

MARIE-FRANCE ALLAIN

**Une méthode de construction de l'intégrale stochastique
par rapport à des processus $(X_t)_{t \in T}$**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1979, fascicule 1

« Séminaire de probabilités », , exp. n° 1, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1979__1_A1_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE METHODE DE CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE STOCHASTIQUE

PAR RAPPORT A DES PROCESSUS $(X_t)_{t \in T}$

Marie-France ALLAIN

1.- Introduction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, X un processus sur cet espace indexé par un espace topologique T non nécessairement totalement ordonné (dans cette rédaction on se restreindra à T ouvert de $\mathbb{R}^d$), $\mathcal{G}$ une tribu sur $T \times \Omega$, on désire associer à X une mesure stochastique μ sur $\mathcal{G}$ qui coïncide lorsque $T \subseteq \mathbb{R}_+$ ou $T \subseteq \mathbb{R}_+^2$ avec la mesure stochastique "habituelle" ; par exemple quand T est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}_+$; si $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale pour la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ continue, de carré intégrable, $\mathcal{G}$ la tribu prévisible engendrée par les rectangles de la forme $R =]s, t] \times F$, $s, t \in T$ et $F \in \mathcal{F}_s$, μ est définie par $\mu(R) = 1_F(X_t - X_s)$.

La méthode adoptée ici utilise largement les résultats démontrés par Métivier et Pellaumail dans [3] ; elle consiste à associer à X une fonctionnelle stochastique linéaire définie sur un espace $\mathcal{K}$ de processus à trajectoires continues qui engendrent $\mathcal{G}$, un théorème de Riesz permet alors d'affirmer l'existence et l'unicité d'une mesure stochastique μ associée, et sous des hypothèses convenables on caractérise μ sur un semi anneau engendrant $\mathcal{G}$.

2.- Notations et hypothèses

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé

T est un ouvert de $\mathbb{R}^d$

$\mathcal{A}$ est une famille de parties de T

$(\mathcal{G}_A)_{A \in \mathcal{A}}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{M}$

$$\mathcal{R} = \{R = A \times F, A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{G}_A\}$$

La tribu prévisible $\mathcal{P}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{R}$; on suppose que $\mathcal{R}$ est un semi-anneau;

$(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ est une famille de sous-tribus de $\mathcal{M}$.

$X = \{h: (h_t)_{t \in T}\}$ est un processus à trajectoires continues, adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$

On suppose que la tribu $\mathcal{P}$ est engendrée par X (on écrira parfois $\mathcal{P} = \sigma(X)$) pour des exemples de telle situation voir [1] et [3].

$X = (X_t)_{t \in T}$ est un processus sur $(\Omega, \mathcal{M}, P)$.

D est un opérateur de dérivation; si pour presque tout ω , $DX(\cdot, \omega)$ existe on adoptera la notation suivante: $\Delta_A X = \int_A DX(s) ds$; si pour D donné $\Delta_A X$ peut s'écrire uniquement en fonction de $(X(s))_{s \in T}$ on définira de façon analogue $\Delta_A X$ pour X quelconque, par exemple $d = 2$ $D = \frac{\partial^2}{\partial t^1 \partial t^2}$ alors si $A =]s, t]$ et $s \otimes t = (s^1, t^2)$

$$\Delta_A X = X_t - X_{s \otimes t} - X_{t \otimes s} + X_s$$

Pour la définition et les propriétés des mesures stochastiques et des fonctionnelles linéaires stochastiques on se réfère à [3], pour la définition et les propriétés des tribus prévisibles à [1].

3.- Différents espaces de Processus

Nous allons d'abord montrer que l'espace $\mathcal{K}$ peut être remplacé sous des hypothèses convenables, par un espace plus petit de processus dont les trajectoires sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3-1 Propriété

Soit T un F_σ

Soit $h \in \mathcal{K}$

alors il existe une suite $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus tels que :

- $\forall n \quad h^n \in \mathcal{H}$
- $\forall n \quad \exists c^n \in \mathbb{R}_+ : \forall (t, \omega) \quad |h^n(t, \omega)| \leq c^n$
- $\forall n \quad \exists K^n$ compact inclus dans T tel que : $\forall t \notin K^n \Rightarrow h^n(t, \cdot) = 0$
- $\forall (t, \omega) \quad \lim_n h^n(t, \omega) = h(t, \omega)$

Démonstration :

Soit $(\phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, continues, à supports compacts et telles que :

$$\begin{cases} \|\phi^n\|_\infty \leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in K} |\phi^n(x) - 1| = 0 \quad \text{pour tout compact } K \text{ de } \mathbb{R} \end{cases}$$

Soit $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de T dans $\mathbb{R}_+$ continues à supports compacts et telles que :

$$\begin{cases} \|\psi^n\|_\infty \leq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n(t) = 1_T(t) \end{cases}$$

Il suffit alors de prendre h^n tel que :

$$h^n(t, \omega) = h(t, \omega) \phi^n(h(t, \omega)) \psi^n(t)$$

3-2 Propriété

On suppose qu'il existe une fonction δ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}_K^\infty$ telle que si :

$$v \in \text{Supp } \delta, \text{ alors } \mathcal{G}_{t-\frac{v}{n}} \subset \mathcal{G}_t \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } t-\frac{v}{n} \in T$$

Soit h un processus uniformément borné, à support compact, à trajectoires continues, adapté à la famille $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$.

Alors il existe une suite $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ayant les mêmes propriétés que h et ayant de plus leurs trajectoires équi continues, de

classe $\mathcal{C}_K^\infty$ et convergeant vers h uniformément pour chaque trajectoire.

Démonstration :

On peut supposer que $\int_{\mathbb{R}^d} \delta(u) du = 1$ et $h(t, \omega) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^d$ et $t \notin T$. On définit h^n par :

$$h^n(t, \omega) = \int h(t - \frac{u}{n}, \omega) \delta(u) du$$

3-3 Corollaire

Soit h un processus uniformément borné, à support compact, à trajectoires équicontinues, adapté à la famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$.

Alors, sous les mêmes conditions que pour la proposition 3-2, il existe une suite $(h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus ayant les mêmes propriétés que h et ayant de plus leurs trajectoires de classe $\mathcal{C}_{K,b}^\infty$, et convergeant vers h uniformément sur $\Omega \times T$.

Démonstration :

On pose comme précédemment :

$$\begin{aligned} h^n(t, \omega) &= \int h(t - \frac{u}{n}, \omega) \delta(u) du \\ &= n^d \int h(u, \omega) \delta(n(t-u)) du \end{aligned}$$

donc, si D est un opérateur de différentiation, on a :

$$D h^n(t, \omega) = n^{2d} \int h(u, \omega) D \delta(n(t-u)) du$$

et Dh^n possède les mêmes propriétés que h .

Il suffit de montrer la convergence uniforme :

$$|h(t, \omega) - h^n(t, \omega)| \leq \int |h(t, \omega) - h(t - \frac{u}{n}, \omega)| \delta(u) du$$

δ a un support compact et h a ses trajectoires équicontinues, donc :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta_\epsilon : \forall s, t \in T : \|s - t\| \leq \eta_\epsilon \\ \Rightarrow |h(t, \omega) - h(t - \frac{u}{n}, \omega)| \leq \epsilon \end{aligned}$$

alors : $\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_\epsilon : \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow |h(t, \omega) - h^n(t, \omega)| \leq \epsilon$
 il suffit de prendre $N_\epsilon : \forall u \in \text{Supp } \delta \quad \frac{\|u\|}{n_\epsilon} < N_\epsilon$

3-4 Espaces de processus

Soit $\mathcal{H}_{e,\infty} = \{h : (h_t)_{t \in T} \text{ est un processus uniformément borné à support compact, à trajectoires équi continues, et de classe } \mathcal{C}_{\infty,b}, \text{ adapté à } (\mathcal{F}_t)_{t \in T}\}$

D'après ce qui précède, l'espace $\mathcal{H}_{e,\infty}$ engendre la même tribu que $\mathcal{H}$

Soit $\mathcal{H}_b = \{h \in \mathcal{H} : h \text{ est uniformément borné}\}$

pour $h \in \mathcal{H}_b$, on pose $\|h\|_\infty = \sup_{t \in T} \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |h(t, \omega)|$. $\mathcal{H}_b$ muni de cette norme est un espace de Banach,

soit $\mathcal{H}_{e,0} = \{h \in \mathcal{H}_b, \text{ à trajectoires équi continues qui s'annulent à l'infini}\}$

$\mathcal{H}_{e,0}$ est la fermeture de $\mathcal{H}_{e,\infty}$ dans $\mathcal{H}_b$, de plus si h_1 et $h_2 \in \mathcal{H}_{e,0}$ $h_1 \wedge h_2$ également. Dans toute la suite, on considère cet espace $\mathcal{H}_{e,0}$ qui satisfait aux hypothèses du Théorème de Riesz [3] et son sous-espace dense $\mathcal{H}_{e,\infty}$.

4.- Fonctionnelles linéaires stochastiques et mesures stochastiques

4-1 Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, soit D un opérateur de dérivation, on suppose que DX existe, que DX est mesurable pour $B(T) \otimes \mathcal{F}$ où $B(T)$ est la tribu borélienne sur T et que :

$$E\left(\int |DX_s|^2 ds\right) < +\infty$$

Pour $h \in \mathcal{H}_b$, on définit $m(h)$ par :

$$m(h) = \int_T h(s) DX_s ds$$

m ainsi définie est une 2-fonctionnelle linéaire stochastique, à laquelle est associée de façon unique une mesure stochastique d'ordre 2 sur $\mathcal{D}$ telle que $\forall h \in \mathcal{H}_0 \quad m(h) = \int h \, d\mu$ (cf. [3])
 De plus, si $R = A \times F \in \mathcal{D}$ on a $\mu(R) = 1_F \int_A D X_s \, ds = 1_F \Delta_A X$.
 En fait, si $T \subseteq \mathbb{R}^d$ et $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \dots \partial t^d}$, il suffit qu'il existe une application f de $(T \times \Omega, B(T) \otimes \mathcal{H})$ dans $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ telle que :

$$-\Delta_A X = \int_A f(s, \omega) \, ds \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$$- E \left(\int_T |f(s, \omega)|^2 \, ds \right) < +\infty$$

pour que l'on puisse associer à X une fonctionnelle linéaire stochastique μ telle que $\mu(A \times F) = 1_F \Delta_A X$.

4-2 Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus sur $(\Omega, \mathcal{H}, P)$. On suppose maintenant que $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \dots \partial t^d}$, que T est borné et que X vérifie les hypothèses suivantes :

4.2.1

$$- E(\sup_{u \in T} |X(u)|^2) < +\infty$$

4.2.2

- Il existe un compact K_0 d'intérieur non vide tel que $\forall u \in K_0, \forall s \in T$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(|X(s - \frac{u}{n}) - X(s)|^2) = 0$$

où on pose : $X(s - \frac{u}{n}) = 0$ si $X(s - \frac{u}{n})$ n'est pas défini

4-3 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus et soit $(X^n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de processus tels que :

- à chaque X^n est associée une 2-fonctionnelle linéaire stochastique m^n sur $\mathcal{H}_{e,0}$

- il existe une constante C telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{\|h\|_{\infty} \leq 1} E([m^n(h)]^2) \leq C$$

- $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty} \quad m^n(h) = \int D h_s X_s^n ds$ où D est un opérateur de dérivation et $\lim_n E([\int D h_s (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$

alors il existe une 2-fonctionnelle linéaire stochastique sur $\mathcal{H}_{e,0}$ associée à X telle que :

$$\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty} \quad m(h) = \int D h_s X_s ds$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le Théorème de Riesz (iii) [3].

Puisque $\sup_n \sup_{\|h\|_{\infty} \leq 1} E([m^n(h)]^2) \leq C$, la suite $(m^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence simple, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ étant muni de sa topologie faible.

Mais pour toute sous-suite $(m^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, la condition : $\lim_n E([\int D h_s (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$ pour $h \in \mathcal{H}_{e,\infty}$ implique que $(m^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et donc faiblement vers $\int D h_s X_s ds$.

$\mathcal{H}_{e,\infty}$ étant dense dans $\mathcal{H}_{e,0}$ pour la norme uniforme, il en résulte que toutes les sous-suites ont même limite et la suite (m^n) admet une limite m qui est une 2-fonctionnelle linéaire stochastique telle que : $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty} \quad m(h) = \int D h_s X_s ds$.

4-4 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^d}$ un processus tel que $\int_{\mathbb{R}^d} |X_s| ds < +\infty$;
soit D un opérateur de dérivation. On suppose qu'il existe une
fonction f sur $(T \times \Omega, \mathcal{B}(T) \otimes \mathcal{H})$, à valeurs réelles telle que :

$$\begin{aligned} & - \forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(T) \text{ on a au sens des distributions} \\ & \quad \langle Dh, X \rangle = (-1)^{|D|} \langle h, f \rangle \end{aligned}$$

$$- E\left(\left[\int_T |f(s)| ds\right]^2\right) < +\infty$$

alors on peut associer à X une 2-fonctionnelle linéaire stochastique
sur $\mathcal{H}_{e,0}(T)$ telle que : $\forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(T)$

$$m(h) = (-1)^{|D|} \int D h_s X_s ds = \int h_s f(s) ds.$$

4-5 Lemme

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus satisfaisant aux hypothèses
4-2-1 et 4-2-2.

Alors il existe une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus indexés
par $\mathbb{R}^d$ qui satisfont aux hypothèses du lemme 4-4 et tels que :

$$* \lim_n E(|X_t^n - X_t|^2) = 0$$

$$* \forall h \in \mathcal{H}_{e,\infty}(T)$$

$$\lim_n E\left(\left[\int D h_s (X_s^n - X_s) ds\right]^2\right) = 0$$

Démonstration :

Soit δ une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}_+$ de classe C^∞ à support
compact inclus dans K_0 . On pose $X_t = 0$ si $t \notin T$. On définit X^n par :

$$X_t^n = \int X\left(t - \frac{u}{n}\right) \delta(u) du = n^d \int X(u) \delta(n(t-u)) du$$

4-6 Lemme

Soit $T = [0,1]$.

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus à trajectoires continues vérifiant l'hypothèse 4-2-1 et tel que : $X_{(0,t^2)} - X_{(t^1,0)} = 0$.

$$\text{Soit } D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \partial t^2 \dots \partial t^d}$$

Alors il existe une suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de processus indexés par $\mathbb{R}^d$ qui satisfont aux hypothèses du lemme 4-4 et tels que :

$$* \lim_n \sup_t |X_t - X_t^n| = 0$$

$$* h \in \mathcal{H}_{e,\infty}^0(T) \quad \lim_n E([\int D h_s (X_s^n - X_s) ds]^2) = 0$$

Démonstration :

Soit $(\pi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de partitions de $]0,1[$ par des pavés et soit $\pi^n = (C_k^n)_{k=1 \dots k(n)}$.

Par exemple $]0,1[= \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \left] \frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right]$ et π^n est la partition produit.

Pour $C_k^n = \bigcup_{j=1}^d \left] \frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right]$, on sait définir $\Delta_{C_k^n}(X)$ tel que si DX existe,

$$\Delta_{C_k^n}(X) = \int_{C_k^n} \frac{\partial^d}{\partial t^1 \partial t^2 \dots \partial t^d} X(s) ds.$$

$$\text{Soit } f^n(t, \omega) = \sum_k 2^{nd} \Delta_{C_k^n + \frac{1}{2^n}}(X) 1_{C_k^n}(t) \quad (s \in C_k^n + \frac{1}{2^n} \Leftrightarrow (s^i - \frac{1}{2^n})_{i=1 \dots d} \in C_k^n)$$

$$\text{On définit alors } X^n \text{ par : } X^n(t, \omega) = \int_{]-\infty, t] \cap T} f^n(s, \omega) ds + 1_T(t)$$

si X n'est pas nul sur $[0,1] -]0,1[$, on a le résultat voulu pour X

tel que $\bar{X}_t = \Delta_{[0,t]} X$, on peut poser $X_t^n = \bar{X}_t^n + X_{(t^1,0)} - X_{(0,t^2)} + X_{(0,0)}$
alors X^n converge uniformément vers X , mais il est tout

aussi intéressant de considérer $\bar{X}$.

4-7 Théorème

On suppose que $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \dots \partial t^d}$, que X est un processus satisfaisant à 4-2-1 et 4-2-2 et que la tribu prévisible $\mathcal{P}$ est engendrée par $\mathcal{R} = \{A \times F, A \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{G}_A\}$. On suppose que pour $u \in K_0$ $\mathcal{G}_A \subseteq \mathcal{G}_{A - \frac{u}{n}}$ $\forall A \in \mathcal{A}$. On suppose qu'il existe une constante C telle que $\forall Y = \sum_{i=1}^r a_i 1_{A_i \times F_i}$, $|a_i| \leq 1$, $A_i \times F_i \in \mathcal{R}$ on ait $E((\sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X)^2) \leq C$.

Alors il existe une 2-fonctionnelle linéaire stochastique sur $\mathcal{H}_{e_0}(T)$ et une mesure stochastique μ sur $\mathcal{P}$, telles que $\forall h \in \mathcal{H}_{e_0}(T)$ $m(h) = (-1)^D \int D h_s X_s d_s = \mu(h)$.

Démonstration

On considère la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la démonstration du lemme 4-5.

Il suffit de montrer qu'il existe une constante C telle que $\sup_n \sup_{\|h\|_{\infty} \leq 1} E[m^n(h)]^2 \leq C$

Pour cela il suffit de montrer que $\forall Y$ tel que

$$Y(t, \omega) = \sum_{i=1}^r a_i 1_{A_i \times F_i}(t, \omega) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} |a_i| \leq 1 \\ A_i \times F_i \in \mathcal{R} \end{array}$$

on a

$$\sup E[m^n(Y)]^2 \leq C$$

$$\text{or } m^n(Y) = \sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i}(X^n)$$

$$\text{et } \Delta_{A_i}(X^n) = \Delta_{A_i}(\int X(\cdot - \frac{u}{n}) \delta(u) du)$$

$$= \int \Delta_{A_i - \frac{u}{n}}(X) \delta(u) du$$

$$\Rightarrow m^n(Y) = \int \sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i - \frac{u}{n}}(X) \delta(u) du$$

$$\text{mais } F_i \in \mathcal{G}_{A_i} \subseteq \mathcal{G}_{A_i - \frac{u}{n}}$$

en conséquence il suffit que

$$E\left(\left[\sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i}(X)\right]^2\right) \leq C$$

$$\text{pour } |a_i| \leq 1 \quad F_i \times A_i \in \mathcal{R}$$

Si on suppose X continu, on vérifie facilement que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la démonstration du lemme 4-6 satisfait à la condition de bornitude.

Le théorème de Riesz [3] permet d'associer de façon unique une mesure stochastique à toute fonctionnelle linéaire stochastique telle que

$$\forall h \in \mathcal{K}_{e0} \quad m(h) = \int h \, d\mu$$

4-8 Corollaire

On suppose qu'il existe une mesure ν positive et bornée sur $(T \times \Omega, \mathcal{G})$, telle que :

$$\forall Y = \sum_{i=1}^r a_i 1_{A_i \times F_i} \quad A_i \times F_i \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow$$

$$E\left(\left(\sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X\right)^2\right) \leq \nu([Y]^2)$$

On suppose également que $\forall u \in K_0$

$$\lim_n \nu\left(\left(1_{A \times \Omega} - 1_{A - \frac{u}{n} \times \Omega}\right)\right) = 0$$

alors la condition de bornitude est satisfaite et de plus

$$\forall R \in \mathcal{R}, \quad R = A \times F \quad \text{on a} \quad \mu(R) = 1_F \Delta_A X$$

5 Quelques exemples

On donne maintenant quelques exemples où toutes les conditions sont satisfaites pour $D = \frac{\partial^d}{\partial t^1 \dots \partial t^d}$

5-1

$$T = [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A} = \{[s,t], s, t \in \overset{\circ}{T}\}$$

X est un processus sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ indexé par T de carré intégrable, à trajectoires continues à droite, on peut supposer X nul sur les axes puisque seul l'aspect mesure nous intéresse ici.

$(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ est une famille de sous tribus de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \in [0,t])$

Pour les différentes notions de martingales et leurs propriétés on se réfère à Cairoli et Walsh [2] si $(X_t)_{t \in T}$ est une martingale pour la famille $(\mathcal{G}_t)_{t \in T}$ et si $\mathcal{G}_t^1 \perp \mathcal{G}_t^2 / \mathcal{G}_t \quad \forall t \in T$, toutes les hypothèses sont satisfaites pour $\overset{\circ}{T}$; en particulier il existe un processus croissant $\langle X \rangle_{t \in T}$ tel que $(X_t^2 - \langle X \rangle_t)_{t \in T}$ soit une martingale faible et

$$\forall \phi = \sum_{i=1}^r a_i 1_{A_i} x_{F_i} \quad \text{avec } A_i \in \mathcal{A}, \quad F \in \mathcal{G}_{A_i} = \mathcal{G}_{s_i}$$

on a $E([\sum_{i=1}^r a_i 1_{F_i} \Delta_{A_i} X]^2) = E(\int \phi^2(s, \omega) d\langle X \rangle_s)$ il suffit alors de prendre $\nu : d\nu = dP \otimes d\langle X \rangle$

Si $(X_t)_{t \in T}$ est une martingale forte, c'est en particulier une martingale qui peut entrer dans le cas précédent; cependant on peut considérer les tribus prévisibles $\mathcal{P}^i \quad i = 1, 2$ (pour $A = [s,t]$ on pose $\mathcal{G}_A^i = \mathcal{G}_s^i \quad i = 1, 2$) alors $\forall \phi = \sum_{k=1}^r a_k 1_{A_k} x_{F_k} \quad A_k \times F_k \in \mathcal{R}^i$ on a $E([\sum_{k=1}^r a_k 1_{F_k} \Delta_{A_k} X]^2) = E(\int \phi^2(t, \omega) d[X]^i_t)$ où $[X]^i$ est un processus croissant tel que $(X_t^2 - [X]^i_t)_{t \in T}$ est une i -martingale. On prend alors $\nu^i : d\nu^i = dP \otimes d[X]^i$

5-2

$$\text{Soit } T = [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A} = \{[s,t], s, t \in \overset{\circ}{T}\}$$

soit $T^{(2)} = \{(u,v) \mid u \text{ et } v \in \overset{\circ}{T}, \quad u \text{ et } v \text{ non comparables}\}$

$$\mathcal{A}^{(2)} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{A} \quad A \times B \subseteq T^{(2)}\}$$

pour $(u,v) \in T^{(2)}$ on pose $\sigma_{\lambda}^{(2)}(u,v) = \sigma_{uVv}$
 pour $A \times B \in \mathcal{A}^{(2)}$ on pose $\mathcal{G}^{(2)}_{A \times B} = \mathcal{G}_{uVv}$ si u et v sont les
 points initiaux de A et B respectivement.

On suppose que $(M_t)_{t \in T}$ est une martingale forte sur
 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, P)$ continue à droite et telle $\sup_{t \in T} E([M_t]^4) < +\infty$;
 on définit $(X_{(u,v)})_{(u,v) \in T^{(2)}}$ par $X_{(u,v)} = M_u M_v$.

$T^{(2)}$ est la réunion de deux ouverts disjoints, sur chacun
 de ces ouverts toutes les hypothèses sont satisfaites pour
 $D = \frac{\partial^4}{\partial u^1 \partial u^2 \partial v^1 \partial v^2}$, (en particulier, on peut trouver K_0 et une
 fonction δ convenable), l'hypothèse de majoration est satisfaite
 en prenant

$dv = dP \otimes d[M]^1 \otimes d[M]^2$ ou $dP \otimes d[M]^2 \otimes d[M]^1$
 suivant l'ouvert considéré.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLAIN M.F. : Tribus prévisibles et espaces de processus à trajectoires continues indexés par un espace localement compact et métrisable - Sém. de Rennes 1979.
- [2] CAIROLI R. et WASLH J.B. : Stochastic integrals in the plane - Acta Mathematica, n° 134 - 1975.
- [3] METIVIER M. et PELLAUMAIL J. : Mesures stochastiques à valeurs dans des espace L_0 - Z. Wahrsch. Gebiete 40 - 101.114 - 1977.
- [4] WONG E. et ZAKAI M. : Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter - Z. Wahrsch. Gebiete 29 - 109.122 - 1974.