des sous-extensions non-ramifiées de K/k sur celui des extensions séparables de $\overline{K}/\overline{k}$, préservant leurs relations booléennes, et si $k \subseteq K \subset L \subseteq K'_{T,k}$, l'isomorphisme canonique de $G_{K'_{T,k}/k}$ sur $G_{\overline{K}'/\overline{k}}$ en induit un de $G_{L/k}$ sur $G_{\overline{L}/\overline{K}}$. Ce dernier résultat est classique, mais pas celui qui le précède. Egalement, sont assez classiques les résultats analogues (que je n'énonce pas) sur les extensions K/k complètement et séparablement ramifiées ($K_{T,k}=k, K_{V,k}=K$), où le rôle de $G_{S'/s}$ et de $G_{\overline{K}'/\overline{k}}$ est joué par $X_{\Gamma(K')/\Gamma(k),p}$).

Pour terminer, dans ce travail, avec les applications des squelettes à la théorie de la ramification, il me reste à parler un peu des ramifications supérieures. En conservant les notations précédentes, soient $\alpha \in K$ et $\sigma \in V_{K/k}$. Soit $\omega(\ldots) = -\log|\ldots|$ l'ordre valuatif de K'.

$v^{(\alpha)}(\sigma) = \omega(\sigma.\alpha-\alpha) = -\log|\sigma.\alpha-\alpha|$ est dit le <u>nombre caractéristique</u> de σ en α. Soient $v_o, v_1, \ldots, v_m = +\infty$ toutes les valeurs, écrites dans l'ordre croissant, prises par $v^{(\alpha)}(\sigma)$ sur $V_{K/k}$, et soit $V^{(\alpha)}_{i,K/k}$ (qu'on écrira simplement V_i) l'ensemble $\{\sigma \in V_{K/k} \; ; \; v^{(\alpha)}(\sigma) \geq v_i\}$. On a évidemment, $V_o = V_{K/k}$ et $V_m = G_{K/k(\alpha)}$ [on a $V_m = \{1_K\}$ si α est un élément primitif de K/k, c'est-à-dire si $K = k(\alpha)$]. Soient $\sigma \in V_i$ et $\beta_i(\sigma) = \overline{\sigma.\alpha-\alpha}$ si $v^{(\alpha)}(\sigma) = v_i$ et $\beta_i(\sigma) = \overline{0}$ si $v^{(\alpha)}(\sigma) > v_i$. Le reste squelettique $\beta_i(\sigma) = \overline{\sigma.\alpha-\alpha}$ appartient à l'extension normale $S' \supset S$

de S. Montrons que, si σ_1,σ_2 sont $\in V_i$, on a $\sigma_1\sigma_2 \subseteq V_i$ et

$$\beta_i(\sigma_1\sigma_2) = \beta_i(\sigma_1) + [\beta_i(\sigma_2)]_S$$

où $[\beta_i(\sigma_2)]_S = \{\sigma'.\beta_i(\sigma_2 ; \sigma' \in G_{S'/s}\}$. En effet $\sigma_1\sigma_2 = \{(\sigma_1'\sigma_2'|K)\}$; où σ_1',σ_2' pourcourent indépendemment les automorphismes de K'/k tels que $(\sigma_1'|K) = \sigma_1$, $(\sigma_2'|K) = \sigma_2$ [$(\sigma'|K)$, où $\sigma' \in G_{K'/k'}$ est la restriction de σ' à K]. Donc

$\beta_i(\sigma_1\sigma_2) = \{\beta_i((\sigma_1'\sigma_2'|K)) ; \sigma_1',\sigma_2' \in G_{K'/k}, (\sigma_1'|K) = \sigma_1, (\sigma_2'|K) = \sigma_2\}$.

Or, on a $\sigma_1'\sigma_2'.\alpha-\alpha = \sigma_1'.(\sigma_2'.\alpha-\alpha) + (\sigma_1'.\alpha-\alpha) = \sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha) + (\sigma_1.\alpha-\alpha)$, car $\alpha \in K$. Puisque $|\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)| = |\sigma_2.\alpha-\alpha|$ (principe d'Ostrovski), on a

$$\omega((\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha) \geq \text{Min}[\omega(\sigma_1.\alpha-\alpha),\omega(\sigma_2.\alpha-\alpha)] \geq v_i ,$$

d'où résulte $\sigma_1\sigma_2 \subseteq V_i$. Si $\beta_i(\sigma_1) = \beta_i(\sigma_2) = \overline{0}$, on a $\omega(\sigma_1.\alpha-\alpha) > v_i$, $\omega(\sigma_2.\alpha-\alpha) > v_i$ donc $\omega((\sigma_1'\sigma_2'.\alpha-\alpha) > v_i$, $\beta_i(\sigma_1'\sigma_2'/K)) = \overline{0}$ et $\beta_i((\sigma_1\sigma_2) = \overline{0} = \overline{0}+[\overline{0}]_S$.

Si $\beta_i(\sigma_1) = \overline{0} \neq \beta_i(\sigma_2)$, on a $|\sigma_1.\alpha-\alpha| < |\sigma_2.\alpha-\alpha| = |\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)|$, donc $d([(\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha] , [\sigma_1.(\sigma_2.\alpha-\alpha)]) < |\sigma_1'.(\sigma_1.\alpha-\alpha)|$ et $\omega([(\sigma_1'\sigma_2'|K)\ \alpha-\alpha]) = v_i$ et $\beta_i((\sigma_1'\sigma_2'|K)) = (\overline{\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha} = \overline{\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)} = \overline{\sigma}_1'.(\overline{\sigma_2.\alpha-\alpha}) = \overline{\sigma}_1'.\beta_i(\sigma_2) =$

$=\beta_i(\sigma_1) + \overline{\sigma}_1'.\beta_i(\sigma_2)$ car $\beta_i(\sigma_1) = \overline{0}$, on voit de la même manière que $\beta_i((\sigma_1'\sigma_2'|K) = \beta_i(\sigma_1) = \beta_i(\sigma_1) + \overline{\sigma}_1'.\beta_i(\sigma_2)$ si $\beta_i(\sigma_1) \neq 0 = \beta_i(\sigma_2)$.

Supposons maintenant qu'aucun de $\beta_i(\sigma_1),\beta_i(\sigma_2)$ n'est $\overline{0}$: alors $\omega(\sigma_1.\alpha-\alpha) = \omega(\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)) = v_i$, et $\omega((\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha))$ est $> v_i$ ssi $\overline{\sigma_1.\alpha-\alpha} + \overline{\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)} = \overline{0}$. Or, $\sigma_1.\overline{a-a} = \beta_i(\sigma_1)$ et $\overline{\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)} = \overline{\sigma}_1'.(\overline{\sigma_2.\alpha-\alpha}) =$

$= \overline{\sigma}_1'.\beta_i(\sigma_2)$. Donc $\beta_i((\sigma_1'\sigma_2'.|K)) = \overline{0}$ ssi $\beta_i(\sigma_1) + \overline{\sigma}'.\beta(\sigma_2) = \overline{0}$

Si $\omega((\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha) = v_i$, on a,visiblement,

$$\beta_i((\sigma_1'\sigma_2'|K)) = (\overline{\sigma_1'\sigma_2'|K).\alpha-\alpha}) = (\overline{\sigma_1.\alpha-\alpha)+\sigma_1'.(\sigma_2.\alpha-\alpha)} = \overline{\sigma_1.\alpha-\alpha} + \overline{\sigma}_1'.(\overline{\sigma_2.\alpha-\alpha}) =$$
$$= \beta_i(\sigma_1) + \overline{\sigma}_1'.\beta(\sigma_2) .$$

Ainsi, on a toujours

$$\beta_i((\sigma'_1\sigma'_2|K)) = \beta_i(\sigma_1) + \overline{\sigma}'_1.\beta_i(\sigma_2) \ .$$

L'ensemble des σ'_1 induisant σ_1 sur K est une classe à droite $\sigma'_{1,o}\ G_{K'/K} \subseteq G_{K'/k} \pmod{G_{K'/K}}$. Celui des $\overline{\sigma}'_1$ correspondants est son image $\overline{\sigma}'_{1,o}\ \overline{G}_{K'/K}$ par l'homomorphisme $\sigma' \longrightarrow \overline{\sigma}'$ de $G_{K'/k}$ sur $G_{S'/s}$, donc une classe à droite (mod $\overline{G}_{K'/K}$), et tous ces $\overline{\sigma}'_1$ induisent sur S le correspondant $\overline{\sigma}_1 = 1_S$ car $\sigma_1 \in V_{K/k}$) de σ_1. Or $\overline{G}_{K'/K} = G_{S'/S}$, et la classe (mod $G_{S'/S}$) induisant 1_S sur S et $G_{S'/S}$. Par suite $\beta_i(\sigma_1\sigma_2) = \beta_i(\sigma_1) + G_{S'/S}.\beta_i(\sigma_2) = \beta_i(\sigma_1) + [\beta_i(\sigma_2)]_S$.

Ainsi, premièrement, on a $V_i^2 \subseteq V_i$ ce qui, dans le cas de degré [K:k] fini, démontre directement que V_i est un sous-hypergroupe de $G_{K/k}$. Dans le cas général on peut prouver :

a) que V_i est fermé par rapport à la topologie de Krull de $G_{K/k}$;

b) que pour les ensembles fermés $A \subseteq G_{K/k}$ par rapport à cette topologie, $A^2 \subseteq A$ suffit pour que A soit un sous-hypergroupe de $G_{K/k}$. Ainsi V_i est, dans tous les cas, un sous-hypergroupe fermé de $G_{K/k}$. Donc, si $K_i^{(\alpha)} = \text{Inv}\ V_i \cap \tilde{K}_k$ (ce corps est dit le i-ième corps de ramification de K/k en α), on a $V_i = G_{K/K_i^{(\alpha)}}$. Soit $M_i = M_i^{(\alpha)} = \{\beta_i(\sigma)\ ;\ \sigma \in V_i\}$. Puisque $1_K V_i = V_i$, on a

$$M_i = \beta_i(V_i) = \beta_i(1_K V_i) = \{\beta_i(1_K\sigma) : \sigma \in V_i\} = \bigcup_{\sigma \in V_i} (\beta_i(1_K) + [\beta_i(\sigma)]_S) =$$

$$= \bigcup_{\sigma \in V_i} (\overline{0} + [\beta_i(\sigma)]_S) = \bigcup_{\sigma \in V_i} [\beta_i(\sigma)]_S = [M_i]_S \ .$$

Ainsi, M_i est stable par rapport à tous les $\overline{\sigma}' \in G_{S'/S}$. En plus, soit $m \in M_i$, et soit $\sigma \in V_i$ tel que $\beta_i(\sigma) = m$. Alors, puisque $\sigma V_i = V_i$ (ce V_i est un hypergroupe), on a $\beta_i(\sigma V_i) = \beta_i(\sigma) + [\beta_i(V_i)]_S = m + [M_i]_S = m + M_i$, ce qui montre que M_i est un groupe additif $\subseteq S'$. Et si l'on organise M_i en hypergroupe par

l'hypercomposition $\square$ telle que

$$a \square b = a + [b]_S$$

$\sigma \longrightarrow \beta_i(\sigma)$ devient un homomorphisme normal de V_i sur $(M_i, \square)$ dont le noyau est V_{i+1}. Ainsi, V_{i+1} est un sous-hypergroupe normal (donc semi-invariant à droite) de V_i et $V_i/V_{i+1} \simeq (M_i, \square)$. L'hypergroupe $(M_i, \square)$ (et aussi $(X_{\Gamma(K)/\Gamma(k),p}, *)$ recontré plus tôt) sont des cas particuliers des <u>hypergroupes moduliformes</u> : ce sont des hypergroupes, dont le support muni d'une composition de groupe abélien, qu'on écrira additivement, et d'un groupe g d'opérateurs de cette structure. (On peut aussi considérer A comme un module par rapport à l'anneau de groupe Z(g) sur l'anneau Z des entiers). Alors, l'hypergroupe moduliforme correspondant à cette structure est celui, dont l'hypercomposition o est définie par

$$a \circ b = a + g.b \ .$$

Visiblement, ses sous-hypergroupes sont les sous-groupes stables du groupe additif sous-jacent (autrement dit, des $B \subseteq A$ tels que $g.B = B$ et, pour tout $b \in B$, $b+B = B$). La théorie des ramifications supérieures qu'on vient d'esquisser est dit <u>extrinsèque</u>, car elle ne dépend pas seulement de K/k mais d'un $\alpha \in K$. Mais j'ai réussi (du moins dans le cas de degré [K:k] fini) à construire une théorie <u>intrinsèque</u>, où une suite décroissante de sous-hypergroupes de $V_{K/k}$ est définie (finissant à $\{1_K\}$) telle que le quotient droit de ses termes consécutifs quelconques soit toujours un hypergroupe moduliforme (en particulier, un groupe d'exposant p dans le cas normal), (il est relativement simple d'atteindre ce but dans le cas de valuation discrète, mais pas dans celui de valuations denses : M. Deuring l'a essayé dans le cas normal, mais sans y réussir). Les supports de ces hypergroupes moduliformes ne sont pas, en général, les sous-groupes additifs du corpoïde S', mais les groupes additifs des vecteurs (de longueur finie) addibles de S'. Mais le groupe g est toujours $G_{S'/S}$. Cette théorie a été esquissée dans [8].

Une extension K/k ($K \neq k$) est dite <u>primitive</u> si, L étant un corps, $K \supseteq L \supseteq k$ implique $L = k$ ou $L = K$. Alors, si $a \in K$ est $\notin k$, on a $K = k(a)$. Donc, une extension primitive est toujours de degré fini et a toujours un élément primitif. Ceci posé, et K étant une extension valuée algébrique d'un corps valué complet k, et a étant tel que $K = k(a)$, considérons la suite d'hypergroupes

$$(4) \qquad G_{K/k} \supseteq T_{K/k} \supseteq V_{K/k} = V_o^{(a)} \supset V_1^{(a)} \supset \ldots \supset V_m^{(a)} = \{1_K\} .$$

En vertu, de la théorie de Galois, à cette suite des hypergroupes correspond, par l'application $g \longrightarrow \mathrm{Inv}g \cap \hat{\tilde{K}}_k$, une suite des corps, séparables sur k,

$$k \subseteq K_{T,k} \subseteq K_{V,k} = K_o^{(a)} \subset K_1^{(a)} \subset \ldots \subset K_m^{(a)} = \hat{\tilde{K}}_k$$

à laquelle on peut ajouter K à la fin. Si K/k est primitive, au plus deux corps consécutifs peuvent être distincts. Donc ou bien $k \subset K_{T,k} = K$, ou bien $k = K_{T,k} \subset K_{V,k} = K$, ou bien $k = K_{V,k} \subset K_1^{(a)} = K$, ou bien $k = \hat{\tilde{K}}_k \subset K$. Dans les trois premiers cas, K/k est séparable et on a :

a) Si $k \neq K = K_{T,k}$, K/k est non-ramifiée, donc $G_{K/k} \simeq G_{\overline{K}/\overline{k}} \neq \{1_K\}$ et K/k est primitive ssi $\overline{K}/\overline{k}$ l'est ;

b) si $k = K_{T,k} \neq K_{V,k} = K$, on a $G_{K/k} \simeq (X_{\Gamma(K)/\Gamma(k),p}, *)$, et K/k est primitive ssi cet hypergroupe n'a aucun sous-hypergroupe propre. Or, ses sous-hypergroupes coïncident avec ses sous-groupes multiplicatifs, car ces derniers sont stables par $G_{\overline{K}'/\overline{K}}$. Ainsi, dans ce cas, K/k est primitive ssi $[K:k]$ est un nombre premier (qui est, d'ailleurs, $\neq p$) ;

c) si $k = K_{V,k} = K_o^{(a)} \neq K_1^{(a)}$, on a $m = 1$ et $G_{K/k} \simeq (M_1^{(a)}, \square)$. Donc K/k est primitive dans ce cas ssi $M_1^{(a)}$ n'a aucun sous-groupe additif propre stable par $G_{S'/S}$, et cette situation peut être étudiée d'une manière plus précise à l'aide de certains anneaux non-commutatifs ;

d) enfin, si $k = \hat{\tilde{K}}_k \neq K$, K/k est inséparable, et K/k est primitive ssi $[K:k] = p$. Nous voyons, d'ailleurs, que si la condition c) est satisfaite pour

un élément primitif a de K/k, elle l'est pour tout autre.

Supposons que K/k est complètement surramifiée ($k = K_{V,k}$) et que L/k en est une sous-extension séparable et primitive. Alors, si $a \in L$, $a \notin k$, on a $G_{K/k} = V_o^{(a)}$ et $V_1^{(a)} = G_{K/L}$. Comme $V_1^{(a)}$ est semi-invariant dans $V_1^{(a)}$, on voit que $G_{K/L}$ est semi-invariant dans $G_{K/k}$. On peut prouver le même énoncé si K/k est complètement et séparablement ramifié ($k = K_{T/k} \subset K_{V,k} = K$). Etant donnée une extension K/k, une suite $k = L_o \subset L_1, \subset \ldots \subset L_s = K$ est dite une suite génératrice de K/k si toute L_i/L_{i-1} ($i = 1,2,\ldots,s$) est primitive. Ce qui vient d'être dit implique que si K/k est complètement ramifiée, pour toues les suites génératrices passant par $K_{V,k}$, la suite des hypergroupes

$$G_{K/k} = G_{K/L_o} \supseteq G_{K/L_1} \supseteq \cdots \supseteq G_{K/L_s} = \{1_K\}$$

est une suite semi-invariante à droite. De lors, il résulte du théorème de Jordan-Hölder semi-invariante mentionnée (et de la théorie élémentaire des extensions séparables) que toutes les suites génératrices de K/k passant $K_{V,k}$ ont une même longueur et, à l'ordre et l'isomorphie près, les mêmes hypergroupes de Galois $G_{L_i/L_{i-1}}$ ($i = 1,2,\ldots,s$).

§ 4 - HOMOMORPHISMES ET QUASI-HOMOMORPHISMES. AGGLUTINATIONS.

Soient H et H' deux homogroupoïdes. Une application $\varphi : H \longrightarrow H'$ est dite un quasi-homomorphisme si, pour tous $x,y \in H$, $x \# y \Longrightarrow \varphi.x \# \varphi.y$ et $\varphi.xy = (\varphi.x)(\varphi.y)$. Notons e, e' les éléments neutres de H, H'. Alors $\varphi.e = e'$. En effet, puisque $e \# e$,, on a $\varphi.e \# \varphi.e$ et comme $e^2 = e$, ou $(\varphi.e)^2 = \varphi.e$, ce qui n'est possible que si $\varphi.e = e'$. De même $\varphi.x^{-1} = (\varphi.x)^{-1}$. En effet, on a $x \# x^{-1}$ et $xx^{-1} = e$, d'où $\varphi.x \# \varphi.x^{-1}$ et $(\varphi.x)(\varphi.x^{-1}) = \varphi.e = e'$ et $\varphi.x^{-1} = (\varphi.x)^{-1}\varphi(x)(\varphi.x^{-1}) = (\varphi.x)^{-1}e' = (\varphi.x)^{-1}$.

Soient Δ, Δ' les monopères des grades propres de H, H'. Si $x,y \in H$ sont tels que $\varphi.x \neq e'$, et $\varphi. \neq e'$,

$\delta(x) = \delta(y) \Longrightarrow x \# y \Longrightarrow \varphi.x \# \varphi.y \Longrightarrow \delta(\varphi.x) = \delta(\varphi.y)$.

Ainsi, le quasi-homomorphisme φ définit, comme suit, une application $\varphi_{gr} : \Delta \longrightarrow \Delta'$: si $\varphi.H_\delta$, où $H_\delta = \{x \in H ; x=o \text{ ou } \delta(x) = \delta\}$ est $\{e'\}$, on pose $\varphi_{gr}.\delta = 0$, et si $\varphi.H_\delta \# \{o\}$, on pose $\varphi_{gr}.\delta = \delta(\varphi.x)$, où $x \in H$ est tel que $\delta(x) = \delta$ et $\varphi.x \neq e'$, et un quasi-homomorphisme φ est dit strict si $\varphi^{-1}.e' = \{e\}$.

Un quasi-homomorphisme est dit homomorphisme si, en plus, $\varphi.x \neq e'$, $\varphi.y \neq e'$ et $\varphi.x \# \varphi.y$ impliquent $x \# y$. Il est clair que, dans ce cas, φ_{gr} est une bijection en dehors de $\varphi^{-1}.e'$. Un homomorphisme strict est, évidemment, un isomorphisme.

La définition non homogène de notions ne présente aucune difficulté. Si G et G' sont deux groupes gradués, un homomorphisme $\varphi : G \longrightarrow G'$, est dit quasi-homogène s'il applique tout élément homogène de G sur un élément homogène de G'. Ceci implique, en particulier, que si x,y sont homogènes d'un même grade, $\varphi.x$ et $\varphi.y$, pourvu qu'ils soient $\neq e'$, le sont aussi : en effet, dans le cas contraire, x+y est homogène et $\varphi.(x+y) = \varphi.x+\varphi.y$ ne l'est pas. On dit que φ est homomorphisme homogène si "$\varphi.x \neq o$ est homogène "implique" x est homogène". Il est clair qu'un homomorphisme quasi-homogène (resp. homogène)

des groupes gradués induit un quasi-homomorphisme (resp. homomorphisme) de leurs parties homogènes, et qu'un quasi-homomorphisme (resp. homomorphisme) d'homogroupoïdes se prolonge, et d'une seule manière, en homomorphisme quasi-homogène (resp. homogène) de leurs linéarisés.

Soient $\varphi : H \longrightarrow H'$ un quasi-homomorphisme des homogroupoïdes et $G = \overline{H}$, $G' = \overline{H'}$ les linéarisés des H, H', Δ, Δ' les monopéroïdes des grades des H, H'. Soit $\overline{\varphi} : G \longrightarrow G'$ l'unique homomorphisme quasi-homogène prolongeant φ, et soit $H^{(\varphi)} = \overline{\varphi}^{-1}.H'$ l'image inverse de H' par $\overline{\varphi}$, on va organiser $H^{(\varphi)}$ en monopéroïde par une opération (écrite multiplicativement) suivante : si $\overline{x},\overline{y}$ sont $\in H^{(\varphi)}$, on posera $\overline{x} \# \overline{y}$ ssi $\overline{\varphi}.\overline{x} \# \overline{\varphi}.\overline{y}$ dans H'. C'est seulement dans ce cas qu'on a $\overline{x}\overline{y} \in H^{(\varphi)}$, et on prendra comme composition partielle de $H^{(\varphi)}$ celle de $\overline{H}$. La structure ainsi définie va s'appeler <u>l'agglutiné</u> de H par φ, et le phénomène lui même s'appelle <u>l'agglutination</u>, car il revient à former des nouveaux éléments homogènes en "agglutinant' certains anciens.

L'agglutiné $H^{(\varphi)}$ n'est pas, en général, un annéïde. L'image inverse $\overline{\varphi}^{-1}.e'$ de l'élément neutre de H' est un groupe $C(H^{(\varphi)})$, qui s'appelle le <u>coeur</u> de $H^{(\varphi)}$. Si $\delta' \in \Delta'$, et $H'_{\delta'} = \{x' \in H' \ ; \ x'=e' \text{ ou } \delta(x') = \delta'\}$, $H^{(\varphi)}_{\delta'} = \overline{\varphi}^{-1}.H_{\delta'}$ est un surgroupe de $C(H^{(\varphi)})$, où ce groupe est invariant. Si $\delta'_1,\delta'_2 \in \Delta'$ sont différents, on a $H^{(\varphi)}_{\delta'_1} \cap H^{(\varphi)}_{\delta'_2} = C(H^{(\varphi)})$. Ainsi $H^{(\varphi)}$ apparait comme une réunion de groupes amalgamés selon un sous-groupe $C(H^{(\varphi)})$ invariant dans chacun de ces groupes. $H^{(\varphi)}/C(H^{\varphi})$ défini d'une manière évidente, est un homogroupoïde, mais $H^{(\varphi)}$ lui-même ne l'est que si $\overline{\varphi}^{-1}.e' = \{e\}$, autrement dit ssi $\overline{\varphi}$ est un isomorphisme de G, considéré comme groupe abstrait, dans G'. Dans ce cas l'agglutiné $H^{(\varphi)}$ de H est dit <u>strict</u>.

Les agglutinés sont un cas particulier de la structure suivante appelée <u>groupel</u> : c'est un monoperoïde (H;xy) tel que :

1°) il existe un $C \subseteq H$ qui est un groupe ;

2°) $x \in H$ et $c \in C$ impliquent $x \# c$;

3°) $x \# x$;

4°) $x \# y$, $y \# z$ et $y \in C$ impliquent $x \# z$;

5°) Si $a \notin C$, $H(a) = \{x \in H ; a \# x\}$ est un surgroupe de C, où C est invariant.

Une notion correspondante du point de vue non-homogène est celle de <u>groupe quasi-gradué</u> : on appelle ainsi un groupe G possédant une famille $\{G_\delta, \delta \in \Delta\}$ de sous-groupes tels que :

1°) il existe un sous-groupe invariant C de G, dit son <u>coeur</u> ;

2°) si $\delta \neq \delta'$, $G_\delta \cap G_{\delta'} = C$;

3°) $G/C = \bigoplus_{\delta \in \Delta} G_\delta/C$.

La graduation Δ de G est dite <u>stricte</u> si, pour tout $\delta \in \Delta$, on a $G_\delta \neq C$. On appelle partie homogène de G l'ensemble $H = \bigcup_{\delta \in \Delta} H_\delta$. Il est évident que H est un groupel, et, en particulier, si $H^{(\varphi)}$ est un agglutiné d'un homogroupoïde H, le linéarisé $\overline{H}$ de H peut être considéré comme un groupe quasi-gradué dont la partie homogène est $H^{(\varphi)}$. Mais il est peu vraisemblable (bien que je n'ai pas de contre-exemple) que tout groupel peut être considéré comme partie homogène d'un groupe quasi-gradué ni qu'un tel groupe, s'il existe, est unique. Quand un tel groupe existe on dit que le groupel est <u>linéarisable</u>.

Soient H un groupel et $\overline{H}$ une linéarisation de H (car a priori, il peut en avoir plusieurs). L'existence de $\overline{H}$ n'assure pas encore, a priori, que H est l'agglutiné d'un homogroupoïde : il faut pour cela qu'en plus il existe une famille $\{\tilde{H}_\delta : \delta \in \Delta\}$ de sous-groupes de $\overline{H}$ contenus dans H et tels que, pour tout $a \in H$ n'appartenant pas au coeur C de H, $H(a) = \{x \in H ; a \# x\}$ soit $(\oplus \tilde{H}_\delta ; \tilde{H}_\delta \subseteq H(a))C$ et que $H = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \tilde{H}_\delta$. Ainsi, les notions des groupel, groupel linéarisé, groupe quasi-gradué et agglutiné d'un homogroupoïde ne sont vraisemblablement pas équivalentes, celle de groupel étant la plus générale. Toutefois, on peut démontrer que tout groupel commutatif est linéarisable, et

d'une manière canonique, et que son linéarisé est commutatif.

Si φ est un quasi-homomorphisme, φ_{gr} définit une relation d'équivalence $\varepsilon(\varphi)$ sur Δ, qui s'appelle l'agglutination des grades par φ, en posant $\delta_1 = \delta_2 \pmod{\varepsilon(\varphi)} \Leftrightarrow \varphi_{gr}.\delta_1 = \varphi_{gr}.\delta_2$. La donnée du coeur C de $H^{(\varphi)}$ et de son agglutination des grades $\varepsilon(\varphi)$ permet de reconstruire $H^{(\varphi)}$: en effet, on peut graduer $H^{(\varphi)}$ à l'aide de Δ', en posant $H^{Q}_{\delta'} = C(\underset{\varphi_{gr}.\delta=\delta'}{\oplus} H_\delta)$ et on a $H^{(\varphi)} = \underset{\delta'\in\Delta'}{U} H^{(\varphi)}_{\delta'}$. Or, si φ_{gr} et C sont donnés, chaque $H^{(\varphi)}_{\delta'}$ est déterminé, et $H^{(\varphi)}$ l'est aux noms des gardes près. Bien entendu, cette graduation de $H^{(\varphi)}$ n'est pas forcement stricte ou propre. Cette construction s'applique en prenant n'importe quel sous groupe invariant C de $\overline{H}$ et n'importe quel $\Psi:\Delta \to \Delta'$ telle que $H_\delta \subseteq C$ implique $\Psi.\delta = 0$. On vérifie aisément que $H^{(\varphi)}$ ainsi construit est l'agglutine de H par l'homomorphisme canonique de H dans $H^{(\varphi)}/_C$ gradué par Δ', de manière que $(H^{(\varphi)}{}_C)_{\delta'} = H^{(\varphi)}_{\delta'/C}$ ($\delta' \in \Delta'$), d'ailleurs au lieu de donner $\Psi:\Delta \to \Delta' \cup \{0\}$, on peut donner l'équivalence $\varepsilon(\Psi)$, auquel cas on va identifier Δ' avec $\Delta/\varepsilon(\Psi)$ et poser, $\delta' \in \Delta/\varepsilon(\Psi)$, $H^{(\varphi)}_{\delta'} = C(\underset{\delta\in\delta'}{\oplus} H_\delta)$ (bien entendu, $\varepsilon(\Psi)$ doit être telle que $\delta \equiv 0 \pmod{\varepsilon(\Psi)}$ implique $H_\delta \subseteq C$).

Si H, au lieu d'être homogroupoïde, est un groupel linéarisable, dont on fixe une linéarisation $\overline{H}$, le procédé précédent de construction s'applique, à condition que le coeur C de l'agglutiné à construire contienne celui de H. On parlera dans ce cas de, $(C, \varepsilon(\Psi) ; \overline{H})$ - agglutination de H. On peut aussi la caractériser par le quasi-homomorphisme de H sur $\underset{\delta'\in\Delta/_\varepsilon}{\cup} (H'_{\delta'}/C)$ où $H'_{\delta'} = C(\underset{\delta\in\delta'}{\oplus} H_\delta)$ le composé direct étant celui de sous-groupes de H/C. Si H n'est linéarisable que d'une seule manière, on peut supprimer la mention de $\overline{H}$ et parler de (C, ε) - agglutination.

On dit que la $(C_1, \varepsilon_1 ; \overline{H})$ - agglutination de H est dominée par sa $(C_2, \varepsilon_2 ; H)$ - agglutination si $C_1 \subseteq C_2$ et si $\xi = \eta \pmod{\varepsilon_1} \Rightarrow$

$\Longrightarrow \xi = \eta \pmod{\varepsilon_2}$, et on dira que cette domination est stricte quand $(C_2, \varepsilon_2 ; \overline{H})$ - agglutination n'est pas dominée par $(C_1, \varepsilon_1 ; \overline{H}_1)$ - agglutination. Il est clair que si on fait suivre une agglutination d'un groupel H avec linéarisé $\overline{H}$ par une agglutination du premier agglutiné avec le même linéarisé, le composé de ces deux agglutinations est une agglutination de H avec son linéarisé $\overline{H}$, qui domine sa première agglutination.

On définit facilement les graduations d'un groupel par sa structure de monopéroïde. Le coeur C est l'ensemble des $C \in H$ composables avec tout $x \in H$. Si x, y sont $\notin C$, on pose $\delta(x) = \delta(y) \Leftrightarrow x \# y$, et ce sont les grades stricts. On obtient la graduation propre en posant $\delta(x) = 0$ si $x \in C$ et toute autre graduation s'obtient en rajoutant des grades vides à ces graduations. Si est un groupel, $h \subseteq H$ en est dit un sous-groupel si :

1°) $\quad x \in h \Rightarrow x^{-1} \in h,$

2°) $\quad x,y \in h$ et $x \# y$ dans H impliquant $xy \in h$.

Bien entendu, un tel h est un groupel par rapport à sa composition partielle induite par celle de H (et il sera toujours supposé muni de cette composition partielle). Si H est linéarisable, et si $\mathcal{G} = \overline{H}$ en est une linéarisation, un sous-groupe g de $\mathcal{G}$ sera dit homogène s'il est engendré par le sous-groupel $h = g \cap H$ de H. Ainsi, il y a une bijection entre les sous-groupels de H et les sous-groupes homogènes de $\overline{H}$. Si $\tilde{H}$ est un agglutiné de H, considéré comme partie homogène de son linéarisé $\mathcal{G} = \overline{H}$, et si g est un sous-groupe de $\mathcal{G}$, on a $g \cap H \subseteq g \cap \tilde{H}$, donc si g est engendré par $g \cap H$, il l'est à fortiori par $g \cap \tilde{H}$. Ainsi $h \to \overline{h} \to \tilde{h} = \overline{h} \cap \tilde{H}$ est une injection mais pas forcement une bijection de l'ensemble des sous-groupels de H dans celui de $\tilde{H}'$.
Si l'on identifie h et $\tilde{h}$, on peut dire que plus une agglutination est dominante, plus grand est l'ensemble des sous-groupels de l'agglutiné correspondant. En particulier, s'il s'agit d'agglutinés d'un annéïde H, ils sont toujours linéarisables, et on prend comme leur linéarisé celui de $\overline{H}$ de H.

Soient A,A' deux anneaux gradués, dont soient H, H' les parties homogènes et soit $\overline{\varphi} : A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. Cet homomorphisme est dit quasi-homogène (resp. homogène) s'il l'est en tant

qu'homomorphisme des groupes additifs gradués de ces anneaux. Il induit sur H une application φ: H → H', qui est un quasi-homomorphisme resp. homomorphisme de l'homogroupoïde additif de H sur celui de H' et, par ailleurs , est un homomorphisme du demi-groupe multiplicatif de H dans celui de H'. Vice versa si φ : H → H' est un quasi-homomorphisme resp. homomorphisme de H dans H', qui est aussi un homomorphisme multiplicatif, il se prolonge d'une seule manière en un homomorphisme quasi-homogène resp. homogène $\overline{\varphi}$: A → A' de A dans A', et $\overline{\varphi}$ est aussi un homomorphisme multiplicatif. De telles applications seront appelées quasi-homomorphismes resp. homomorphismes de l'annéïde H dans l'annéïde H', et les $\overline{\varphi}$ correspondants seront appelés les homomorphismes quasi-homogènes resp. homogènes de l'anneau gradué A = $\overline{H}$ dans l'anneau gradué A' = $\overline{H'}$.

Si l'on considère les monopères des grades propres Δ de H (ou de A) et Δ' de H' (ou de A'), φ_{gr} a alors la propriété : si

$$\varphi_{gr}.\ \delta_1 = \varphi_{gr}.\delta_1^*,\ \varphi_{gr}.\delta_2 = \varphi_{gr}.\delta_2^*,\ \varphi_{gr}.\ \delta_1\delta_2 \neq 0,\quad \varphi_{gr}.\delta_1^*\delta_2^* \neq 0,$$

alors on a

$$\varphi_{gr}.\ \delta_1\delta_2 = \varphi_{gr}.\ \delta_1^*\ \delta_2^* = (\varphi_{gr}.\ \delta_1)\ (\varphi_{gr}.\ \delta_2).$$

Considérons l'agglutiné $H^{(\varphi)}$ de l'homogroupoïde addifif H. Si $\overline{x},\overline{y}$ sont $\in H^{(\varphi)}$, on a $\overline{\varphi}$. $\overline{x} \in H'$ et $\overline{\varphi}.\overline{y} \in H'$, d'où résulte $\overline{\varphi}.\overline{xy} = (\overline{\varphi}.\overline{x})(\overline{\varphi}.\overline{y}) \in H'$. Ainsi, la multiplication de A = $\overline{H}$ induit sur $H^{(\varphi)}$ une multiplication partout définie. En plus, si $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ sont $\in H^{(\varphi)}$ et on y a $\overline{x} \# \overline{y}$ on a $\overline{\varphi}.\overline{x} \# \overline{\varphi}.\overline{y}$ (dans H'), d'où résulte $\overline{\varphi}.\overline{z}\ \overline{x} = (\overline{\varphi}.\overline{z})(\overline{\varphi}.\overline{x}) \#$ $\# (\overline{\varphi}.\ \overline{z})(\overline{\varphi}.\ \overline{y}) = \overline{\varphi}.\ \overline{z}\ \overline{y}$, donc $\overline{z}\ \overline{x} \# \overline{z}\ \overline{y}$ dans $H^{(\varphi)}$, et (puisque $H^{(\varphi)} \subseteq A$) $\overline{z}\ \overline{x} + \overline{z}\ \overline{y} = \overline{z}(\overline{x} + \overline{y})$, et on démontre la propriété analogue de distributivité à droite. Ainsi, l'agglutiné $H^{(\varphi)}$ est un groupel commutatif par rapport à l'addition muni d'une multiplication partout définie et distributive par rapport à l'addibilité et l'addition. Si C est le coeur de $H^{(\varphi)}$, on a $\overline{\varphi}.\ H^{(\varphi)}\ C = (\overline{\varphi}.\ H^{(\varphi)})(\overline{\varphi}.\ C) \subseteq H'0 = 0$, donc $H^{(\varphi)}\ C \subseteq C$ et $C\ H^{(\varphi)} \subseteq C$. Un tel biopéroïde s'appelle un anel. Voici sa définition sous forme axiomatique :

Un biopéroïde (H; x + y, xy), s'appelle anel si :

I. Il est un demi-groupe multiplicatif ayant un élément biabsorbant 0 (zéro).

II. 1°) Il existe un sous-groupe additif C de H, qui est un idéaloïde (bilatère) de H, (c'est-à-dire tel que $HC \subseteq C$ et $CH \subseteq C$) tel que, pour tout $c \in C$ et pour tout $x \in H$, on ait $x \# c$;

2°) $x \# x$;

3°) si $x \# y$, $y \# z$ et $y \notin C$, on a $x \# z$.

III. Si $a \notin C$, $H(a) = \{x \in H ; a \# x\}$ est un groupe abelien par rapport à l'addition.

IV. $x \# y \Rightarrow zx \# zy$, $xz \# yz$, $z(x + y) = zx + zy$, $(x + y)z = xz + yz$.

Les grades stricts sont définis seulement pour les $x \notin C$, on pose $\delta(x) = \delta(y)(x, y \notin C)$ ssi $x \# y$, et en graduation propre, on pose :

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x \in C.$$

L'analogue non-homogène de la structure d'anel est celle d'<u>anneau quasi-gradué</u>. C'est un anneau A, où est donné un idéal bilatère C, dit son <u>coeur</u>, et une famille de sous-groupes de son groupe additif $\{A_\delta ; \delta \in \Delta\}$, tel que A/C soit la somme directe $\bigoplus_{\delta \in \Delta} (A_\delta/C)$ des A_δ/C.

Comme toujours, $H = \bigcup_{\delta \in \Delta} A_\delta$ sera dite <u>partie homogène</u> de A. On peut aussi représenter cette structure, du point de vue semi-homogène, comme couple (A,H) et d'écrire (ce que nous ne faisons pas) les axiomes pour H. La partie homogène d'un anneau quasi-gradué est manifestement un anel, mais on prouve facilement que tout anel H est de cette forme (et même que les anneaux quasi-gradués A dont H est la partie homogène sont tous H - isomorphes). En effet, puisque l'addition

est commutative, le groupel additif de H a un et un seul linéarisé (qui est un groupe commutatif quasi-gradué), on démontre facilement que la multiplication de H se prolonge par distributivité, d'une manière cohérente, à A, qui devient ainsi un anneau quasi-graduel. Et évidement, le prolongement de la multiplication par distributivité est unique.

Cet anneau quasi-gradué est dit le linéarisé de H. Ainsi, les anels sont toujours linéarisables. Mais il est peu vraisemblable qu'ils soient tous des agglutinés des anneïdes. Les graduations d'un anel sont celles de son groupel additif avec la multiplication des grades définie comme dans les anneïdes en remplaçant 0 par le coeur C.

En graduation stricte, on a $\xi \# \eta$ ssi $A_\xi A_\eta \not\subseteq C$ et alors, $\xi\eta = \delta(xy)$, ou $x, y \in H$ sont tels que $\delta(x) = \xi$, $\delta(y) = \eta$ et $xy \notin C$. Et en graduation propre on pose :

$$\xi\eta = 0 \text{ si } A_\xi A_\eta \subseteq C \text{ et } \xi 0 = 0\xi = 00 = 0.$$

Puisque les anels sont toujours linéarisables, et d'une seule manière, on peut définir leurs agglutinés par les quasi-homomorphismes de la même manière que pour les annéïdes une fois cette notion définie. Une application $\varphi : H \to H'$, où H et H' sont des anels, est dite un quasi-homomorphisme si :

1°) $x \# y \Rightarrow \varphi.x \# \varphi.y$ et $\varphi.(x + y) = \varphi.x + \varphi.y$;

2°) si C, C' sont les coeurs des H, H', $\varphi.\ C \subseteq C'$;

3°) $\varphi.\ xy = (\varphi.x)\ (\varphi.y)$.

On appelle φ un homomorphisme si, au plus, on a :

4°) $\varphi.x \# \varphi.y$, $\varphi.x \notin C$ et $\varphi.y \notin C$

impliquent $x \# y$.

On dira qu'un agglutiné d'un anel (en particulier d'un annéïde)

domine un autre si cela a lieu pour les groupels sous-jacents. Visiblement, ceci équivaut à ce que le premier agglutiné soit un agglutiné du second.

Un idéal (unilatère ou bilatère) d'un anneau quasi-gradué A est dit homogène quand il est un sous-groupe homogène du groupe addigradué de A. Si H est un anel, un sous-ensemble q de H en est dit un idéaloïde p.ex. gauche s'il est un sous-groupel de son groupel additif et $Hq \subseteq q$ (il est évident comment on définit les idéaloïdes droits et bilatères). Si $\overline{q}$ est un idéal homogène (unilatère ou bilatère) de A, $q = H \cap \overline{q}$ est un idéaloïde de même côté de H. Vice versa, si q est un idéaloïde de H, son linéarisé $\overline{q}$ est un idéal homogène du même type de A et $q = \overline{q} \cap H$. Ainsi, il y a une bijection entre les idéaux homogènes d'un certain côté ou bilatères de A et les idéaloïdes du même type de H. Si $H^{(\varphi)}$ est un agglutiné de H, un idéal homogène $\overline{q}$ de l'anneau gradué ou quasi-gradué A, où $A = \overline{H} = \overline{H^{(\varphi)}}$ est le linéarisé de H, en est un de l'anneau quasi-gradué $(A, H^{(\varphi)})$. En effet, si le groupe additif de $\overline{q}$ est engendré par $\overline{q} \cap H$, il l'est à fortiori par $q \cap H^{(\varphi)} \supseteq q \cap H$. Ainsi, il existe une injection canonique $q \to \overline{q} \cap H^{(\varphi)}$ de l'ensemble des idéaloïdes d'un certain côté ou bilatères d'un annéïde ou anel H dans celui des idéaloïdes du même type de $H^{(\varphi)}$.

On dit qu'un anneau gradué ou quasi-gradué (resp. annéïde ou anel) est artinien ou noethérien, p. ex. à gauche, si les idéaux homogènes à gauche (resp. idéaloïdes à gauche) satisfont à la condition minimale ou maximale. Il est clair que si un agglutiné H° d'un anel (ou annéïde) H est artinien ou northérien, H l'est aussi (ou si, H° et $H^{\circ\circ}$ sont deux agglutinés de H dont $H^{\circ\circ}$ domine H°, H° est artinien ou noe-

thérien si $H^{\circ\circ}$ l'est). Mais l'inverse est faux, comme le montre l'exemple suivant :

soit R un corps (commutatif) et T le groupe multiplicatif libre engendré par un ensemble dénombrable :

$\mathfrak{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ de variables indépendantes.

Soit Q le produit cartésien $T \times R$ des T,R, où toutefois, tous les éléments $(0, r)$ de $\{0\} \times R$ sont identifiés à un seul élement 0.

Définissons sur Q une multiplication partout définie et une addition partielle en posant : $(\xi,r)(\eta,s) = (\xi\eta,rs)$,

$(\xi,r) \# (\eta, s) \Leftrightarrow \xi = \eta$ ou $rs = 0$,

auquel cas, on pose :

$(\xi,r) + (\xi,s) = (\xi,r + s)$ et $(\xi,r) + 0 = 0 + (\xi,r) = (\xi,r)$.

On vérifie immédiatement que Q, organisé en biopéroïde par ces opérations, est un corpoïde commutatif (et même, sans torsion). Mais son linéarisé est $\overline{Q} = R[X_1, X_1^{-1}, X_2, X_2^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}, \ldots]$. C'est un anneau, qui n'est ni artinien, ni noethérien : en effet, soit $f(x)$ un polynome $\in R[X]$ qui n'est égal à aucune puissance X^i $(i = 0, 1, \ldots)$ de X. Alors si u_i est l'idéal principal $(f(X_i))$, et q_n est le p.g.c.d. des $u_1, u_2, \ldots u_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ est une suite infinie strictement croissante d'idéaux de $\overline{Q}$, tandis que $u_1, u_1 u_2, \ldots, u_1 u_2 \ldots u_n, \ldots$ et $u_1, u_1^2, \ldots, u_1^n \ldots$ en sont des suites infinies strictement décroissantes.

Soient A un anneau quasi-gradué (éventuellement gradué), dont la partie homogène soit H et le coeur C, et M un A-module, qui est, en même temps, un groupe additif quasi-gradué (éventuellement gradué), dont la partie homogène est N et le coeur E. Alors M est dit un A-module quasi-gradué si :

1°) $H\,N \subseteq N$;

2°) $H\,E \subseteq E$ (autrement dit E est un sous-groupe stable de N ;

3°) $C\,N \subseteq E$.

La partie homogène N de M est un groupel commutatif par rapport à son opération appelée addition, munie d'une H-multiplication externe telle qu'on ait 1°), 2°), 3°), et qu'aient lieu les règles générales :

α) si $a, b \in H$ et $x \in N$, on a $a(bx) = (ab)x$;

β) si $a, b \in H$ et $x \in N$, $a \# b \Rightarrow ax \# bx$ et

$(a + b)x = ax + bx$;

γ) si $a \in H$, $x, y \in N$, $x \# y \Rightarrow ax \# ay$ et $a(x + y) = ax + ay$.

Un couple (H,N) muni d'une H-multiplication externe de N satisfaisant aux axiomes α), β), γ), 1°), 2°), 3°), s'appelle un H-monel (à gauche). On constate, par les mêmes raisonnements que dans le cas des anels, en remplaçant la multiplication interne de l'anel par la multiplication externe du monel, que le linéarisé $\overline{N}$ de N avec la multiplication externe prolongée par distributivité, est un $\overline{H}$-anneau quasi-gradué.

Si Δ est le monopère des grades propres de A (et de H) et si D est l'ensemble des grades propres de M (et de N), D devient un Δ-extopère, qui sera dit extopère des grades du H-monel N, si l'on pose pour $\delta \in \Delta$ de D, $\delta d = 0$ si $\delta = 0$ ou $d = 0$ ou $\delta \neq 0$, $d \neq 0$ et $H_\delta\, N_d \subseteq E$, sinon on pose : $\delta d = d(ax)$, où $a \in H$ et $x \in N$ sont tels que $\delta(a) = \delta$, $d(x) = d$ et $ax \notin E$.

Si N, N' sont deux H-monels, dont les coeurs sont respectivement E, E', une application $\varphi : N \to N'$ est dite un quasi-homomorphisme de N dans N' si :

1°) Pour tous $a \in H$, $x \in N$, $\varphi.\, ax = a(\varphi.x)$,

2°) si x, y sont $\in N$, $x \# y \Rightarrow \varphi.x \# \varphi.y$ et $\varphi.(x + y) = \varphi.x + \varphi.y$;

3°) $\varphi.E \subseteq E'$.

Il est dit un homomorphisme si, en plus, on a :

4°) $\varphi.x \# \varphi.y$, $\varphi.x \notin E'$, $\varphi.y \notin E'$ impliquent $x \# y$.

Un quasi-homomorphisme resp. homomorphisme φ de N dans N' se prolonge d'une manière en homomorphisme quasi-homogène resp. homogène $\overline{\varphi}$ du linéarisé $M = \overline{N}$ de N dans celui $M' = \overline{N'}$ de N', la définition de ces homomorphismes des modules gradués étant évidente. Toute la construction des agglutinés faite pour les groupels linéarisables et pour les anels, ainsi que les résultats qui les concernent, se transportent sans difficulté aux monels en remplaçant la multiplication interne des anels par celle externe des monels. En particulier, si $M^{(\varphi)}$ est l'agglutiné d'un H-monel M, il est déterminé (ainsi que, à l'isomorphie près, le quasi-homomorphisme φ de M) par la donnée du coeur $E^{(\varphi)}$ de $M^{(\varphi)}$ et par l'équivalence agglutnative $\varepsilon(\varphi)$ des grades.

On appelle sous-monel d'un H-monel N, un sous-groupel N' de son groupel additif, qui est stable par H, c'est-à-dire tel que $HN' \subseteq N'$. Un monel est dit artinien resp. northérien si ses sous-monels obéissent à la condition minimale resp. maximale. Si un anel est considéré comme un H-monel à gauche (auquel cas il sera noté ${}_HH$), en considérant comme sa multiplication externe la multiplication à gauche par les $a \in H$, les sous-monels de ${}_HH$ coïncident avec les idéaloïdes gauches de l'anel H. En particulier, le H-monel ${}_HH$ est artinien ou noetherien si et seulement si l'anel H l'est à gauche.

Soit N un H-monel. Si H est commutatif, et si $u \in H$, $[u] : x \to u\,x$ est un quasi-homomorphisme de N (dans le cas ou H n'est

pas commutatif, mais $N = {}_H H$, il en est de même pour $[u]_d : x \to x\,u$)
Notons, par abus d'écriture, $N^{(u)}$ l'agglutiné de N par $[u]$ (ou $[u]_d$).
Visiblement, on a $N \subseteq N^{(u)} \subseteq N^{(u^2)} \subseteq \ldots\ldots \subseteq N^{(u^i)} \subseteq$ et si $N^{(u^i)} = N^{(u^{i+1})} = (N^{(u^i)})^{(u)}$, tous les $N^{(u^j)}$, $j \geq i$, sont $= N^{(u^i)}$.
On dira que $u \in H$ est <u>semi-régulier</u> si la suite précédente devient stationnaire, et le plus petit i tel que $N^{(u^i)} = N^{(u^{i+1})}$ est dit son <u>indice de semi-régularité</u>.

Si $(\Delta, D, \delta d)$ est la graduation propre du H-monel N, l'application $[u]$ ou $[u]_d$ induit une équivalence agglutinante $\varepsilon^{(u)}$ resp $\varepsilon_d^{(u)}$ de grades définie par $d_1 = d_2 \Leftrightarrow \delta(u)\, d_1 = \delta(u)\, d_2$ resp. $d_1\, \delta(u) = d_2\, \delta(u)$ et, évidement, $\varepsilon^{(u^{i+1})}$ (resp. $\varepsilon_d^{(u^{i+1})}$) est une équivalence plus épaisse (au sens large) que $\varepsilon^{(u^i)}$ (resp. $\varepsilon_d^{(u^i)}$). Si la suite $\varepsilon^{(u)}$, $\varepsilon^{(u^2)}$,.... ..., $\varepsilon^{(u^i)}$,... (resp. $\varepsilon_d^{(u)}$, $u_d^{(u^2)}$,...) devient stationnaire, on dira que $\delta(u) \in \Delta$ est un grade semi-régulier. Si u est un grade semi-régulier, $\delta(u)$ l'est aussi, mais l'inverse n'est pas, en général, vrai : en effet, si $C_i^{(u)}$ est le coeur de $N^{(u^i)}$, il peut fort bien arriver que la suite de sous-modules $C_1^{(u)} \subseteq C_2^{(u)} \subseteq \ldots \subseteq C_i^{(u)} \subseteq \ldots$ ne devienne pas stationnaire même si $\delta(u)$ est semi-régulier. Mais si N est un H-monel noethérien, cela ne peut pas arriver, et la semi-régularité de $\delta(u)$ entraîne celle de u.

Un H-monel N est dit <u>fort</u> si tous les $\delta \in \Delta$ sont semi-réguliers. Si il est noethérien, tous les éléments de H sont, également, semi-réguliers. Si il est noethérien, son extopère des grades l'est aussi, le réciproque n'étant pas, en général vrai. En particulier, si H est un anel, son monopère Δ des grades propres est noethérien quand il l'est, mais pas inversement. Dans le cas, où Δ est un demi-groupe commutatif, M.Chadeyras a prouvé dans [(2)], par une analyse de structure de tels

demi-groupes commutatifs, que la propriété d'un tel demi-groupe d'être fort et celle d'être noethérien sont indépendantes (et, même, paraîssent être tout à fait étrangères l'une à l'autre). A fortiori, il n'y a aucune liaison entre ces propriétés d'un anel H (considéré comme un H-monel ${}_H H$). Un anel est fort s'il est régulier à droite ou encore si tous les $\delta \in \Delta$ sont "périodiques" (c'est-à-dire l'ensemble des δ^i distincts est fini), mais ce ne sont pas les seuls cas possibles.

§ 5 - ANNEAUX GRADUES (ET ANNEIDES) COMMUTATIFS.

La théorie des anneaux gradués commutatifs a été étudiée par M. Chadeyras dans [2]. Comme il s'agissait de l'étude des objets homogènes, il s'est placé au point de vue homogène, ce que nous allons faire aussi. Comme l'étude des anneaux gradués non réguliers exige l'emploi des anneaux quasi-gradués (car l'agglutination par multiplication y joue un grand rôle), beaucoup de résultats y sont prouvés pas seulement pour les annéïdes, mais aussi pour les anels (qui ont été définis précisément dans ce travail). Je vais résumer quelques résultats, les plus essentiels de ce travail, quelquefois avec l'idée de démonstration.

1. Si Δ est un monopère fini commutatif quelconque, il existe des annéïdes commutatifs ayant Δ comme monopère des grades stricts.

On le démontre en donnant la construction d'un tel annéïde, qui est la suivante :

Soit $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$. Soit $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$, ou Π^+ est l'ensemble de $\frac{n(n-1)}{2}$ premiers entiers impairs positifs $1, 3, \ldots, n(n-1) - 1$ et Π^- celui de n premiers entiers impairs négatifs $-1, -3, \ldots, -2n + 1$.

Soit $2\Pi = \{2q \ ; \ q \in \Pi\}$ et $P = \Pi \cup 2\Pi$.

Considérons une famille $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de sous-ensembles de P telle que :

a) si $i \neq j$, $P_i \cap P_j$ est un singleton $\{q(i,j)\}$ $\{q(j,i)\}$, où $q_{i,j} \in \Pi^+$;

b) si $\{i,j\} \neq \{i',j'\}$, $q(i,j) \neq q(i',j')$;

c) $q(i,i) = -2i + 1$;

d) si $\delta_i \ \delta_j = \delta_\ell$, $2q_{i,j} \in P_\ell$ [De telles familles $\{P_1, P_2, \ldots, P_i\}$ existent : p.ex, il suffit de poser, pour $j > i$, $q(i,j) = \frac{(j-1)(j-2)}{2} + i$].

Ceci posé, soit A un anneau intègre. Faisons correspondre à tout $q \in P$, un anneau A_q isomorphe à A, l'image d'un $a \in A$ dans A_q étant noté $(a)_q$. Soit H_i le groupe (abélien) additif $\bigoplus_{q \in P_i} A_q$ (où, cette fois-ci, A_q désigne le groupe additif de l'anneau du même nom). Les éléments de ce groupe H_i sont donc les vecteurs $x^i = ((x_q)_q \ ; \ q \in P_i)$, où $x_q \in A$. On posera $H = \cup H_i$, en identifiant les zéros $0^i = ((0)_q \ ; \ q \in P_i)$ de ces groupes additifs (qui, autrement, sont tous distincts, car $-2i + 1 \in P_i$ et $\notin P_j$, $j \neq i$). Si $x, y \in H$, on pose $x \# y$ ssi x et y appartiennent à un même H_i, auquel cas $x + y$ sera leur somme dans ce groupe additif. Et si $x = ((x_q)_q \ ; \ q \in P_i) \in H_i$ et $y = ((y_q)_q \ ; \ q \in P_j) \in H_j$, on pose $xy = ((z_q)_q \ ; \ q \in P_\ell) \in H_\ell$, où $\delta_\ell = \delta_i \ \delta_j$ et $z_q = 0$ ou $x_{q(i,j)} \ y_{q(i,j)}$, selon que $q \neq$ ou $= 2q(i,j)$. Le lecteur peut vérifier lui-même (ou voir [2] p. 29) que H est un annéïde et que Δ est sa graduation stricte si l'on appelle δ_i le grade des éléments non-nuls de H_i.

2. Soit H un annéïde, dont soit Δ le monopère des grades propres et $A = \overline{H}$ le linéarisé (dans le travail [2], H, et par suite Δ, est supposé commutatif, mais nous ne ferons pas ici cette hypothèse). Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble de variables et $\overset{\gamma}{\Delta}$ un suropère de Δ (autrement dit Δ est un sous-opère de $\overset{\gamma}{\Delta}$) tel que le zéro de Δ en soit un biabsorbant. Soit $Z_{\Delta}(\overset{\gamma}{\Delta})$ le centralisateur de Δ dans Δ, autrement dit l'ensemble des $\overset{\gamma}{\delta}{}^{*} \in \overset{\gamma}{\Delta}$, qui commutent avec tout $\delta \in \Delta$. Soit $\theta : \mathfrak{X} \to Z_{\Delta}(\overset{\gamma}{\Delta})$ une application arbitraire de $\mathfrak{X}$ dans $Z_{\Delta}(\overset{\gamma}{\Delta})$ telle que les $\delta(X)$, $X \in \mathfrak{X}$ commutent deux à deux. Est-il toujours possible de trouver un surannéïde H' de H engendré sur H par $\mathfrak{X}$ tel que :

1°) le linéarisé $\overline{H}'$ de H' soit l'anneau $A[\mathfrak{X}]$ des polynômes de $\mathfrak{X}$ sur $A = \overline{H}$;

2°) le grade de $\delta(X)$ de $X \in \mathfrak{X}$ soit $\theta.X$;

3°) le monopère des grades propres Δ' de H' soit un sous-opère de $\overset{\gamma}{\Delta}$?

La réponse est non, et ceci pour plusieurs raisons. D'une part, si $\theta.X$, $X \in \mathfrak{X}$, est nulpotent, p. ex. $(\theta.X)^{i} = 0$, on devrait avoir $\delta(X^{i}) = \delta(X)^{i} = (\theta.X)^{i} = 0$ et $X^{i} = 0$, ce qui contredit $\overline{H}' = A[\mathfrak{X}]$. D'autre part, il peut arriver que les $\theta.X$, pour les différents $X \in \mathfrak{X}$, n'associent pas entre eux ($[(\theta.X)\ (\theta.Y)]\ (\theta.Z) \neq (\theta.X)\ [(\theta.Y)\ (\theta.Z)]$ pour quelques $X, Y, Z \in \mathfrak{X}$) ou avec quelque $\delta \in \Delta$, ce qui entraîne $X\,Y\,Z = 0$ resp. $a\,X\,Y = 0$ (si $\delta = \delta(a)$ n'associe pas avec $\theta.X$ et $\theta.Y$). Ainsi, si l'on veut que H' puisse être un annéïde, il faut imposer à θ d'autres conditions, d'ailleurs assez restrictives. Mais Chadeyras a eu l'idée de n'en faire rien, en demandant à H' d'être pas forcément un annéïde, mais seulement un anel, auquel cas la graduation $\theta : \mathfrak{X} \to Z_{\Delta}(\overset{\gamma}{\Delta})$ définit complètement cet anel à H-isomorphie près, du moins si l'on demande que le coeur de cet anel soit le plus petit possible, et la construction de cet anel s'applique aussi au cas ou H lui-même

est un anel. Voici la construction de cet anel $H_\theta[\mathfrak{X}]$ des polynômes en $\mathfrak{X}$ de graduation (ou de pente) θ sur l'anel H. Soit $m = a X_1^{i_1} \ldots X_s^{i_3}$, où $a \in H$ et $X_1, X_2, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}$ et $i_1, i_2, \ldots, i_s$ strictement positifs, un monôme de $\mathfrak{X}$ à coefficient $\in H$.

Un $t \in H$ est dit un <u>diviseur central</u> de a s'il existe $u, v \in H$ tels que $a = u\ t\ v$, et t_1, t_2 (dans cet ordre) sont dit <u>diviseurs centraux contigus</u> de a s'il existe $u, v \in H$ tels que $a = ut_1t_2v$.

Le monôme m sera dit grade-associable si $\delta(a) \neq 0$ et :

1°) pour tout diviseur central t de a et pour tous $i, j, \ell \in \{1,2,..,s\}$ (on ne suppose pas que i, j, ℓ sont distincts)

$$[(\delta(t)(\theta.X_i))\ (\theta.X_j)]\ (\theta.X_\ell) = (\delta(t)(\theta.X_i))[(\theta.X_j)(\theta.X_\ell)]$$

et

$$[(\theta.X_i)(\delta(t)(\theta.X_j)]\ (\theta.X_\ell) = (\theta.X_i)\ [(\delta(t)(\theta.X_j)(\theta.X_\ell)]$$

2°) pour tout diviseur central t de a et pour tous $i, j \in \{1,2,\ldots,s\}$,

$$[\delta(t)(\theta.X_i)]\ (\theta.X_j) = \delta(t)\ [(\theta.X_i)(\theta.X_j)]$$

et

$$[(\theta.X_i)\ \delta(t)]\ (\theta.X_j) = (\theta.X_i)\ [\delta(t)(\theta.X_j)]\ ;$$

3°) pour tous diviseurs centraux contigus t_1, t_2 de a et pour tout $i \in \{1, 2,\ldots,s\}$,

$$[(\theta.X_i)\ \delta(t_1)]\ \delta(t_2) = (\theta.X_i)\ [\delta(t_1)\ \delta(t_2)]$$

et

$$\delta(t_1)\ [(\theta.X_i)\ \delta(t_2)] = [\delta(t_1)(\theta.X_i)]\ \delta(t_2).$$

On démontre que, dans ces conditions, quelle que soit la décomposition de a en facteurs $\in H$ et quelle que soit la succession des multiplications, le produit des grades de ces facteurs et des variables X_i qui entrent dans le monôme est le même (on appelera ce produit pré-garde de m, et on le notera $\tilde{\delta}(m)$), et que si l'on décompose m en produit $m_1, m_2 \ldots m_n$ de monômes

à coefficients $\in H$, $\overset{\gamma}{\delta}(m)$ est égal au produit (dans cet ordre) des pré-grades $\overset{\gamma}{\delta}(m_1)$, $\overset{\gamma}{\delta}(m_2)$,...., $\overset{\gamma}{\delta}(m_n)$ de ces monômes (qui sont également grade-associables) quelle que soit la succession de multiplications (si H est unitaire, la condition 1° peut se remplacer par : $[(\theta.X_i)(\theta.X_j)]\ (\theta.X_\ell) = (\theta.X_i)\ [(\theta.X_j)(\theta.X_\ell)]$).

Le coeur C de $H_\theta[\mathfrak{X}]$ est le groupe additif de $\overline{H}\ [\mathfrak{X}]$ engendré par les monômes en $\mathfrak{X}$ à coefficients $\in H$, qui ne sont pas grade-associables (on voit facilement que c'est un idéal bilatère de cet anneau ; mais si $aX_1^{i_1}....X_s^{i_s}$ et $bX_1^{i_1}....X_s^{i_s}$ ne sont pas grade-associables, il peut arriver que $a \# b$ et que $(a + b)\ X_1^{i_1}....X_s^{i_s}$ soit grade-associable ; autrement dit, des monômes $\in C$ peuvent être grade-associables). Si $f \in C$, on lui attribue le grade 0. Si le monôme m n'est pas $\in C$ (donc en particulier) est grade-associable, on pose $\delta(m) = \overset{\gamma}{\delta}(m)$. Les éléments de $H_\theta[\mathfrak{X}]$ sont les sommes f de monômes telles que tous ceux, qui ne sont pas $\in C$, ont un même grade δ, et si $f \notin C$, on pose $\delta(f) = \delta$. On pose $f \# g$, ssi un au moins des f, g est $\in C$ ou $\delta(f) = \delta(g)$, auquel cas leur somme (et différence) formelle est $\in H_\theta[\mathfrak{X}]$ et ce, par définition, leur somme ou différence dans $H_\theta[\mathfrak{X}]$. De même, le produit fg des $f, g \in H_\theta[\mathfrak{X}]$ est le produit formel. On voit aisément que ce biopéroïde est un anel. On peut, évidement, étudier les conditions pour qu'il soit un annéïde.

Ainsi, on voit que la notion d'anel sert pour des buts autres que ceux, qui ont motivé son introduction.

A remarquer que si H est unitaire et $\theta.X$ ($X \in \mathfrak{X}$) est nilpotent, $(\theta.X)^i = 0$ implique seulement $X^i \in C$, et pas $X^i = 0$ ni même, $X \in C$.

3. On appelle un idéaloïde q d'un annéïde ou d'un anel H <u>irréductible</u>

s'il n'est l'intersection $q_1 \cap q_2$ d'aucun couple d'idéaloïdes $q_1 \neq q$, $q_2 \neq q$. Si H est noethérien et commutatif, on démontre par le même raisonnement que pour les idéaux d'un anneau que tout idéaloïde de H est l'intersection d'un ensemble fini d'idéaloïdes irréductibles de H. Mais en théorie des anneaux commutatifs noethériens, on prouve que tout idéal irréductible q est primaire (c'est-à-dire tel que $ab \in q$ et $a \notin q$ implique l'existence d'un exposant i (dépendant de q) tel que $b^i \in q$. Qu'en est-il ici ?

Eh bien, en général ce n'est pas vrai, mais cela devient exact si l'annéïde noethérien est, en plus, fort. On a, en effet, le

Théorème (Chadeyras) : Si H est un annéide commutatif noethérien fort, tout idéaloïde indécomposable q de H est primaire.

Démonstration : Commençons par quelques remarques. Si $A \subseteq H$, notons A_+ l'homogroupoïde additif engendré par A, et si A, B sont $\subseteq H$, notons $A + B$ l'ensemble $\{a + b ; a \in A, b \in B, a \# b\}$. Si $HA \subseteq A$ et si $HB \subseteq B$, on a $H(A + B) \subseteq A + B$. En effet, si $c \in A + B$, on a $c = a + b$, $a \in A$, $b \in B$ et $a \# b$. Dès lors, si $u \in H$, on a $ua \# ub$, $uc = ua + ub \subseteq HA + HB \subseteq A + B$ et $H(A + B) \subseteq A + B$. Enfin, si A et B sont des sous-homogroupoïdes additifs de H, $A + B$ l'est aussi : en effet, si $c \in A + B$, on a $c = a + b$ ($a \in A$, $b \in B$, $a \# b$), donc $-c = -(a + b) = (-a) + (-b) \in A + B$; et si $c' \in A + B$ et $c \# c'$, on a certainement $c + c' \in A + B$ si $c = 0$ ou $c' = 0$. Sinon, on a $c' = a' + b'$ ($a' \in A$, $b' \in B$, $a' \# b'$) et, puisque $c \neq 0$, $c' \neq 0$, on a $a \# c$, $b \# c$, $a' \# c'$, $b' \# c'$, ce qui, puisque $c \# c'$, implique que a, a', b, b', sont tous addibles deux à deux et $c + c' = (a + b) + (a' + b') = (a + a') + (b + b') \subseteq A + B$. Ainsi, si A, B sont des idéaloïdes, $A + B$ l'est aussi. Si $HA \subseteq A$, on a aussi $HA_+ \subseteq A_+$. En effet, tout $a \in A_+$ a la forme $a = \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_s a_s$, ou $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s$ sont égaux

$a + 1$ ou -1, et $a_1, a_2, \ldots, a_s$ sont $\in A$. Mais alors, si $u \in H$, on a $ua = u(\varepsilon_1 a_1) + u(\varepsilon_2 a_2) + \ldots\ldots + u(\varepsilon_s a_s) = \varepsilon_1(ua_1) + \varepsilon_2(ua_2) + \ldots + \varepsilon_s(ua_s) \in A_+$, car $ua_i \in HA \subseteq A$. Aussi, si $HA \subseteq A$, A_+ est un idéaloïde de H. En particulier, si $a \in H$, a engendre deux idéaloïdes principaux (qui se confondent si H est unitaire) : <u>le petit idéaloïde principal</u> $(a) = (Ha)_+$ et <u>le grand idéaloïde principal</u> $((a)) = (Ha)_+ + \underline{Z}a$. Il est évident que le premier est l'idéaloïde, et si $u \in H$, on a $u((a)) = u[(Ha)_+ + \underline{Z}a] = u(Ha)_+ + u\underline{Z}a \subseteq (Ha)_+ + Ha = (Ha)_+ \subseteq ((a))$ et $(\underline{Z}a)_+ = \underline{Z}a$. Comme $-Ha = Ha$, les éléments de $(Ha)_+$ sont les sommes finies quelconques $x_1a + x_2a + \ldots\ldots + x_sa = (x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_s)\,a$, où $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_s$ sont des élements de H (donc $x_1 + x_2 + \ldots + x_s$ en est un du linéarisé $\overline{H}$ de H) tels que $x_1a, x_2a, \ldots\ldots, x_sa$ soient addibles deux à deux, c'est-à-dire que $x_1 + x_2 + \ldots + x_s$ appartiennent à l'agglutiné $H^{(a)}$ de H (considéré comme H-moduloïde) par a (c'est-à-dire par $[a] : x \to ax$). Ainsi, on a $(a) = H^{(a)}a$ et $((a)) = H^{(a)}a + Za$.

Comme d'habitude, si q est un idéaloïde et $A \subseteq H$, on note $(q : A)$ l'ensemble $\{x \in H ; xA \subseteq q\}$. On a donc, pour tout $a \in H$, $(q : \{a^i\}) \subseteq (q : \{a^{i+1}\})$. Donc, si H est noethérien, il existe un entier m tel que $i \geq m$ implique $(q : \{a^i\}) = (q : \{a^m\})$.

Supposons qu'un idéaloïde q d'un annéïde commutatif noethérien et fort H n'est pas primaire et montrons qu'il est décomposable. Puisque q n'est pas primaire, il existe a, $b \in H$ tels que $ab \in q$, $a \notin q$ et, quelque soit l'entier positif i, $b^i \notin q$. Alors, $q_1 = q + ((a))$ et $q_2 = q + (b)$ sont des suridéaloïdes de q, qui le contiennent strictement [car $a \in q + ((a))$ et $b^{i+1} \in Hb^i \subseteq q + (b^i)$].

Si l'on montre que $q_1 \cap q_2 = q$, tout est prouvé. Soit m un entier tel que $(q : \{b^{m+1}\}) = (q : \{b^m\})$ et n un entier tel que $H^{(b^{n+1})} = H^{(b^n)}$ l'entier m existe parce que H est noethérien, et l'entier n parce que H est fort, car, comme on a vu, tout $b \in H$ est alors semi-régulier. Prenons $i = m + n$, et soit $v \in q_1 \cap q_2$. On a donc $v = u_1 + \xi a + ja = u_2 + \eta b^i$ ou $\xi \in H^{(a)}$, $\eta \in H^{(b^i)}$, et $j \in \underline{Z}$, u_1, u_2, $\in q$ et si $v \neq 0$ (ce qu'on peut supposer, car $0 \in q$), tous les u_1, u_2, ξa, ηb^i, ja sont addibles avec v, donc entre eux. On a donc $\xi a + ja - \eta b^i = u_2 - u_1 \in q$, donc aussi $(\xi a + ja - \eta b)\, b = (\xi a)b + jab - \eta b^{i+1} \in qb \subseteq q$. Or, $H^{(ab)} \supseteq H^{(a)}$, donc $(\xi a)b = \xi(ab)$ (la multiplication dans le linéarisé $\overline{H}$ de H) est $\in H^{(ab)}(ab) = (Hab)_+ \subseteq q$ et $jab \subseteq q$ car $ab \in q$, donc $\eta b^{i+1} \in q$. Comme $\eta \in H^{(b^i)} = H^{(b^{n+m})} = H^{(b^n)}$ on a $y = \eta b^n \in H$, $yb^{m+1} = \eta b^{i+1} \in q$. Aussi, $y \in (q : \{b^{m+1}\})$. Mais comme $(q : \{b^{m+1}\}) = (q : \{b^m\})$, on a aussi $y \in (q : \{b^m\})$, donc $\eta b^i = yb^m \in q$ et $v = u_2 + \eta b^i \in q + q = q$, ce qui prouve le théorème.

§ 6 - ANNEAUX GRADUES (ET ANNEIDES) NON-COMMUTATIFS REGULIERS

Les anneaux gradués (et les annéïdes) non commutatifs ont été étudiés par E. Halberstadt dans [4] presque exclusivement dans le cas régulier : en effet, la non-régularité et la non-commutativité créent chacune, en théorie des anneaux gradués, les difficultés si formidables, qu'il paraissait déraisonnable de cumuler ces difficultés dans les premières recherches sur ce sujet. Je vais donc donner l'idée des principaux résultats de [4].

Soit H un annéïde régulier. On peut refaire, en considérant uniquement les H-moduloïdes réguliers, toute la théorie du chap. I de la "Structure of rings" de N. Jacobson, définir les moduloïdes irréductibles les annéïdes primitifs (et simples) le radical de Jacobson R(H)

(qui est ici encore l'intersection des idéaloïdes maximaux de H et coincide, dans le cas artinien, avec le nilradical). Si Δ est le monopère des grades propres de H, et si $\delta \in \Delta$ est idempotent ($\delta^2 = \delta \neq 0$), H_δ est un anneau, dont soit R_δ le radical. Alors, on prouve que R(H) est l'ensemble des $x \in H$ tels que pour tout $\delta \in \Delta$ idempotent, $x H \cap H_\delta \subseteq R_\delta$. L'annéïde H est dit semi-simple si $R(H) = \{0\}$ et on prouve que $H/R(H)$ est semi-simple.

2°) Si H est un annéïde artinien semi-simple, on prouve que H se décompose, d'une manière unique, en somme directe $\bigoplus_{i=1}^{m} H_i$ de ses idéaloïdes H_i simples, c'est-à-dire n'ayant pas d'autre idéaloïde bilatère que $\{0\}$ et lui-même. Mais, contrairement aux anneaux artiniens, H n'est pas toujours unitaire, c'est-à-dire l'anneau gradué $\overline{H}$ n'a pas, en général, d'unité 1 homogène.

3°) Le problème essentiel est donc la détermination de tous les types des annéïdes réguliers, artiniens et simples, partie de l'étude des annéïdes réguliers primitifs. Résumons la théorie correspondante pour les anneaux abstraits. Si A est un anneau, un A-module M est dit irréductible s'il ne possède aucun sous-module autre que lui-même et $\{0\}$ et si $AM \neq \{0\}$. L'anneau A est dit primitif s'il existe un A-module irréductible M tel que la représentation correspondante de A soit fidèle. Tel est le cas si A est simple, c'est-à-dire $\neq R(A)$ et ne possède pas d'autres idéaux bilatères que A et $\{0\}$. Si A est artinien, vice versa, il est simple s'il est primitif. Si M est irréductible $C = \mathrm{End}_A M$ est un corps (en général, non commutatif) dit le centralisateur de M, et M peut s'identfier avec un C-espace vectoriel, qui est de dimension finie n si A est artinien. Et on prouve (le théorème de densité de Jacobson) que A est isomorphe à un sous-anneau de $\mathrm{End}_C(M)$, qui y est dense par rapport à la topologie finie. En particulier, si A est

artinien et simple, il est isomorphe à $End_C(M)$, c'est-à-dire à l'anneau $M_n(C)$ des matrices de degré n sur C.

Si on remplace les anneaux et les modules par les annéïdes et moduloïdes réguliers en maintenant les mêmes définitions, il se trouve que, si le H-moduloïde régulier (ou H est un anneïde régulier) M est irréductible, $C = End_H(M)$ convenablement défini est un corpoïde et que M peut être identifié à un C-espace vectoriel régulier qui est de dimension finie quand H est artinien. Mais $End_C(M)$ n'est pas, en général, un annéïde. L'image de A dans M est un sous-ensemble de $End_C(M)$, qui est un annéïde par rapport à la multiplication habituelle d'auto-applications et l'addition partielle induite (par transport) sur M par celle de A, mais qu'il reste à caractériser en termes de $End_C(M)$. La clôture, par rapport à la topologie finie, de cette image, est encore un sous-ensemble de $End_C(M)$, qui est un annéïde du type analogue, et coïncide avec cette image si (M : C) est fini. Mais, contrairement au cas des anneaux abstraits, cette clôture (pour C et M fixés) n'est pas unique (= $End_C(M)$), mais peut dépendre du choix de A, et la famille de toutes ces clôtures possibles se caractérise comme suit :

Soient C un corpoïde, M un C-espace vectoriel régulier, $(\Delta,D,\delta d)$ la graduation stricte de M, $D=\dot{\cup}\theta$ la partition de Δ-intransitivité de D, $M = \dot{\oplus} M_\theta$ la décomposition directe disjointe correspondante de M (où $M_\theta^* = \{x \in M ; x = 0$ ou $\delta(x) \in \theta\}$. Si θ,θ' sont deux domaines de Δ-transitivité $\subseteq D$, soit $P_{\theta',\theta}$ l'ensemble des quasi-homomorphismes $f : M \longrightarrow M$ de l'espace vectoriel M dans lui-même tels que $f.M_\theta \subseteq M_{\theta'}$ et que $f.x = 0$ si $x \notin M_\theta$. Posons $P_C(M) = \dot{\cup} P_{\theta',\theta'}$, la réunion étant étendue à tous les couples possible (θ,θ'). Si f,g sont $\in P_C(M)$, on posera $f \# g$ ssi, pour tout $x \in M$, on a $f(x) \# g(x)$ et, en plus, $f+g : x \longrightarrow f(x)+g(x)$ appartient à $P_C(M)$, auquel cas on pose $f+g = f\dot{+}g$. La condition précédente implique d'ailleurs que si $f \# g$, f et g appartiennent

à un même $P_{\theta',\theta}$. On pose, comme toujours $fg = f \circ g$ (notation de Bourbaki). On voit, d'ailleurs, que si $g \in P_{\theta',\theta}$ et $f \in P_{\tau',\tau}$, on a $fg = 0$ si $\tau \neq \theta'$ et $fg \in P_{\tau',\theta}$ si $\tau = \theta'$. On constate que $P = P_C(M)$ est un annéïde régulier, ayant M comme moduloïde de représentation irréductible avec C comme centralisateur. Halberstadt démontre que la famille de toutes les clôtures cherchées est celle des agglutinés stricts de cet annéïde (produit, bien entendu, par ses quasi-homomorphismes d'annéïde, et pas par ceux de sa structure de P-moduloïde).

Il y a, dans cette théorie, beaucoup de problèmes non-résolus, et aussi beaucoup de directions et de généralisations possibles - bien qu'ayant déjà donné des résultats profonds, elle n'est, au fond, qu'à ses débuts. En ce moment, un livre consacré aux anneaux gradués généraux, écrit par moi-même, M. Chadeyras et E. Halberstadt est en préparation, que nous espérons terminer au cours de la présente année scolaire. Ce livre doit paraître, peut-être en 1982-1983, dans "Queen's papers in pure and applied Mathematics", édités à Kingston (Ontario, Canada).

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Chap. II, 3e édit., Paris, Hermann, 1962.

[2] M. CHADEYRAS, *Essai d'une théorie noetherienne pour les anneaux commutatifs, dont la graduation est aussi générale que possible*, Bull. de la S.M.F., Supplément, Mémoire n° 22, Paris 1970.

[3] C. CHEVALLEY, *The construction and Study of certain important algebras*, Publ. of the Math. Soc. of Japan 1. Tokyo 1955.

[4] E. HALBERSTADT, *Théorie artinienne homogène des anneaux gradués aux grades non commutatifs réguliers* (Thèse de doctorat d'Etat, miméographiée, soutenue en 1971, Paris VI, sera publiée comme Chap. III de [15]).

[5] M. KRASNER, *Une généralisation de la notion de corps-corpoïde. Un corpoïde remarquable de la théorie des corps valués*, Comptes Rendus, t. 219 (1944), p. 345-347.

[6] M. KRASNER, *Hypergroupes moduliformes et extramoduliformes*, Compte Rendus, t. 219 (1944), p. 473-476.

[7] M. KRASNER, *Théorie de la ramification dans les extensions finies des corps valués : Hypergroupe d'inertie et de ramification ; théorie extrinsèque de la ramification*, Comptes Rendus, t. 220 (1945), p. 28-30.

[8] M. KRASNER, *Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps valués complets*, Algèbre et théorie des nombres (Colloque Int. du C.N.R.S. n° 24, Paris 1949), Edit. C.N.R.S., Paris 1950.

[9] M. KRASNER, *Congruences multiplicatives. Squelettes et corpoïdes*, Séminaire Krasner, 1953-54, Vol. 1, exposé n°4, Secrétariat Math. de la Fac. des Sc. Paris.

[10] M. KRASNER, *Théorie élémentaire des corpoïdes commutatifs sans torsion*, Séminaire Krasner, 1953-54, Vol. 2, exposé n° 5, Secrétariat Math. de la Fac. des Sc., Paris 1956.

[11] M. KRASNER, *Théorie de Galois des corpoïdes commutatifs sans torsion et ses applications à la théorie de la ramification des extensions algébriques des corps valués*, preprint de l'Univ. de Paris VI (Paris 1978).

[12] A. KOUROCH , *Théorie des groupes* (en russe), 3e édition, Edit "Naouka", Moscou 1967 (voir Chap. 9, § 35).

[13] P. RIBENBOIM, *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Univ. de Montréal, Montréal 1968.

[14] P. SAMUEL et O. ZARISKI, *Commutative Algebra*, Vol. II, D. van Nostrand Co, Princeton 1960.

En préparation :

[15] M. CHADEYRAS, E. HALBERSTADT, M. KRASNER, *Anneaux gradués généraux (General graded rings)* pour les "Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics", Kingston (Ontario), Canada.