

EMMANUEL LESIGNE

**Existence et unicité d'une probabilité invariante pour
des translations aléatoires de \mathbb{R}^m**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , exp. n° 6, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979__1_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EXISTENCE ET UNICITE D'UNE PROBABILITE INVARIANTE POUR DES TRANSLATIONS ALEATOIRES DE \mathbb{R}^m

Emmanuel LESIGNE

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$
 p_1, p_2, \dots, p_n des fonctions mesurables de \mathbb{R}^m dans
[0,1] telles que $\sum_{i=1}^n p_i \equiv 1$

On considère l'opérateur markovien P défini par :

$$Pf(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) f(x+a_i)$$

Ceci correspond au problème physique d'une particule se déplaçant dans l'espace en passant du point x au point $x + a_i$ avec une probabilité $p_i(x)$.

On s'intéresse ici à l'existence et l'unicité d'une probabilité invariante pour l'opérateur P . Ce faisant, on étend au cas multidimensionnel des résultats de F. Norman.

1. EXISTENCE

Proposition :

Si A est une partie de \mathbb{R}^m on a équivalence entre :

- i) $\forall K > 0, \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \cdot \alpha \leq K\}$ est un compact.
- ii) Il n'existe pas d'hyperplan de \mathbb{R}^m tel que A soit contenue dans un demi-espace fermé défini par cet hyperplan.
- iii) Il n'existe pas de forme linéaire non nulle sur \mathbb{R}^m dont la restriction à A soit positive ou nulle.

Définition :

Une telle partie finie A sera dite bien répartie. On peut remarquer qu'une partie bien répartie a au moins $(m+1)$ éléments. Un exemple de famille bien répartie est :

si (e_1, \dots, e_m) est une base de \mathbb{R}^m , on pose $A = \{e_1, \dots, e_m, -e_1, \dots, -e_m\}$.
 Posons $W(x) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(x)$

Théorème d'existence

Si les p_i sont continues et si il existe une partie bien répartie A de \mathbb{R}^m telle que : $\forall \alpha \in A, \exists M, \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m, x \cdot \alpha > M \Rightarrow W(x) \cdot \alpha < -\epsilon$. Alors il existe une probabilité P-invariante.

Remarque : la condition ci-dessus énoncée est du type "l'infini est réfléchissant" pour la chaîne de Markov. En dimension 1 elle se traduit par : $\limsup_{x \rightarrow +\infty} W(x) < 0$ et $\liminf_{x \rightarrow +\infty} W(x) > 0$

Preuve du théorème :

Soit $\alpha \in A$

pour $\lambda > 0$, on considère la fonction $x \rightarrow e^{\lambda(x-\alpha)}$

$$P(e^{\lambda(x-\alpha)}) = F_\alpha(x, \lambda) e^{\lambda(x-\alpha)} \text{ avec } F_\alpha(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i(x) e^{\lambda(a_i - \alpha)}$$

$$F_\alpha(x, \lambda) = 1 + \lambda(W(x) \cdot \alpha) + \lambda^2 g_\alpha(x, \lambda) \text{ avec } g_\alpha(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (a_i \cdot \alpha)^{k+2}}{(k+2)!}$$

$$\text{Pour } \lambda \leq 1, |g_\alpha(x, \lambda)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i(x) (a_i \cdot \alpha)^2 e^{|a_i \cdot \alpha|} \leq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq n} (a_i \cdot \alpha)^2 e^{|a_i \cdot \alpha|} = G_\alpha$$

On sait que : $\exists M, \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}^m, x \cdot \alpha > M \Rightarrow W(x) \cdot \alpha < -\epsilon$

Donc pour $x \cdot \alpha > M$ et $\lambda < \epsilon/2G, 1$ on a :

$$F_\alpha(x, \lambda) \leq 1 - \lambda\epsilon + \lambda^2 G \leq 1 - \lambda \frac{\epsilon}{2} = C_\alpha(\lambda)$$

$$C_\alpha(\lambda) < 1$$

$$\text{Pour } x \cdot \alpha \leq M, \text{ on a : } P(e^{\lambda(x-\alpha)}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} e^{\lambda[(x+a_i) \cdot \alpha]} \leq \max_{1 \leq i \leq n} e^{\lambda[(M+a_i) \cdot \alpha]} = D_\alpha(\lambda)$$

Pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda < \epsilon/2G, 1$ on a : $P(e^{\lambda(x-\alpha)}) \leq C_\alpha(\lambda) e^{\lambda(x-\alpha)} + D_\alpha(\lambda)$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P^k(e^{\lambda(x-\alpha)}) \leq C_\alpha(\lambda) P^{k-1}(e^{\lambda(x-\alpha)}) + D_\alpha(\lambda)$$

$$\text{d'où } \forall k \in \mathbb{N}^* P^k(e^{\lambda(x-\alpha)}) \leq \frac{D_\alpha(\lambda)}{1 - C_\alpha(\lambda)} + C_\alpha(\lambda) e^{\lambda(x-\alpha)}$$

Fixons λ suffisamment petit et $x \in \mathbb{R}^m$.

Posons $f_\alpha(y) = e^{\lambda(y-\alpha)}$ et $E_\alpha = \frac{D_\alpha(\lambda)}{1 - C_\alpha(\lambda)} + C_\alpha(\lambda) e^{\lambda(x-\alpha)}$

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P^k(f_\alpha)(x) \leq E_\alpha$

On définit une suite de probabilités par $\mu_k = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k \epsilon_x P^l$ ($k > 0$)
 où ϵ_x est la probabilité de Dirac au point x .

On a : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mu_k(f_\alpha) = \frac{1}{k} \sum_{l=1}^k P^l(f_\alpha)(x) \leq E_\alpha$

Soit $\eta > 0$. $\exists a_\alpha > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^m$, $y \cdot \alpha > a_\alpha \Rightarrow f_\alpha(y) \geq \frac{E_\alpha}{\eta}$

$$E_\alpha \geq \mu_k(f_\alpha) \geq \frac{E_\alpha}{\eta} \mu_k \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \cdot \alpha > a_\alpha\}$$

d'où $\mu_k \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \cdot \alpha > a_\alpha\} \leq \eta$ ($k > 0$)

Finalelement :

$\forall \alpha \in A$, $\forall \eta > 0$, $\exists a_\alpha > 0$, $\forall k > 0$, $\mu_k \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \cdot \alpha > a_\alpha\} \leq \eta$

soit $a = \max_{\alpha \in A} a_\alpha$

$\forall \eta > 0$, $\exists a > 0$, $\forall k > 0$, $\mu_k \left[\bigcup_{\alpha \in A} \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \cdot \alpha > a\} \right] < \eta \cdot \text{card } A$

$\forall \eta' > 0$, $\exists a > 0$, $\forall k' > 0$, $\mu_{k'} \left[\bigcup_{\alpha \in A} \{y \in \mathbb{R}^m \mid y \cdot \alpha \leq a\} \right] \geq 1 - \eta'$

d'où d'après l'hypothèse :

$\forall \eta' > 0$, $\exists c$ compact, $\forall k > 0$, $\mu_k(c) \geq 1 - \eta'$

c'est-à-dire que la suite $(\mu_k)_{k > 0}$ est équitendue, et donc vaguement relativement compacte. On peut en extraire une suite (μ_{n_k}) convergeant vaguement vers une probabilité μ . Les P_j étant continues, on a :
 f continue bornée $\Rightarrow P f$ continue bornée. Donc $\mu_{n_k} P$ converge vaguement vers μP .

Or $\mu_{n_k} P - \mu_{n_k}$ converge vers 0. d'où $\mu P = \mu$

On a ainsi trouvé une probabilité invariante.

2. UNICITE

On suppose à présent que :

$$\begin{cases} n = m+2 \\ a_{m+2} = 0 \\ P_1, \dots, P_{m+1} > 0 \end{cases}$$

Théorème d'unicité

Si le semi-groupe engendré par $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ est dense dans \mathbb{R}^m , alors il existe au plus une probabilité P -invariante et, si elle existe, elle est équivalente à la mesure de Lebesgue.

Proposition 1 :

Soient $a_1, \dots, a_{m+1} \in \mathbb{R}^m$; $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^m)$

On pose

$$D(a_1, \dots, a_m) = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ a_2^1 & & & \vdots \\ \vdots & & & a_m^m \\ a_m^1 & \dots & & a_m^m \end{vmatrix} = D_{m+1}$$

On définit de même : $D_i = D(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{m+1})$
($1 \leq i \leq m$)

On a : Les a_i engendrent un sous-groupe dense de \mathbb{R}^m si et seulement si les D_i ($1 \leq i \leq m+1$) sont algébriquement indépendants.

Proposition 2 :

Soient $a_1, \dots, a_{m+1} \in \mathbb{R}^m$

Les a_i engendrent un semi-groupe dense de \mathbb{R}^m si et seulement s'ils engendrent un sous-groupe dense de \mathbb{R}^m et $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ est bien répartie.

Preuve du théorème : elle se fait en trois étapes :

- a) toute probabilité invariante est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ .
- b) toute probabilité invariante est équivalente à λ .
- c) unicité.

a) Soit μ une probabilité invariante.

Soit f une fonction vérifiant $f(x) = f(x+a_i)$ ($x \in \mathbb{R}^m$, $i=2, \dots, m+1$) (1)

On a :

$$\int f(x) d\mu(x) = \int P f(x) d\mu(x) = \int \sum_{i=1}^{m+1} P_i(x) \cdot f(x+a_i) d\mu(x) =$$

$$\int P_1(x) f(x+a_1) d\mu(x) + \int \left(\sum_{i=2}^{m+1} P_i(x) \right) f(x) d\mu(x) =$$

$$\int P_1(x) f(x+a_1) d\mu(x) + \int f(x) d\mu(x) - \int P_1(x) f(x) d\mu(x)$$

D'où :

$$\int f(x+a_1) P_1(x) d\mu(x) = \int f(x) P_1(x) d\mu(x)$$

La mesure $P_1 \cdot \mu$ sur $G = \frac{\mathbb{R}^m}{\sum_{i=2}^{m+1} a_i \mathbb{Z}}$ est invariante par la rotation

$$g \rightarrow g + a_1$$

Le semi-groupe engendré par $\{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ étant dense dans

\mathbb{R}^m , on a :

- (a_2, \dots, a_{m+1}) est une base de \mathbb{R}^m , et donc G est un groupe compact.

- $\{k a_1 \text{ mod } (a_2, \dots, a_{m+1}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans G .

La rotation $g \rightarrow g + a_1$ est donc uniquement ergodique.

La mesure $P_1 \cdot \mu$ sur G est proportionnelle à la mesure de Lebesgue.

C'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) P_1(x) d\mu(x) = \text{cste} \times \int_{\sum_{i=2}^{m+1} [0, a_i[} f(x) dx \quad (2)$$

Supposons : il existe B borélien de \mathbb{R}^m vérifiant : $\lambda(B) = 0$

et $\mu(B) > 0$. Alors $\exists n_2, \dots, n_{m+1} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$B' = B \cap \prod_{i=2}^{m+1} [n_i a_i, (n_i+1)a_i[\text{ vérifie :}$$

$$\lambda(B') = 0 \text{ et } \mu(B') > 0 .$$

$$\text{On pose } B'' = \bigsqcup_{k_2, \dots, k_{m+1} \in \mathbb{Z}} (B' + k_2 a_2 + \dots + k_{m+1} a_{m+1})$$

1_B vérifie (1), donc (2).

D'où : $0 = \int_{B''} P_1(x) d\mu(x)$; impossible car $P_1 > 0$ et $\mu(B'') > 0$

conclusion : $\mu \ll \lambda$

b) Soit $g = \frac{d\mu}{d\lambda}$ et $A_0 = \{g > 0\}$

On a : $\mu(A_0) = 1$

$$\left. \begin{aligned} \mu P(1_{A_0}) &= \mu(A_0) = 1 \\ P(1_{A_0}) &\leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(1_{A_0}) = 1 \quad \mu\text{-p.p.}$$

On définit par récurrence : $A_{n+1} = A_n \cap \{x | P(1_{A_n})(x) = 1\}$ ($n \geq 0$)

On vérifie facilement par récurrence que $\mu(A_n) = 1$

Posons $A = \bigcap_{n \geq 0} A_n$.

On a : $\mu(A) = 1$

$$x \in A \Rightarrow \forall n \geq 0, x \in A_{n+1} \Rightarrow \forall n \geq 0 P(1_{A_n})(x) = 1 \Rightarrow$$

$$P(1_A)(x) = 1$$

Notons S le semi-groupe engendré par a_1, a_2, \dots, a_{m+1} .

P_1, \dots, P_{m+1} étant strictement positives, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in A, P(1_A)(x) = 1 &\Rightarrow \forall x \in A, x + a_i \in A \quad (i=1, \dots, m+1) \\ &\Rightarrow \forall x \in A, \forall s \in S, x+s \in A \end{aligned}$$

$$\mu(A) = 1 \Rightarrow \lambda(A) > 0$$

Il existe K compact de \mathbb{R}^m tel que $\lambda(A \cap K) > 0$.

$$\forall s \in S, A^c \cap ((A \cap K) + s) = \emptyset$$

$$\forall s \in S, \int_{A^c} 1_{A \cap K}(y-s) dy = 0$$

Or $\int_{A^c} 1_{A \cap K}(y-x) dy$ est une fonction continue de x (il suffit pour le voir d'approcher $1_{A \cap K}$ par des fonctions continues à support compact).

Cette fonction continue s'annule sur S, donc sur tout \mathbb{R}^m

D'où :

$$0 = \iint_{A^c} 1_{A \cap K} (y-x) dy dx = \int_{A^c} \int 1_{A \cap K} (y-x) dx dy = \lambda(A \cap K) \lambda(A^c)$$

on en déduit : $\lambda(A^c) = 0$

Or $A_0 \supset A$; $\lambda(A_0^c) = 0$ c'est-à-dire $g > 0$ λ -p.p.

conclusion : $\mu \sim \lambda$

c) Soient μ et ν deux probabilités invariantes.

Supposons $\mu \neq \nu$

On a alors $(\mu-\nu)^+$ et $(\mu-\nu)^-$ sont deux mesures finies non nulles.

$$\begin{aligned} (\mu-\nu)P &= \mu-\nu = (\mu-\nu)^+ - (\mu-\nu)^- \\ (\mu-\nu)P &= (\mu-\nu)^+P - (\mu-\nu)^-P \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (\mu-\nu)^+ &\leq (\mu-\nu)^+P \\ (\mu-\nu)^- &\leq (\mu-\nu)^-P \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} (\mu-\nu)^+P(1) &= (\mu-\nu)^+(1) & \text{donc} & & (\mu-\nu)^+ &= (\mu-\nu)^+P \\ (\mu-\nu)^-P(1) &= (\mu-\nu)^-(1) & & & (\mu-\nu)^- &= (\mu-\nu)^-P \end{aligned}$$

Ceci est impossible car $(\mu-\nu)^+$ et $(\mu-\nu)^-$ qui sont mutuellement singulières ne peuvent être toutes deux équivalentes à la mesure de Lebesgue.

D'où l'unicité de la mesure P -invariante.

Démonstration de la proposition 1 :

Si a_1, \dots, a_{m+1} engendrent un sous-groupe dense de \mathbb{R}^m , on a nécessairement que a_1, \dots, a_m est une base de \mathbb{R}^m .

$$G = \frac{\mathbb{R}^m}{a_1\mathbb{Z} + \dots + a_m\mathbb{Z}} \text{ est un groupe compact.}$$

Le groupe engendré par a_1, \dots, a_{m+1} est dense dans \mathbb{R}^m si et seulement si la rotation induite par a_{m+1} sur G est ergodique. Pour cela, il faut et il suffit que $\forall \chi$ caractère de G , $\chi(a_{m+1}) = 1 \Rightarrow \chi \equiv 1$ les caractères de G sont les $\chi \rightarrow e^{2\pi i(\alpha \cdot x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^m$ tel que $\alpha_i, a_i \in \mathbb{Z}$ pour $1 \leq i \leq m$.

On a donc :

Le groupe engendré par a_1, \dots, a_{m+1} est dense dans \mathbb{R}^m si et seulement si la seule solution du système $[\alpha \cdot a_i \in \mathbb{Z} \text{ pour } 1 \leq i \leq m+1]$ est $\alpha = 0$.

Notons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ et considérons le système (1) : $\alpha \cdot a_i = k_i$ $1 \leq i \leq m+1$.

On note $D(i, k)$ le déterminant obtenu en remplaçant dans D_{m+1} la i ème colonne par $\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$ ($1 \leq i \leq m$)

le système (2) : $\alpha \cdot a_i = k_i$ $1 \leq i \leq m$ est un système de Cramer qui admet pour unique solution :

$$\alpha_i = \frac{D(i, k)}{D_{m+1}} \quad 1 \leq i \leq m$$

le système (1) est donc équivalent à :

$$\alpha_i = \frac{D(i, k)}{D_{m+1}} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad \alpha \cdot a_{m+1} = k_{m+1}$$

soit

$$\alpha_i = \frac{D(i, k)}{D_{m+1}} \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m a_{m+1}^i D(i, k) = k_{m+1} D_{m+1}$$

un calcul de déterminants montre que : $\sum_{i=1}^m a_{m+1}^i D(i, k) = - \sum_{i=1}^m k_i D_i$

le système (1) a donc une solution si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{m+1} k_i D_i = 0$$

Conclusion : le groupe engendré par (a_1, \dots, a_{m+1}) est dense dans \mathbb{R}^m si et seulement si les D_i sont algébriquement indépendants.

Démonstration de la proposition 2

Soient $a_1, \dots, a_{m+1} \in \mathbb{R}^m$ tels que

- ils engendrent un sous-groupe dense de \mathbb{R}^m
- il n'existe pas d'hyperplan de \mathbb{R}^m tel que tous les a_i appartiennent

à un même demi-espace fermé défini par cet hyperplan.

Montrons tout d'abord:

il existe $(m+1)$ suites croissantes (strict.) de \mathbb{N} $(n_k^1)_{k \geq 0}, \dots, (n_k^{m+1})_{k \geq 0}$

telles que :

la suite $(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a^i)_{k \geq 0}$ est convergente.

Posons, pour $x \in \mathbb{R}^m$ $f(x) = \inf_{1 \leq i \leq m+1} (x \cdot a_i)$

f est continue.

$x \neq 0 \Rightarrow f(x) < 0$ d'après l'hypothèse.

f admet donc un minimum $-n (< 0)$ sur la sphère unité.

Soit $K_1 = \sup_{1 \leq i \leq m+1} \frac{\|a_i\|^2}{n}$ et $K_2 = \inf_{1 \leq i \leq m+1} \|a_i\|^2$

soit $x \in \mathbb{R}^m$ tel que $\|x\| > K_1$

$\exists b_1 \in \{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ tel que $x \cdot b_1 < -n \|x\|$

$$\begin{aligned} \|x+b_1\|^2 &= \|x\|^2 + \|b_1\|^2 + 2x \cdot b_1 < \|x\|^2 + \|b_1\|^2 - 2n\|x\| \\ &< \|x\|^2 + \|b_1\|^2 - 2nK_1 \leq \|x\|^2 + \|b_1\|^2 - 2\|b_1\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \|b_1\|^2 \leq \|x\|^2 - K_2 \end{aligned}$$

Donc : dès que $\|x\| > K_1$

$\exists b_1 \in \{a_1, \dots, a_{m+1}\}$ tel que $\|x+b_1\|^2 \leq \|x\|^2 - K_2$

Notons S le semi-groupe engendré par les a_i

On déduit de ce qui précède que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \exists s \in S, \|x+s\| \leq K_1$$

On définit une suite $(s_k)_{k \geq 0}$ dans S par récurrence :

$$s_0 = 0$$

s_k étant obtenu, on pose $s'_k = s_k + a_1 + a_2 + \dots + a_{m+1}$

on choisit $s''_k \in S$ tel que $\|s'_k + s''_k\| \leq K_1$

$$\text{et on pose } s_{k+1} = s'_k + s''_k$$

La suite $(\hat{s}_k)_{k \geq 0}$ ainsi définie est bien de la forme $(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i)_{k \geq 0}$ avec les $(n_k^i)_{k \geq 0}$ strictement croissantes.

Cette suite est contenue dans le compact de $\mathbb{R}^m: \{x \mid \|x\| \leq K_1\}$.
On peut donc en extraire une sous-suite convergente qui vérifie bien le résultat souhaité.

Appelons a la limite de la suite $(\sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i)_{k \geq 0}$ ainsi obtenue.

Soit $x \in \mathbb{R}^m$ et $\epsilon > 0$.

On va approcher x-a par un élément du groupe dense engendré par les

$a_i : \exists g_1, \dots, g_{m+1} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\|x - a - (g_1 a_1 + \dots + g_{m+1} a_{m+1})\| < \frac{\epsilon}{2}$$

d'autre part :

$$\exists k_0 \geq 0 \text{ tel que } k \geq k_0 \Rightarrow \|a - \sum_{i=1}^{m+1} n_k^i a_i\| < \frac{\epsilon}{2}$$

et pour $1 \leq i \leq m+1$

$$\exists k_i \geq 0 \text{ tel que } k \geq k_i \Rightarrow z_i + n_k^i \geq 0$$

on choisit $k = \max(k_0, k_1, \dots, k_{m+1})$

on a :

$$\|x - [(z_1 + n_k^1) a_1 + \dots + (z_{m+1} + n_k^{m+1}) a_{m+1}]\| \leq$$

$$\|x - (z_1 a_1 + \dots + z_{m+1} a_{m+1}) - a\| + \|a - (n_k^1 a_1 + \dots + n_k^{m+1} a_{m+1})\| \leq \epsilon$$

et $(z_1 + n_k^1) a_1 + \dots + (z_{m+1} + n_k^{m+1}) a_{m+1} \in S$.

Conclusion : S est dense dans \mathbb{R}^m .

REFERENCES

- M.F. NORMAN : Markov processes and learning models - Academic Press (1972).
- B. JAMISON et R. SINE : Uniqueness of invariant measure for two random translations (1975).