

EMILE LE PAGE

Calcul des probabilités - Théorème des grands écarts et théorème de la limite centrale pour certains produits de matrices aléatoires

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , exp. n° 5, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979__1_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CALCUL DES PROBABILITES. - *Théorème des grands écarts et théorème de la limite centrale pour certains produits de matrices aléatoires.*
 Note(*) d'Emile LE PAGE transmise par

Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$, indépendantes et de même loi p à support compact ; on suppose de plus que le sous groupe fermé G_p engendré par le support de p est non compact et a ses sous groupes d'indice fini irréductibles. Notant $\|\cdot\|$ une mesure quelconque sur $\mathbb{R}^2$, on étudie pour $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ la suite de variables aléatoires $(\text{Log} \|g_n g_{n-1} \dots g_1 x\|)_{n \geq 1}$. On établit un théorème des grands écarts puis un théorème de la limite centrale.

Let $(g_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of independent, identically distributed random variables with values in $SL(2, \mathbb{R})$, having a distribution with compact support ; moreover we suppose that the closed group G_p generated by the support of p is non compact and such that no subgroup of G_p of finite index is reductible. If $\|\cdot\|$ is some norm on $\mathbb{R}^2$ we study for all $x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ the sequence of random variables $(\text{Log} \|g_n g_{n-1} \dots g_1 x\|)_{n \geq 1}$. We prove a theorem of large deviations, and a central limit theorem.

§1 - Résultats préliminaires

1-1 Considérons une probabilité p à support compact S_p portée par $SL(d, \mathbb{R})$, $d \geq 1$. Nous supposerons de plus que p admet une unique probabilité invariante ν sur l'espace projectif $P(\mathbb{R}^d)$ (condition (U)). Des conditions suffisantes sur le support de p pour que (U) soit réalisé sont données dans [3] et [5]. En particulier si le semi groupe fermé T_p engendré par le support de p est égal à $SL(d, \mathbb{R})$ ou si T_p est un réseau (U) est vérifiée.

Soit maintenant $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi p et soit $(P(x, \cdot))_{x \in P(\mathbb{R}^d)}$ la probabilité de transition définie de $P(\mathbb{R}^d)$ dans les boréliens de $P(\mathbb{R}^d)$ par

$$P(x, A) = \int_A (g \cdot x) p(dg)$$

Notons de plus σ l'application de $SL(d, \mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\sigma(g, \bar{u}) = \frac{\|g \bar{u}\|}{\|\bar{u}\|}$$

$g \in SL(d, \mathbb{R})$, $\bar{u} \in P(\mathbb{R}^d)$ étant l'image dans $P(\mathbb{R}^d)$ de $u \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ et $\|\cdot\|$ étant une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$.

Avec ces notations nous pouvons énoncer la

Proposition 1

Soit p une probabilité à support compact portée par $SL(d, \mathbb{R})$ et satisfaisant à la condition (U), alors la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{n} E \log \|g_n \dots g_1 x\|$ converge uniformément sur $S_{d-1} = \{x / \|x\| = 1\}$ vers $\gamma = \iint_{SL(d, \mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^d)} \log \sigma(g, \bar{u}) p(dg) \nu(d\bar{u})$

Démonstration

La proposition 1 résulte du fait que pour toute suite $(u_n)_{n \geq 1} \in P(\mathbb{R}^d)$ la suite de probabilités $(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p^k(u_n, \cdot))_{n \geq 1}$ converge vaguement vers ν , car toute valeur d'adhérence de cette suite est une probabilité p invariante et est donc égale à ν .

1-2 On suppose désormais que $d=2$. On définit sur $P(\mathbb{R}^2)$ la distance δ compatible avec la topologie de $P(\mathbb{R}^2)$

$$\delta(\bar{x}, \bar{y}) = |\sin \theta(x, y)| \quad \bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^2) \quad x, y \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$$

$$\text{où } \theta(x, y) = |\arg x - \arg y| \quad 0 \leq \arg x < 2\pi$$

$$0 \leq \arg y < 2\pi$$

On considère également l'opérateur P_λ , $\lambda \geq 0$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(P(\mathbb{R}^2))$ des fonctions continues sur $P(\mathbb{R}^2)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $P(\mathbb{R}^2)$, défini par

$$P_\lambda f(\bar{x}) = \int \frac{1}{\|\sigma(g, \bar{x})\|^\lambda} f(g \bar{x}) p(dg) \quad \bar{x} \in P(\mathbb{R}^2) \\ f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^2))$$

Alors

THEOREME 1

Soit p une probabilité à support compact portée par $SL(2, \mathbb{R})$ telle que le groupe fermé G_p engendré par le support de p soit non compact et ait ses sous groupes d'indice fini irréductibles, et telle que la condition (U) soit satisfaite ; et soit $(g_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi p , alors

1°) Il existe un $\lambda_0 > 0$ telle que pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$ la norme spectrale de l'opérateur P_λ soit strictement inférieure à 1

2°) $\lim_n \left[\sup_{\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^2)} E \delta(g_n \dots g_1 \bar{x}, g_n \dots g_1 \bar{y}) \right]^{1/n} = \rho < 1$

Démonstration

Le 1°) se déduit de ce que pour $n \geq 0$ et $\bar{x} \in P(\mathbb{R}^2)$ on a

$$\frac{d}{d\lambda} [P^n 1(\bar{x})] \Big|_{\lambda=0} = -E \text{Log} \|g_n \dots g_1 \bar{x}\|$$

et ce que pour n assez grand $\inf_{x \in S_1} E \text{Log} \|g_n g_{n-1} \dots g_1 x\| > 0$

ici résultant de la proposition 1 et du fait que d'après le théorème (8-6) de [2]

$$\gamma = \iint_{SL(2, \mathbb{R}) \times P(\mathbb{R}^2)} \text{Log} \sigma(g_2 \bar{u}) p(dg) \nu(d\bar{u}) > 0$$

Le 2°) se déduit du 1°) à l'aide des inégalités

$$\delta(g\bar{x}, g\bar{y}) \leq [\delta(gx, gy)]^\lambda \leq \frac{[\delta(\bar{x}, \bar{y})]^\lambda}{\|gx\|^\lambda \|gy\|^\lambda}$$

$$\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^2) \quad x, y \in S_1 \quad 0 < \lambda < 1$$

et de l'inégalité de Schwartz.

Avant d'énoncer 2 corollaires donnons quelques notations. Pour $0 < \lambda \leq 1$ et pour toute fonction f bornée sur $P(\mathbb{R}^2)$ nous définissons

$$m_\lambda(f) \text{ par : } m_\lambda(f) = \sup_{\bar{x}, \bar{y} \in P(\mathbb{R}^2)} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{y})}{[\delta(\bar{x}, \bar{y})]^\lambda}$$

$$\text{et } \mathcal{L}_\lambda = \{f / \|f\|_\lambda = \sup_{x \in P(\mathbb{R}^2)} |f(x)| + m_\lambda(f) < +\infty\}$$

$\mathcal{L}_\lambda$ est une algèbre de Banach unitaire muni de la norme $\|\cdot\|_\lambda$.

On a alors

Corollaire 1

Sous les hypothèses du théorème 1 il existe un $0 < \lambda_0 \leq 1$ tel que pour tout $0 < \lambda \leq \lambda_0$ il existe un réel $0 < \rho_1 < 1$ et un entier N_1 tels que $\forall f \in \mathcal{C}_\lambda$ $\forall n \geq N_1$ $\forall m \geq 0$ on ait les inégalités :

$$m_\lambda(P^n f) \leq m_\lambda(f) \rho_1^n$$

et $\sup_{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^2)} |P^{n+m} f(\bar{x}) - P^n f(\bar{x})| \leq m_\lambda(f) \rho_1^n$

Corollaire 2

Sous les hypothèses du théorème 1 pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(P(\mathbb{R}^2))$

$$\lim_n \sup_{\bar{x} \in P(\mathbb{R}^2)} |P^n f(\bar{x}) - v(f)| = 0$$

§2 - Un théorème des grands écarts

On énonce un théorème de grands écarts pour une chaîne semi-markovienne puis nous l'appliquons au cas d'une marche aléatoire sur $SL(2, \mathbb{R})$.

2-1 Soient un espace compact X à base dénombrable, P une probabilité de transition de X dans les boréliens $\mathcal{B}_X$ de X , F une probabilité de transition de $X \times X$ dans les boréliens $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$. On considère une chaîne semi markovienne (X_n, U_n) à valeurs dans $X \times \mathbb{R}$ de probabilité de transition $\tilde{Q}$ définie par

$$\tilde{Q}(x, u, A, B) = \tilde{Q}(x, 0, A, B) = Q(x, A, B) = \int_X P(x, dy) 1_A(y) \int_{\mathbb{R}} 1_B(\lambda) F(d\lambda, x, y)$$

$x \in X$ $u \in \mathbb{R}$ $A \in \mathcal{B}_X$, $B \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

Notons $(Q_x)_{x \in X}$ la famille de probabilités associées sur l'espace des trajectoires $\Omega = (X \times \mathbb{R})^\mathbb{N}$

Faisons les hypothèses suivantes :

(H_1) : P admet une probabilité invariante π et pour toute fonction ϕ continue sur x on a

$$\lim_n \sup_{x \in X} |P^n \phi(x) - \pi(\phi)| = 0$$

(H₂) Il existe un compact C de $\mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in X$ le support de la probabilité $F(d\lambda, x, y)$ soit contenu dans C

(H₃) L'application $\alpha(x) = \int_X P(x, dy) \int_{\mathbb{R}} \lambda F(d\lambda, x, y)$ est continue sur X

On a alors le

THEOREME 2

Sous les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃)

1°) $\forall x \in X$

$$Q_x \text{ p.s. } \lim_n \frac{1}{n} (U_1 + U_2 + \dots + U_n) = \int_X \alpha(x) \pi(dx)$$

2°) Il existe une constante $0 < a < 1$ telle que

$\forall \epsilon > 0$

$$\lim_n \left[\sup_{x \in X} Q_x \left\{ \left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - \int_X \pi(dx) \alpha(x) \right| > \epsilon \right\} \right]^{1/n} \leq a \epsilon^2 < 1$$

Démonstration

Elle utilise la

Proposition 2

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur cet espace telles que

a) $\forall n \geq 1 \quad |Y_n| \leq L \quad \text{Pps}$

b) $\forall n \geq 1 \quad E(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = 0 \quad \text{Pps}$

où $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n \quad n \geq 1$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$

alors

1°) $\text{Pps} \quad \lim_n \frac{1}{n} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = 0$

2°) $\forall \epsilon > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 \quad P\left(\frac{|Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n|}{n} > \epsilon\right) \leq 2e^{-\frac{n\epsilon^2}{2L}}$

et la décomposition suivante par une méthode apparue dans [1] et reprise dans [6] :

Notons $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ la tribu $(X_k, U_k) \quad k \leq n$ et $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}$ pour $x \in X$ on définit alors Q_x ps les variables aléatoires

$$U_n^{(1)} = \begin{cases} U_n - E_x(U_n | \mathcal{F}_{n-1}) & \text{si } n > 1 \\ 0 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

et pour $j \geq 2$ $U_n^{(j)} = \begin{cases} E_x(U_n | \mathcal{F}_{n-j+1}) - E_x(U_n | \mathcal{F}_{n-j}) & \text{si } n > j \\ 0 & \text{si } 1 \leq n \leq j \end{cases}$

On a alors pour $n > j \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} \alpha &= \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - \int_X \pi(dx) \alpha(x) = \sum_{p=1}^j \frac{1}{n} \left(\sum_{k=j+1}^n U_k^{(p)} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=j+1}^n [E_x(U_k | \mathcal{F}_{k-j}) - \alpha] \\ &+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^j U_k - \frac{j}{n} \alpha = T_1(n, j) + T_2(n, j) + T_3(n, j) \end{aligned}$$

où pour tout $p \geq 1$ $\left(\sum_{k=j+1}^n U_k^{(p)} \right)_{n \geq 1}$ est une martingale.

2-2 Compte tenu du corollaire 2 la chaîne semi markovienne (X_n, U_n) à valeurs dans $P(\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}$ définie par

$$(X_n, U_n) = (g_n \dots g_1 \bar{x}, \text{Log } \sigma(g_{n+1}, g_n \dots g_1 \bar{x})) \quad \bar{x} \in P(\mathbb{R}^2)$$

satisfait aux hypothèses du théorème 2 d'où le

THEOREME 3

Sous les hypothèses du théorème 1 il existe $0 < a < 1$ tel que

$\forall \epsilon > 0$

$$\lim_n \left[\sup_{\|x\|=1} P\left(\left|\frac{1}{n} \text{Log } \|g_n g_{n-1} \dots g_1 x\| - \gamma\right| > \epsilon\right) \right]^{1/n} \leq a \epsilon^2 < 1$$

§3 - Un théorème de la limite centrale

Le corollaire 1 montre que pour $0 < \lambda \leq \lambda_0$ l'opérateur P est un opérateur de Doeblin-Fortet régulier [7] sur $\mathcal{E}_\lambda$. Il en est de même pour l'opérateur de transition associé à la chaîne semi markovienne $(g_n \dots g_1 \bar{x}, g_{n+1})$ à valeurs dans $P(\mathbb{R}^2) \times S_p$, agissant sur l'espace L_λ , analogue de $\mathcal{E}_\lambda$ pour l'espace $P(\mathbb{R}^2) \times S_p$ muni de la métrique $d((\bar{x}, g)(\bar{y}, g')) = \text{Sup}(\delta(\bar{x}, \bar{y}), \|g - g'\|)$.

En utilisant un théorème de la limite centrale énoncé dans ce cadre dans [7], ou en appliquant un théorème de [6] établi dans le cadre des processus d'apprentissages nous pouvons prouver le

THEOREME 4

Sous les hypothèses du théorème 1

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ la suite $\sigma_n^2(x) = \frac{1}{n} (E \text{ Log } \|g_n \dots g_1 x\| - n\gamma)^2$
converge vers une constante $\sigma^2 > 0$ indépendante de x
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ la suite de variables aléatoires
$$Z_n(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (\text{Log } \|g_n \dots g_1 x\| - n\gamma)$$

converge en loi vers une loi normale $N(0,1)$
- 3) Il existe une constante $C > 0$ et un réel $\alpha \geq 20$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad \sup_{\|x\|=1} \left[P(Z_n(x) \leq t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] \leq \frac{C}{n^\alpha}$$

§4 - Remarques

1) Les théorèmes 3 et 4 s'étendent aux groupes semi-simples de rang 1 en particulier aux groupes du type $SO(n,1)$ et $SU(n,1)$.

2) Le résultat du théorème 4 est analogue à ceux établis dans [8] pour d quelconque lorsque la probabilité p admet une densité et également dans [4] dans le cas où la suite de matrices aléatoires est une suite de matrices positives.

(*) séance du

- [1] BREIMAN L. : The strong law of large numbers for a class of Markov chains - Ann. Math. Stat vol 31 (1960), p.801-803.
- [2] FURSTENBERG H. : Non Commuting random products - TAMS vol 108 (1963) p. 377-428.
- [3] FURSTENBERG H. : Amer Math Soc Summer Inst on Harmonic Analysis on homogeneous spaces, Williamstown, Massachusetts (1972).
- [4] FURSTENBERG H. et KESTEN H. : Products of random matrices - Ann Math stat 31 (1960), p. 457-469.
- [5] GUIVARC'H Y. : Etude des produits de matrices aléatoires - Cours de Saint Flour (1978).
- [6] KAIJSER T. : Some limit theorems for Markov chains with applications to learning models and products of random matrices - Report Institut Mittag Leffler (1972).
- [7] NORMAN F. : Markov Processes and Learning models - Academic Press New York (1972).
- [8] TUTUBALIN V.N. : On limit theorems for the product of random matrices - Theory of Probability and its applications, volume 10 number 1 (1965) p. 15-27.

E. LE PAGE
Laboratoire de Probabilités
L.A. 305 du C.N.R.S.,
B.P. n° 25 A
35031 Rennes Cédex.