

JEAN NOURRIGAT

Hypoellipticité et paramétrixes pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques multiples

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3

« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 6, p. 1-31

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__3_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE ET PARAMETRIXES
POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS
A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par Jean NOURRIGAT

INTRODUCTION :

On a construit dans l'article [6] des paramétrixes pour des opérateurs différentiels sur R^n elliptiques hors d'un hyperplan. D'autre part V.V. Grushin a donné dans [4] des conditions suffisantes d'hypoellipticité pour des opérateurs dont la variété caractéristique est un sous-espace vectoriel. Dans le cas d'un hyperplan les conditions suffisantes de [2] et [6] permettent de démontrer l'hypoellipticité de certains opérateurs ne vérifiant pas les conditions de [4]. L'article [2] énonce en particulier des conditions dites d'ellipticité générale, que l'on a traduit dans [6] par des majorations des dérivées du symbole de l'opérateur, analogues à celles qui, dans Hörmander [5], permettent de construire des paramétrixes dans des classes $\mathcal{L}_{\rho\delta}^{-\mu}$.

Nous nous proposons ici d'étendre les résultats de [6] à des opérateurs dégénérant sur un sous-espace vectoriel de codimension quelconque. Nous écrirons l'opérateur selon les notations de Grushin [4]:

$$(0.1) \quad P(x, D_x) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}} a_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma D_x^\alpha,$$

où $\mathcal{M}$ est un ensemble fini de multi-indices $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, et où les $a_{\alpha\gamma}$ sont des fonctions C^∞ sur R^n , à valeurs complexes.

Le but de cet article est de donner des conditions suffisantes pour que l'opérateur $P(x, D_x)$ admettent une paramétrix à gauche dans une classe $\mathcal{L}_{\rho\delta}^{-\mu}$ où cette fois ρ et δ sont des vecteurs $\rho = (\rho_1 \dots \rho_n)$, $\delta = (\delta_1 \dots \delta_n)$, tels que $0 \leq \delta_i \leq \rho_i \leq 1$ et $\delta_i < 1$ pour tout $i \leq n$, et où μ est un réel. Les classes $\mathcal{L}_{\rho\delta}^{-\mu}$ sont donc définies à l'aide de vecteurs de poids au sens de Beals [1].

On voit que la plus grande valeur de μ que l'on puisse espérer est :

$$(0.2) \quad \mu = \sup_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}} (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma)$$

La première hypothèse que nous ferons est une majoration des déri-

vées du symbole $\mathfrak{P}(x, \xi)$. Cette hypothèse suffit à assurer l'hypoellipticité dans tout ouvert cône de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{0\}$ ne coupant pas la surface $\sum$ définie par :

$$(0.3) \quad \sum = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ , } x_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n \text{ tel que } \delta_i > 0 \right. \\ \left. \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n \text{ tel que } \rho_i < 1 \right\}$$

Cette première hypothèse généralise donc la notion d'ellipticité transverse à $\sum$.

En chaque point $\rho = (x_0, \xi_0)$ de $\sum$, on va associer à P un opérateur différentiel P_ρ à coefficients polynômes. Désignons par $\sum^\perp$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ défini par :

$$(0.4) \quad \sum^\perp = \left\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ , } x_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n \text{ tel que } \delta_i = 0 \right. \\ \left. \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leq n \text{ tel que } \rho_i = 1 \right\}$$

Pour tout $\rho = (x_0, \xi_0) \in \sum$, pour tout $(x, \xi) \in \sum^\perp$, posons :

$$(0.5) \quad P_\rho(x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\mu} P(x_0 + \lambda^{-\delta_1} x_1, \dots, x_0 + \lambda^{-\delta_n} x_n, \xi_0 + \lambda^{\rho_1} \xi_1, \dots, \xi_0 + \lambda^{\rho_n} \xi_n)$$

La limite existe, d'après (0.1) et (0.2.). Les indices $i \leq n$ pour lesquels $\rho_i = \delta_i$ jouent un rôle particulier. On peut supposer que ces indices sont $i = 1, \dots, k$, où $k \leq n$.

On pose alors :

$$X' = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ , } x_i = 0 \text{ pour tout } i > k\}$$

$$X'^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n \text{ , } \xi_i = 0 \text{ pour tout } i > k\}$$

$$Y = \{(x, \xi) \in \sum^\perp \text{ , } x_i = 0 \text{ si } i \leq k, \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \leq k\}$$

On a $\sum^\perp = X' \oplus X'^* \oplus Y$. On note (x', ξ', y) la variable de $\sum^\perp$ (avec $x' \in X'$, $\xi' \in X'^*$, $y \in Y$). La deuxième hypothèse que l'on fait est la suivante : pour tout $\rho \in \sum$, pour tout $y \in Y$, l'opérateur différentiel $P_\rho(x', D'_{x'}, y)$ est injectif dans $\mathcal{Y}(X')$.

On montre que sous ces deux hypothèses (qui sont explicitées au § I) l'opérateur $P(x, D_x)$ admet une paramétrix à gauche dans $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$, donc est hypoelliptique avec perte de $m - \mu$ dérivées.

I - ENONCE ET NOTATIONS

On considère un opérateur différentiel $P(x, D_x)$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Nous l'écrivons, suivant les notations de Grušin [4]:

$$(1.1) \quad P(x, D_x) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{U}} a_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma D_x^\alpha$$

où $\mathcal{U}$ est un ensemble fini de multi-indices $(\alpha, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ tels que $|\alpha| \leq m$, et où les $a_{\alpha\gamma}$ sont des fonctions C^∞ sur Ω , à valeurs complexes.

On considère d'autre part deux vecteurs $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ et un réel μ qui vérifient pour tout $i \leq n$:

$$(1.2) \quad 0 \leq \delta_i \leq \rho_i \leq 1 \quad \rho_i > 0 \quad \delta_i < 1$$

$$(1.3) \quad \mu = \sup_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{U}} (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma)$$

$$\text{où l'on pose } (\rho, \alpha) = \sum_{i=1}^n \rho_i \alpha_i$$

On désignera par $S_{\rho\delta}^{-\mu}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a(x, \xi)$ C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout compact K de Ω et pour tout multiindice (α, β) , il existe $C > 0$ tel que :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-(\rho, \beta) + (\delta, \alpha)} \quad \forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$$

On désigne par $\mathcal{L}_{\rho\delta}^{-\mu}(\Omega)$ l'ensemble des applications linéaires de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$ de la forme $a(x, D_x) + R$, où $a(x, \xi)$ est dans $S_{\rho\delta}^{-\mu}(\Omega)$ et R est un opérateur à noyau C^∞ . Les poids vectoriels définissant cette classe d'opérateurs vérifient toutes les hypothèses de Beals [1].

La première hypothèse que nous ferons sur l'opérateur $P(x, D_x)$ est une majoration des dérivées de son symbole analogue à celle de Hörmander [5].

Nous poserons :

$$(1.4) \quad \psi(x, \xi) = 1 + \sum_{i=1}^n |x_i| |\xi|^{\delta_i} + \sum_{i=1}^n |\xi_i| |\xi|^{-\rho_i}$$

L'hypothèse portant sur le symbole $P(x, \xi)$ s'énonce ainsi :

(H1) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ et $\epsilon > 0$ tels que, pour tout multi-indice (α, β) , il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(1.5) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta P(x, \xi)| \leq C |P(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{(\delta, \alpha) - (\rho, \beta)} \psi(x, \xi)^{-|\beta| \epsilon}$$

(où le multi-indice γ est défini par $\gamma_i = \beta_i$ si $\rho_i = \delta_i$ et $\gamma_i = 0$ sinon),
et de plus :

$$(1.6) \quad |P(x, \xi)| \geq C (1 + |\xi|)^\mu$$

pour tout $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x, \xi) \geq A$.

On montrera au § III que cette condition suffit pour la construction du symbole de la paramétrix dans tout ouvert conique de $\Omega \times \mathbb{R}^n - \{0\}$ ne coupant pas la surface Σ définie par :

$$(1.7) \quad \Sigma = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n - \{0\} \mid x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i > 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i < 1\}$$

Nous allons donc introduire une condition supplémentaire en tout point $\rho = (x_0, \xi_0)$ de Σ . Désignons par $\Sigma^\perp$ le sous-espace suivant de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$(1.8) \quad \Sigma^\perp = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i = 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i = 1\}$$

En tout point $\rho = (x_0, \xi_0)$ de Σ , définissons un polynôme $P_\rho(x, \xi)$ sur $\Sigma^\perp$ par :

$$(1.9) \quad P_\rho(x, \xi) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-\mu} p(x_{01} + \lambda^{-\delta_1} x_1, \dots, x_{0n} + \lambda^{-\delta_n} x_n, \xi_{01} + \lambda^{\rho_1} \xi_1, \dots, \\ \xi_{0n} + \lambda^{\rho_n} \xi_n).$$

On peut expliciter ce polynôme en suivant les notations de Grušin.

Désignons par $\mathcal{M}_0$ le sous-ensemble suivant de $\mathcal{M}$:

$$(1.10) \quad \mathcal{M}_0 = \{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M} \mid (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma) = \mu\}$$

Pour simplifier l'écriture, convenons que $\gamma_j = 0$ pour tout indice j tel que $\delta_j = 0$. A tout multi-indice α , faisons correspondre les multi-indices α' et α'' définis par :

$$\alpha'_i = \alpha_i \quad \text{si } \rho_i = 1, \quad \alpha'_i = 0 \quad \text{si } \rho_i < 1, \quad \alpha''_i = \alpha_i - \alpha'_i.$$

On a alors :

$$(1.11) \quad P_\rho(x, \xi) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}_0} a_{\alpha\gamma}(x_0) x^\gamma \xi^{\alpha'} \xi^{\alpha''}$$

Définissons maintenant une décomposition de $\sum^\perp$ en somme directe de trois sous-espaces. Posons :

$$(1.12) \quad \begin{aligned} X' &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i < \rho_i\} \\ X'^* &= \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i < \rho_i\} \\ Y &= \{(x, \xi) \in \sum^\perp \mid x_i = \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i = \rho_i\}. \end{aligned}$$

X' et X'^* sont deux sous-espaces de $\sum^\perp$ d'après (1.2) (en identifiant x et $(x, 0)$, ξ et $(0, \xi)$), et l'on a :

$$\sum^\perp = X' \oplus X'^* \oplus Y$$

La variable de $\sum^\perp$ sera notée tantôt (x, ξ) , tantôt (y, x', ξ') , avec $y \in Y$, $x' \in X'$, $\xi' \in X'^*$. Le polynôme P_ρ sera noté tantôt $P_\rho(x, \xi)$, tantôt $P_\rho(y, x', \xi')$.

Nous pouvons maintenant énoncer notre seconde hypothèse :

(H2) En tout point $\rho = (x_0, \xi_0)$ de $\sum$, en tout point y de Y , l'opérateur différentiel $P_\rho(y, x', D'_{x'})$ est inversible à gauche dans $\mathcal{D}'(X)$.

En raison de la quasi-homogénéité de l'opérateur P_ρ , si l'hypothèse H2 est vérifiée en tout point (x_0, ξ_0) de Σ tel que $|\xi_0| = 1$, elle est vérifiée partout.

On peut énoncer le théorème principal :

Théorème 1 :

Soit $P(x, D_x)$ un opérateur différentiel de la forme (1.1). Soient ρ, δ et μ vérifiant (1.2) et (1.3). Si les hypothèses H1 et H2 sont vérifiées, alors $P(x, D_x)$ admet une paramétrix à gauche $Q \in \mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}(\Omega)$. De plus, le symbole $Q(x, \xi)$ de Q vérifie les majorations suivantes. Pour tout compact K de Ω , il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, tels que, pour tout multi-indice (α, β) , il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta Q(x, \xi)| \leq C |P(x, \xi)|^{-1} (1 + |\xi|)^{(\delta, \alpha) - (\rho, \beta)} \psi(x, \xi)^{-|\beta|} \varepsilon$$

pour tout $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x, \xi) \geq A$.

II - UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

On considère deux vecteurs $\rho = (\rho_1 \dots \rho_n)$ et $\delta = (\delta_1 \dots \delta_n)$ vérifiant
(1.2) :

$$0 \leq \delta_i \leq \rho_i \leq 1 \quad \delta_i < 1 \quad \rho_i > 0 \quad \forall i \leq n.$$

Pour tout réel μ , nous allons définir une sous-classe de $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}(\Omega)$.

Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, posons :

$$(\rho, \alpha) = \sum_{i=1}^n \rho_i \alpha_i.$$

Posons :

$$\psi(x, \xi) = 1 + \sum_{i=1}^n |x_i| |\xi| \delta_i + \sum_{i=1}^n |\xi_i| |\xi|^{-\rho_i}.$$

A tout $\varepsilon > 0$ faisons correspondre le vecteur $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$, encore noté ε , défini par :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_j &= \varepsilon && \text{pour tout indice } j \text{ tel que } \rho_j = \delta_j \\ \varepsilon_j &= 0 && \text{pour tout indice } j \text{ tel que } \rho_j > \delta_j \end{aligned}$$

Nous utiliserons, pour démontrer le théorème 1, la classe de symboles suivante :

Définition 2.1.

Soient μ et k deux nombres réels, et $\varepsilon > 0$. On désigne par $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $a(x, \xi)$ C^∞ sur $\Omega \times \mathbb{R}^n$ telles que, pour tout compact K de Ω , et pour tout multi-indice (α, β) , il existe $C > 0$ tel que :

$$(2.2) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{\mu + (\delta, \alpha) - (\rho, \beta)} \psi(x, \xi)^{k - (\varepsilon, \beta)}$$

pour tout $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 2.1.

Soit $P(x, D_x)$ l'opérateur différentiel (1.1). Soient ρ et δ deux vecteurs vérifiant (1.2) et μ le réel défini par (1.3). Posons :

$$k = \sup_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{C} \ell} (|\alpha| + |\gamma|)$$

On a :

$$(2.3) \quad P(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, 1}^{\mu, k}(\Omega)$$

Montrons en effet que chaque terme $x^\gamma \xi^\alpha$ est dans $S_{\rho, \delta, 1}^{\mu, k}(\Omega)$. Il suffit pour cela de vérifier que si (ρ, q) est un multi-indice vérifiant $0 \leq p_i \leq \alpha_i$, $0 \leq q_i \leq \gamma_i$ pour tout i , on a :

$$(2.4) \quad |x^{\gamma-q}| |\xi^{\alpha-p}| \leq C(1+|\xi|)^{\mu+(\delta, q)-(\rho, p)} \psi(x, \xi)^{k-|p|-|q|}$$

Or, pour tout $i \leq n$, on a :

$$|x_i| \leq |\xi|^{-\delta_i} \psi(x, \xi) \quad \text{et} \quad |\xi_i| \leq |\xi|^{\rho_i} \psi(x, \xi),$$

$$\text{d'où} \quad |x^{\gamma-q}| |\xi^{\alpha-p}| \leq C |\xi|^{(\rho, \alpha-p)-(\delta, \gamma-q)} \psi(x, \xi)^{|\gamma|-|q|+|\alpha|-|p|}.$$

En utilisant $(\rho, \alpha) - (\delta, \gamma) \leq \mu$ et $|\alpha| + |\gamma| \leq k$, on obtient bien

(2.4).

Exemple 2.2.

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$. Tout élément (x, ξ) de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ peut s'écrire de manière unique $(x, \xi) = (x_0, \xi_0) + (x_1, \xi_1)$, avec $\rho = (x_0, \xi_0)$ dans Σ , et (x_1, ξ_1) dans $\Sigma^\perp$. On définit alors un symbole $p_0(x, \xi)$ en posant :

$$P_0(x, \xi) = P_{(x_0, \xi_0)}(x_1, \xi_1)$$

où $P_{\rho}(x_1, \xi_1)$ est le symbole défini en (1.9) correspondant au point $\rho = (x_0, \xi_0)$ de Σ . Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $k' \geq 0$ tels que :

$$(2.5) \quad P - P_0 \in S_{\rho, \delta, 1}^{\mu-\varepsilon, k'}$$

On peut écrire en effet $P - P_0 = P_1 + P_2$, avec :

$$P_1(x, \xi) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0} a_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma \xi^\alpha$$

$$P_2(x, \xi) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}_0} [a_{\alpha\gamma}(x) - a_{\alpha\gamma}(x_0)] x^\gamma \xi^\alpha$$

Pour le symbole P_1 , on remarque qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0 \Rightarrow (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma) \leq \mu - \varepsilon_1$$

et le calcul de l'exemple 1 montre que $P_1 \in S_{\rho, \delta, 1}^{\mu - \varepsilon_1, k}$. Pour le symbole P_2 , on remarque qu'il existe des fonctions $a_{\alpha, \gamma, j}(x)$ telles que :

$$a_{\alpha, \gamma}(x) - a_{\alpha, \gamma}(x_0) = \sum_i a_{\alpha, \gamma, i}(x) (x_i - x_0).$$

Comme $(x - x_0, \xi - \xi_0)$ est dans $\sum_i$, la somme ne porte que sur les indices i pour lesquels $\delta_i > 0$. Pour tout $i \leq n$, désignons par (i) le multi-indice $(0, \dots, 1, \dots, 0)$, où le 1 occupe la i ème place. Définissons un nouvel ensemble $\mathcal{M}_1$ de multi-indices par :

$$\mathcal{M}_1 = \{(\alpha, \gamma) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n, \exists i \text{ tel que } \delta_i > 0 \text{ et } (\alpha, \gamma - (i)) \in \mathcal{M}\}.$$

Pour tout (α, γ) dans $\mathcal{M}_1$, posons :

$$b_{\alpha, \gamma}(x) = a_{\alpha, \gamma, i}(x)$$

où l'indice i est tel que $(\alpha, \gamma - (i)) \in \mathcal{M}$. On peut alors écrire :

$$P_2(x, \xi) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}_1} b_{\alpha, \gamma}(x) x^\gamma \xi^\alpha$$

Désignons par ε_2 le plus petit des δ_i qui sont > 0 . On a ; d'après la définition de $\mathcal{M}_1$:

$$(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}_1 \Rightarrow (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma) \leq \mu - \varepsilon_2$$

Le calcul de l'exemple 1 montre que $P_2 \in S_{\rho, \delta, 1}^{\mu - \varepsilon_2, k+1}$.

On voit que les inégalités $\varepsilon' \leq \varepsilon$ et $k \leq k'$ impliquent

$$(2.6) \quad S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega) \subset S_{\rho, \delta, \varepsilon'}^{\mu, k'}(\Omega).$$

Le symbole $P(x, \xi)$ de l'exemple 1 est donc dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ pour tout $\varepsilon \leq 1$. On pourra donc sans restreindre la généralité supposer désormais que :

$$(2.7) \quad 0 < \varepsilon < \rho_i - \delta_i \quad \text{pour tout indice } i \text{ tel que } \rho_i > \delta_i$$

Des inégalités :

$$(2.8) \quad 1 \leq \psi(x, \xi) \leq C(1 + |\xi|)$$

On déduit, pour tout $\varepsilon > 0$, l'inclusion :

$$(2.9) \quad S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega) \subset S_{\rho, \delta}^{\mu+k^+}(\Omega)$$

où $k^+ = \sup(k, 0)$ et $S_{\rho, \delta}^{\mu+k^+}$ est définie au § I.

$S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ est un cas particulier des classes de symboles étudiées par Beals [1].

On sait qu'à tout symbole $a \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ on peut associer un opérateur

$a(x, D) : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow C^\infty(\Omega)$ défini par :

$$(2.10) \quad a(x, D) f(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi)^n}$$

Si $a \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ on a : $a(x, D) : H_{\text{coup}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-m}(\Omega)$

Désignons donc par $OPS_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ l'ensemble des opérateurs de la forme $a(x, D) + R$

où $a \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ et R est à noyau C^∞ . On obtient donc, si $A \in OPS_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$:

$$(2.11) \quad A : H_{\text{loc}}^s(\Omega) \rightarrow H_{\text{loc}}^{s-\mu-k^+}(\Omega) \quad (\text{si } A \text{ est proprement supporté})$$

On a le résultat suivant sur la composition des opérateurs ; si ε vérifie (2.7).

Proposition 2.1.

Soient $a \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ et $b \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu', k'}(\Omega)$ (μ, μ', k, k' réels). Alors il existe $C \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu+\mu', k+k'}(\Omega)$ tel que $a(x, D) b(x, D) = C(x, D)$. (Si $a(x, D_x)$ est proprement supporté). Pour tout entier $N > 0$, on a :

$$(2.12) \quad r_N(a, b)(x, \xi) = C(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a) (\partial_\xi^\alpha b) \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu+\mu'; k+k'-N\varepsilon}(\Omega)$$

Démonstration :

On a classiquement, si $a \in S_{\rho, \delta}^m(\Omega)$ et $b \in S_{\rho, \delta}^{m'}(\Omega)$, b vérifiant l'hypothèse de la proposition, $a(x, D) b(x, D) = C(x, D)$, ou $C(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^{m+m'}(\Omega)$ est donné par :

$$(2.13) \quad C(x, \xi) = \int e^{-i(x-y) \cdot (\xi-\eta)} a(x, \eta) b(y, \xi) \frac{dy d\eta}{(2\pi)^n}.$$

l'intégrale étant prise au sens des intégrales oscillantes. Nous poserons

$$h = -(x-y) \cdot (\xi-\eta)$$

et, pour toute fonction $f(x, y, \xi, \eta)$ telle que l'intégrale oscillante ait un sens :

$$(2.14) \quad I(f)(x, \xi) = \int e^{-ih} f(x, y, \xi, \eta) \frac{dy d\eta}{(2\pi)^n}$$

Pour tout N on peut écrire, en utilisant la formule de Taylor :

$$(2.15) \quad r_N(a, b)(x, \xi) = \sum_{|\gamma|=N} \frac{1}{\gamma!} \int_0^1 I(f_{\gamma, \lambda}) d\lambda.$$

où l'on pose :

$$(2.16) \quad \begin{aligned} f_{\gamma, \lambda} &= D_{\xi}^{\gamma} a(x, \xi_{\lambda}) \partial_y^{\gamma} b(y, \xi) \\ \xi_{\lambda} &= \xi + \lambda(\eta - \xi) \quad \forall \lambda \in [0, 1] \end{aligned}$$

Examinons les majorations vérifiées par les $f_{\gamma, \lambda}$. Pour cela, nous utilisons les notations suivantes :

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \delta' &= \sup_j \delta_j & r &= |\xi| \\ g(x, \xi, y, \eta) &= 1 + \sum_i |x_i - y_i| |\xi|^{\delta_i} + |\xi_i - \eta_i| |\xi|^{-\rho_i}. \end{aligned}$$

Lemme 2.1.

Pour tout compact $K \subset \Omega$, et pour tout multi-indice (α, β, p, q) , il existe $C > 0$ tel que l'on ait, (en écrivant f au lieu de $f_{\gamma, \lambda}$) :

$$(2.18) \quad |\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \partial_y^p \partial_{\eta}^q f| \leq C (1 + |\xi| + |\eta|)^{\mu + \mu' + k^+ + k'^+} + \delta' (|\alpha| + |p|)$$

pour tout $(x, y, \xi, \eta) \in K \times K \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De plus, pour tout $C_1 > 0$, il existe $C > 0$ et $\ell \geq 0$ tels que, pour tout $(x, y, \xi, \eta) \in K \times K \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$(2.19) \quad C_1^{-1} |\xi| \leq |\eta| \leq C_1 |\xi| \quad \text{et} \quad |\xi| \geq 1,$$

on ait :

$$(2.20) \quad \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_y^P \partial_\eta^q f \right| \leq C (1+|\xi|)^{\mu+\mu'+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)} \\ \times \psi(x,\xi)^{k+k'-(\varepsilon,\beta)-\varepsilon N} (1+|\xi|)^{(\delta,P)-(\rho,q)} g^\ell.$$

Démonstration :

L'estimation (2.18) est vérifiée pour tous symboles a et b tels que $a \in S_{o,\delta}^{\mu+k,+}(\Omega)$ et $b \in S_{o,\delta'}^{\mu'+k',+}(\Omega)$ et $0 \leq \delta' < 1$.

Pour vérifier (2.20) majorons d'abord le second facteur $\partial_y^\gamma b(y,\xi)$ (avec $|\gamma| = N$) et ses dérivées. D'après la définition 2.1, on a :

$$\left| \partial_\xi^\beta \partial_y^{P+\gamma} b(y,\xi) \right| \leq C (1+|\xi|)^{\mu'-(\rho,\beta)+(\delta,\gamma)} \psi(y,\xi)^{k'-(\varepsilon,\beta)} (1+|\xi|)^{(\delta,P)}.$$

Or il existe $C > 0$ tel que :

$$C^{-1} g^{-1} \leq \frac{\psi(y,\xi)}{\psi(x,\xi)} \leq C g$$

On peut donc écrire ;

$$\psi(y,\xi)^{k'-(\varepsilon,\beta)} \leq C \psi(x,\xi)^{-(\varepsilon,\beta)} g^{(\varepsilon,\beta)+k'}$$

Majorons maintenant le facteur $D_\xi^\gamma a(x,\xi_\lambda)$ (avec $|\gamma| = N$) dans une région où l'inégalité (2.19) est vérifiée. Dans une telle région, il existe $C > 0$ tel que :

$$C^{-1} g^{-1} \leq \frac{\psi(x,\xi_\lambda)}{\psi(x,\xi)} \leq C g.$$

On en déduit :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta+\gamma} \partial_\eta^q a(x,\xi_\lambda) \right| \leq C (1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta+\gamma+q)} \psi(x,\xi_\lambda)^{k-(\varepsilon,\beta+\gamma)} \\ \leq C \psi(x,\xi)^{k-\varepsilon(\beta+\gamma)} (1+|\xi|)^{\mu+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta+\gamma+q)} g^{|k|+(\varepsilon,\beta+\gamma)}.$$

Posons : $\ell = |k|+(\varepsilon,\beta+\gamma)$. On déduit de l'inégalité (2.7) :

$$(\delta-\rho,\gamma) \leq -(\varepsilon,\gamma).$$

On a donc :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_y^P \partial_\eta^q f \right| \leq C (1+|\xi|)^{\mu+\mu'+(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)+(\delta-\rho,\gamma)+(\delta,P)-(\rho,q)} \\ \times \psi(x,\xi)^{k+k'-(\varepsilon,\beta+\gamma)} g^\ell$$

En utilisant l'inégalité :

$$(1+|\xi|)^{(\delta-\rho, \gamma)} \psi(x, \xi)^{-(\varepsilon, \gamma)} \leq C \psi(x, \xi)^{-(\varepsilon, \gamma)} \leq C \psi(x, \xi)^{-N},$$

on en déduit (2.20).

Il nous reste à démontrer que, si une fonction $f(x, y, \xi, \eta)$, vérifie les inégalités (2.18) et (2.20), alors l'intégrale $I(f)(x, \xi)$, définie en (2.14), est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu+\mu', k+k'-N}(\Omega)$.

Pour cela introduisons une fonction de troncature $\chi(\xi, \eta) \in S^0$ telle que :

$$(2.21) \quad \begin{cases} \chi(\xi, \eta) = 1 & \text{si } |\xi| \leq 2(1+|\xi-\eta|) \\ \chi(\xi, \eta) = 0 & \text{si } |\xi| \geq 3(1+|\xi-\eta|), \end{cases}$$

et majorons successivement $I(\chi f)$ et $I(1-\chi f)$ au moyen des lemmes suivants.

Lemme 2.2.

Si f vérifie (2.18), l'intégrale $I(\chi f)(x, \xi)$ est dans $S^{-\infty}(\Omega)$.

Démonstration :

Les dérivées $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f$ vérifiant des majorations du même type que (2.18), il suffit de majorer $I(\chi f)$ lui-même. Considérons l'opérateur différentiel :

$$L = (1 + |\xi - \eta|^2)^{-1} (1 - \Delta_y)$$

Il vérifie :

$$L e^{-i(x-y, \xi-\eta)} = e^{-i(x-y, \xi-\eta)}.$$

On a donc, pour tout entier M :

$$I(\chi f) = I((L^M) \chi f).$$

Si f vérifie (2.18), on a pour tout x dans K ; avec $C > 0$ et m convenables :

$$|(L^M) \chi f| \leq C (1+|\xi-\eta|^2)^{-M} (1+|\xi|+|\eta|)^{m+2\delta'M}$$

On en déduit :

$$|I(\chi f)(x, \xi)| \leq C \int (1+|\xi-\eta|^2)^{-M} (1+|\xi|+|\eta|)^{m+2\delta'M} dy d\eta.$$

On peut supposer que y décrit un ensemble compact. En utilisant les majorations (2.21) vérifiées sur le support de χ , et le fait que $\delta' < 1$, on en déduit bien que $I(\chi f)$ est dans $S^{-\infty}(\Omega)$.

Majorons maintenant $I((1-\chi)f)$. Dans le support de $(1-\chi)f$ on utilise (2.20). Il nous suffit donc de démontrer :

Lemme 2.3.

Soit $f(x,y,\xi,\eta) \in C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ et $C_1 > 0$ tels que :

$$(x,y,\xi,\eta) \in \text{supp } f \Rightarrow (x,y) \in K \times K, \quad |\xi| > C_1 \text{ et } C_1^{-1}|\xi| \leq |\eta| \leq C_1|\xi|.$$

On suppose qu'il existe $\ell > 0$ tel que pour tout multi-indice (α, β)

$$(2.22) \quad \left| \partial_y^\alpha \partial_\eta^\beta f(x,y,\xi,\eta) \right| \leq C g(1+|\xi|)^{(\delta,\alpha)-(\rho,\beta)} \ell$$

Alors l'intégrale $I(f)$ est bornée.

Démonstration :

Pour ce lemme on peut évidemment supposer que $\delta_i = \rho_i$ pour tout i .

Considérons l'opérateur différentiel par rapport aux variables y, η :

$$L = \left(1 + \sum_1^n |x_i - y_i|^2 r^{2\delta_i} + \sum_1^n |\xi_i - \eta_i|^2 r^{-2\delta_i} \right)^{-1} \\ \left(1 - \sum_1^n r^{2\delta_i} \partial_{\eta_i}^2 - \sum_1^n r^{-2\delta_i} \partial_{y_i}^2 \right).$$

Cet opérateur vérifie $L(e^{ih}) = e^{ih}$, donc pour tout entier N :

$$I(f) = I(({}^tL)^N f)$$

et d'après (2.22) :

$$|({}^tL)^N f| \leq C \left(1 + \sum_1^n |x_i - y_i|^2 r^{\delta_i} + \sum_1^n |\xi_i - \eta_i|^2 r^{-\delta_i} \right)^{\ell - 2N}$$

Pour N assez grand, on peut écrire :

$$|I(f)| \leq C \int \left(1 + \sum_1^n |x_i - y_i|^2 r^{\delta_i} + \sum_1^n |\xi_i - \eta_i|^2 r^{-\rho_i} \right)^{\ell - 2N} dy d\eta$$

cette intégrale étant convergente. Elle est alors indépendante de r , d'où le résultat.

On peut énoncer aussi :

Proposition 2.2.

Si $A \in \text{OPS}_{\rho, \delta, \epsilon}^{\mu, k}(\Omega)$ on a $A^* \in \text{OPS}_{\rho, \delta, \epsilon}^{\mu, k}(\Omega)$.

On a le résultat suivant sur les séries de symboles.

Proposition 2.3.

Soit $a_j \in S_{\rho, \delta, \epsilon}^{\mu, -\epsilon_j}$ une suite arbitraire de symboles ($\mu \in \mathbb{R}$).

Il existe un $a \in S_{\rho, \delta, \epsilon}^{\mu, 0}$ tel que pour tout entier N :

$$a - \sum_{j < N} a_j \in S_{\rho, \delta, \epsilon}^{\mu, -\epsilon N}$$

La démonstration est dans Beals [1].

III - CONSTRUCTION DE PARAMETRIXES

On considère un polynôme différentiel :

$$(3.1) \quad P(x, \xi) = \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}} a_{\alpha, \gamma} x^\gamma \xi^\alpha$$

On a vu (exemple 2.1) que, pour tous vecteurs ρ et δ vérifiant (1.2), $P(x, \xi)$ est dans $S_{\rho, \delta, 1}^{\mu, k}(\Omega)$, où μ et k sont définis par :

$$(3.2) \quad \mu = \sup_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}} (\rho, \alpha) - (\delta, \gamma) \quad k = \sup_{\mathcal{M}} |\alpha| + |\gamma|.$$

La première étape de la construction d'une paramétrix n'utilise que l'hypothèse H1, que nous allons rappeler :

(H1) Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $A > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout multi-indice (α, β) il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(3.3) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta P(x, \xi)| \leq C |P(x, \xi)| (1 + |\xi|)^{(\delta, \alpha) - (\rho, \beta)} \psi(x, \xi)^{-(\varepsilon, \beta)}$$

$$(3.4) \quad |P(x, \xi)| \geq C (1 + |\xi|)^\mu$$

pour tout $(x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ tel que $\psi(x, \xi) \geq A$.

On a posé :

$$(\varepsilon, \beta) = \sum_i \varepsilon \beta_i$$

la somme ne portant que sur les indices i pour lesquels $\rho_i = \delta_i$. On peut toujours supposer, afin d'appliquer les résultats du §II, que l'on a :

$$0 < \varepsilon < \rho_i - \delta_i$$

pour tout indice i tel que $\rho_i - \delta_i > 0$. On peut alors énoncer :

Proposition 3.1.

Avec les hypothèses ci-dessus, il existe $Q \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$ et

$$R_j \in \bigcap_n S_{\rho', \delta', \varepsilon}^{0, -N}(\Omega) \quad (j=1, 2) \text{ tels que}$$

$$(3.5) \quad Q_P = I + R_1 \quad PQ = I + R_2$$

Démonstration :

On va chercher Q sous forme d'un développement $Q \sim \sum Q_j$, où $Q_j \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, -\varepsilon j}(\Omega)$. Pour former Q_0 choisissons une fonction $\chi(\mu)$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ égale à 0 si $\mu \leq A+2$, et posons :

$$Q_0 = \chi(\psi) P^{-1}$$

Comme $\chi \circ \psi$ est dans $S_{\rho, \delta, 1}^{0,0}(\Omega)$ (voir démonstration de la proposition 2.3) Q_0 est bien dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$. On définit ensuite les Q_j par la relation de récurrence :

$$Q_k = \frac{1}{P} \sum_{|\alpha|+j=k} \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha Q_j \partial_x^\alpha P$$

Comme dans tous les Q_k ont leur support inclus dans l'ensemble des (x, ξ) tels que $\psi(x, \xi) \geq A$, on vérifie par récurrence que Q_k est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, -\varepsilon k}(\Omega)$. La proposition 2.3 assure l'existence d'un élément Q de $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$ tel que pour tout N , on ait :

$$(3.6) \quad Q - \sum_{j < N} Q_j \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, -\varepsilon N}(\Omega) .$$

Vérifions que $Q_0 P - I$ est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -N}(\Omega)$, pour tout $N > 0$.

Posons en effet $M = \frac{1}{\varepsilon}(N+k)$. On a :

$$(3.7) \quad Q_0 P - I = (Q - \sum_{j < M} Q_j) \circ P + \sum_{\substack{j < M \\ |\alpha| < M-j}} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha Q_j) (\partial_x^\alpha P) - I \\ + \sum_{j < M} R_{M-j} [Q_j, P]$$

La notation $R_{M-j} [Q_j, P]$ est celle de la proposition 2.1. D'après (3.6), puisque P est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}$, le premier terme de (3.7) est bien dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, k-\varepsilon M}$, c'est-à-dire dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -N}$. De même, puisque Q_j est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, -\varepsilon j}$, on a :

$$R_{M-j}[Q_j, P] \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -\varepsilon_j + k - \varepsilon(M-j)}(\Omega) = S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -N}(\Omega) .$$

Quant à la seconde somme de (3.7), elle se réduit à PQ_0^{-1} , c'est-à-dire $\chi_0 \phi^{-1}$, qui est bien, pour tout N , dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -N}$, ce qui achève la démonstration.

Cette proposition nous amène à étudier les opérateurs dont le symbole est, pour tout N , dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{0, -N}(\Omega)$. Ces opérateurs ne sont pas réguliers.

Définition 3.1.

On pose :

$$(3.8) \quad \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu}(\Omega) = \bigcap_j S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, -j}(\Omega)$$

(l'intersection est bien indépendante de $\varepsilon > 0$), et

$$OP \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu}(\Omega) = \bigcap_j OPS_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, -j}(\Omega)$$

Un symbole $a(x, \xi)$ est dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu}(\Omega)$ si, et seulement si pour tout $N \geq 0$, pour tout compact $K \subset \Omega$, et pour tout multi-indice (α, β) , il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(3.9) \quad |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{\mu + (\delta, \alpha) - (\rho, \beta)} \psi(x, \xi)^{-N} \quad \forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n$$

On voit que la restriction d'un tel symbole $a(x, \xi)$ à un cône fermé de $\Omega \times \mathbb{R}^n - 0$ qui ne coupe pas la surface Σ suivante :

$$(3.10) \quad \Sigma = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n - \{0\} \mid \begin{array}{l} x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i > 0 \\ \xi_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \rho_i < 1 \end{array}\}$$

est dans $S^{-\infty}$ dans ce cône. En effet, dans un tel cône, on a une inégalité de la forme :

$$(3.11) \quad \sum_{\delta_i > 0} |x_i| + \sum_{\rho_i < 1} |\xi_i| |\xi|^{-1} \geq C > 0 .$$

Dans un tel cône, la fonction $\psi(x, \xi)$ vérifie :

$$\psi(x, \xi) = 1 + \sum |x_i| |\xi|^{\delta_i} + |\xi_i| |\xi|^{-\rho_i} \geq C |\xi|^\alpha$$

en posant :

$$\alpha = \inf \left[\inf_{\delta_i > 0} \delta_i, \inf_{\rho_i < 1} 1 - \rho_i \right],$$

ce qui, d'après (3.9), implique bien que a est dans $S^{-\infty}$ dans ce cône. La proposition 3.1 suffit donc à construire le symbole d'une paramétrix à gauche pour P dans tout cône défini par une inégalité telle que (3.11). Désormais, nous nous placerons donc dans un voisinage conique d'un point de Σ , où est vérifiée une inégalité de la forme :

$$(3.12) \quad \sum_{\delta_i > 0} |x_i| + \sum_{\rho_i < 1} |\xi_i| |\xi|^{-1} \leq C$$

La proposition 2.1 montre que les relations

$$A \in OPS_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}(\Omega) \quad \text{et} \quad B \in OP\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'}(\Omega)$$

entraînent :

$$A_0 B \text{ et } B_0 A \in OP\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu'}(\Omega) \quad \text{et} \quad B^* \in OP\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'}(\Omega).$$

Nous pouvons donner un résultat plus précis pour la composition quand A est un opérateur différentiel de la forme (3.1), μ et k étant donnés par (3.2). Pour cela nous reprenons les notations de l'exemple 2.2. Quitte à restreindre l'ouvert Ω au voisinage d'un point donné, on peut supposer que tout point (x, ξ) de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $(x, \xi) = (x_0, \xi_0) + (x_1, \xi_1)$, avec (x_0, ξ_0) dans Σ et (x_1, ξ_1) dans $\Sigma^\perp$. On définit un symbole $A_0(x, \xi)$ en posant :

$$A_0(x, \xi) = A_{(x_0, \xi_0)}(x_1, \xi_1),$$

où le symbole $A_{(x_1, \xi_1)}$ est explicité en (1.11).

D'autre part, posons, comme en (1.12) :

$$(3.13) \quad X' = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i < \rho_i\}.$$

et

$$X'' = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad x_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } \delta_i = \rho_i\}.$$

La variable de $\mathbb{R}^n$ sera notée $x = x' + x''$, et la variable duale $\xi = \xi' + \xi''$.

On peut énoncer un résultat sur le développement du composé $A_0 B$.

Proposition 3.2.

Soient $A(x, \xi)$ un polynôme différentiel de la forme (1.1), ρ, δ , et μ vérifiant (1.2) et (1.3), et $B(x, \xi)$ un symbole dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'}(\Omega)$ ($\mu' \in \mathbb{R}$).

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que le symbole composé vérifie :

$$(3.14) \quad A_0 B(x', x'', \xi', \xi'') - e^{-ix' \cdot \xi'} A_0(x', x'', D_{x'}, \xi'') [e^{ix' \cdot \xi'} B(x', x'', \xi', \xi'')] \\ \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu' - \varepsilon}(\Omega).$$

Démonstration :

On a vu (exemples 2.1 et 2.2) qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$A - A_0$ est dans $S_{\rho, \delta, 1}^{\mu - \varepsilon_1, k+1}(\Omega)$, d'où l'on déduit :

$$(3.15) \quad (A - A_0) \circ B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu' - \varepsilon_1}(\Omega).$$

Pour le composé de A_0 et B , on a la formule exacte :

$$(3.16) \quad A_0 B(x', x'', \xi', \xi'') = e^{-ix' \cdot \xi'} \sum_{(\alpha, \gamma) \in \mathcal{M}_\delta} a_{\alpha\gamma}(x) x^\gamma D_{x'}^{\alpha'} (\xi'' + D_{x''})^{\alpha''} [e^{ix' \cdot \xi'} B]$$

Il résulte de (3.9) que si B est dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'}(\Omega)$, on a :

$$(3.17) \quad e^{ix' \cdot \xi'} B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'} \quad D_{x'}^\alpha B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu' + (\delta, \alpha)} \\ \xi^\alpha B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu' + (\rho, \alpha)} \quad x^\alpha B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu' - (\delta, \gamma)}$$

Si l'on développe $(\xi'' + D_{x''})^{\alpha''}$ dans (3.16), on obtient une somme de termes de la forme :

$$(3.18) \quad e^{-ix' \cdot \xi'} \sum_{\alpha \gamma} b_{\alpha \gamma} x^\gamma D_{x'}^{\alpha'} \xi''^{\alpha''} D_{x''}^{B''} [e^{ix' \cdot \xi'} B]$$

D'après (3.17) ces termes sont dans :

$$\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu' + (\rho'', \alpha'') + (\delta'', \beta'') + (\rho, \alpha') - (\delta, \gamma)}$$

Puisque ces termes proviennent du développement de (3.16), les indices vérifient :

$$(\rho'', \alpha'' + \beta'') + (\rho', \alpha') - (\delta, \gamma) = \mu$$

Les termes de la somme (3.16) sont donc dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu' + (\delta'' - \rho'', \beta'')}$. Comme, par définition, $\delta_i'' < \rho_i''$ pour tout i (X' et X'' sont définis en 3.13), tous les termes correspondant à $\beta'' \neq 0$, sont dans un $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu' - \varepsilon_2}$, avec $\varepsilon_2 > 0$. Quant aux termes correspondant à $\beta'' = 0$, ils se réduisent à :

$$e^{-ix' \cdot \xi'} A_0(x', x'', D_{x'}, \xi'') [e^{ix' \cdot \xi'} B]$$

ce qui démontre la proposition 3.2, en choisissant $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

On en déduit aussitôt, par passage à l'adjoint.

Corollaire.

Le symbole $B \circ A$ vérifie :

$$(3.19) \quad B \circ A(x, \xi) = e^{-ix' \cdot \xi'} B(x', x'', D_{x'}, \xi'') [e^{ix' \cdot \xi'} A] \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu' - \varepsilon}(\Omega).$$

On adoptera la notation suivante :

$$(3.20) \quad a \circ_{x'} b(x, \xi) = e^{-ix' \cdot \xi'} a(x', x'', D_{x'}, \xi'') e^{ix' \cdot \xi'} b(x', x'', \xi', \xi'').$$

On vérifie, avec les mêmes calculs que dans la proposition 2.1, l'implication:

$$A \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}, \quad B \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu', k'} \Rightarrow A \circ_{x'} B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu + \mu', k + k'}$$

On en déduit l'implication suivante :

$$A \in S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{\mu, k}, \quad B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu'} \Rightarrow A \circ_{x'} B \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu + \mu'}$$

La proposition suivante va nous permettre de terminer la construction de la paramétrix. Cette proposition sera démontrée au §IV.

Proposition 3.3.

Si un opérateur $P(x, D_x)$ vérifie les hypothèses du théorème 1, l'opérateur différentiel $P_0(x', x'', D_{x'}, \xi'')$ est supposé inversible à gauche dans $\mathcal{F}'(X)$ en tout point (x'', ξ'') tel que $(0, x'', 0, \xi'')$ soit dans Σ . Alors il existe un symbole $A(x', x'', \xi', \xi'')$ dans $S_{\rho, \delta, \epsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$ tel que l'inverse à gauche de $P_0(x', x'', D_{x'}, \xi'')$ soit $A(x', x'', D_{x'}, \xi'')$.

En admettant cette proposition 3.3, terminons la démonstration du théorème 1.1.

Le symbole $Q_1(x, \xi)$ défini par :

$$Q_1(x, \xi) = Q(x, \xi) - R_1 \circ_{x'} A(x, \xi)$$

est dans $S_{\rho, \delta, \epsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$. En effet, $Q(x, \xi)$ est dans cette classe, et le second terme est dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{\mu}(\Omega)$. On a :

$$Q_1 \circ P = I + R_1 - R_1 \circ_{x'} A \circ_{x'} P \circ \text{ mod. } \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{-\epsilon}(\Omega) .$$

d'après le corollaire de la proposition 3.2. Comme $A \circ_{x'} P \circ = I$, le symbole R_3 défini par :

$$R_3 = Q_1 \circ P - I$$

est dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{-\epsilon}(\Omega)$. On en déduit que $(R_3)^n$ est dans $\mathcal{H}_{\rho, \delta}^{-n\epsilon}(\Omega)$. Il existe donc un symbole classique Q_3 dans $S^0(\Omega)$ tel que :

$$R_3 \sim \sum_{j=0}^{\infty} (-R_3)^j \quad \text{et} \quad Q_3 - I \in \mathcal{H}_{\rho, \delta}^{-\epsilon}(\Omega)$$

Le symbole Q défini par :

$$Q = Q_3 Q_1$$

est dans $S_{\rho, \delta, \epsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$, et vérifie

$$QP = Q_3 Q_1 P = Q_3 (I + R_1) = I \quad \text{mod } S^{-\infty}(\Omega) ,$$

ce qui démontre le théorème 1.1.

IV - ETUDE DE L'INVERSIBILITE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS

Le but de ce § est de démontrer la proposition 3.3, et d'étudier la nature de l'inverse à gauche de l'opérateur différentiel $P_0(x', x'', D_{x'}, \xi'')$ (avec les notations de la proposition 3.2), ou $P_\rho(y, x', D_x, \xi')$ (avec les notations de l'introduction), associé à un opérateur $P(x, D_x)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.1.

On vérifie que le symbole $P_0(x', x'', \xi', \xi'')$ a la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$(4.1) \quad P_0(x, \xi) = \lambda^{-\mu} P_0(x_1 \lambda^{-\delta_1}, \dots, x_n \lambda^{-\delta_n}, \xi_1 \lambda^{\rho_1}, \dots, \xi_n \lambda^{\rho_n}) \quad \forall \lambda > 0$$

Il nous suffit donc d'étudier l'inverse de $A_0(x', x'', D_{x'}, \xi'')$ quand ξ'' vérifie :

$$(4.2) \quad \sum |\xi''_i|^2 = 1,$$

la sommation portant sur les indices i pour lesquels $\rho_i = 1$. La lettre K désignera un compact de $\sum$ dans lequel cette relation est vérifiée.

Avec les notations de l'introduction, nous allons majorer le symbole $P_\rho(y, x', \xi')$ de cet opérateur.

Proposition 4.1.

Pour tout compact K de $\sum$, où (4.2) est vérifiée, pour tout multi-indice $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(4.3) \quad \left| \partial_{\rho}^{\alpha} \partial_{\gamma}^{\beta} \partial_{x'}^{\gamma} \partial_{\xi'}^{\delta} P_{\rho}(y, x', \xi') \right| \leq C \left| P_{\rho}(y, x', \xi') \right| (1 + |x'| + |\xi'| + |y|)^{\varepsilon|\gamma|}$$

$$(4.4) \quad \left| P_{\rho}(y, x', \xi') \right| \geq C$$

pour tout $\rho \in K$, pour tout $(y, x', \xi') \in Y \times X' \times X'^*$ tels que

$$(4.5) \quad |y| + |x'| + |\xi'| \geq A$$

La vérification de ces majorations est immédiate à partir de l'hypothèse H1 du théorème 1.1, et de (4.2).

Cette proposition nous amène à étudier, comme dans [3], une classe d'opérateurs pseudo-différentiels sur x , dépendant des paramètres $\rho \in \Sigma$ et $y \in Y$.

Définition 4.1.

Pour tout p réel et $\varepsilon > 0$, désignons par $S_\varepsilon^p(\Sigma, Y, X)$ l'ensemble des fonctions $a(\rho, y, x', \xi')$ C^∞ sur $\Sigma \times Y \times X' \times X'^*$ telles que, pour tout compact K de Σ vérifiant (4.2), pour tout multi-indice $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$(4.6) \quad |\partial_\rho^\alpha \partial_y^\beta \partial_{x'}^\gamma \partial_{\xi'}^\delta a(\rho, y, x', \xi')| \leq C (1 + y + |x'| + |\xi'|)^{p - \varepsilon |\beta|}$$

pour tout $\rho \in K$, pour tout $(y, x', \xi') \in Y \times X' \times X'^*$.

Tout polynôme en (y, x', ξ') dépendant de manière C^∞ du paramètre ρ est dans une classe $S_1^p(\Sigma, Y, X)$. A tout symbole A dans $S_\varepsilon^p(\Sigma, Y, X)$ on associe un opérateur pseudo-différentiel $A(\rho, y, x', D_x)$ sur X , dépendant des paramètres ρ et y . Les propriétés de cette classe d'opérateurs sont classiques. En particulier, si A est dans $S_\varepsilon^p(\Sigma, Y, X)$ et B dans $S_\varepsilon^{p'}(\Sigma, Y, X)$, le composé $A \circ B$ vérifie, pour tout entier N .

$$(4.7) \quad A \circ B - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha A) (\partial_{x'}^\alpha B) \in S^{p+p'-\varepsilon N}(\Sigma, Y, X).$$

On en déduit, suivant la propriété classique rappelée dans la proposition 3.1, que si un symbole $P(\rho, y, x', \xi')$ dans une classe $S_\varepsilon^p(\Sigma, Y, X)$ vérifie (4.3) et (4.4), alors il existe un élément Q de $S_\varepsilon^0(\Sigma, Y, X)$ tel que :

$$(4.8) \quad \begin{aligned} Q(\rho, y, x', D_x) P(\rho, y, x', D_x) &= I \quad \text{mod. } S^{-\infty}(\Sigma, Y, X) \\ P(\rho, y, x', D_x) Q(\rho, y, x', D_x) &= I \quad \text{mod. } S^{-\infty}(\Sigma, Y, X). \end{aligned}$$

La proposition 3.3 sera donc une conséquence de la suivante :

Proposition 4.2.

Soit un symbole $P(\rho, y, x', \xi')$ dans une classe $S_1^p(\sum, Y, X)$, vérifiant (4.3) et (4.4). On suppose qu'il existe ρ_0 dans $\sum$ tel que, pour tout y dans Y , l'opérateur $P(\rho, y, x', D_x)$ soit inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$. Alors il existe un voisinage $V(\rho_0)$ dans $\sum$ et un symbole $A(\rho, y, x', \xi')$ dans $S_\varepsilon^0(\sum, Y, X)$ tel que pour tout $\rho \in V(\rho_0)$, pour tout $y \in Y$, on ait :

$$(4.9) \quad A(\rho, y, x', D_x) P(\rho, y, x', D_x) = I$$

La démonstration est identique à celle de [3], déjà rappelée dans l'article [6].

Mais l'hypothèse de la proposition 4.2 n'est pas encore exactement l'hypothèse H2 du théorème 1.1. Une nouvelle réduction est nécessaire, et obtenue grâce à la :

Proposition 4.3.

Soit un symbole $P(\rho, y, x', \xi')$ dans une classe $S_1^p(\sum, Y, X)$ vérifiant (4.3) et (4.4). Alors :

i) - Pour tout $\rho_0 \in \sum$, il existe $A > 0$ tel que l'opérateur $P(\rho_0, y, x', D_x)$ soit inversible à gauche dans $\mathcal{S}'(X)$, pour tout y tel que $|y| \geq A$.

ii) - Si en un point $y_0 \in Y$ l'opérateur $P(\rho_0, y_0, x', D_x)$ est inversible à gauche, alors il existe un voisinage $V(y_0)$ de y_0 dans Y tel que pour tout y dans $V(y_0)$, l'opérateur $P(\rho_0, y, x', D_x)$ soit inversible à gauche.

Si un opérateur $P(x, \xi)$ vérifie (H1) et (H2), alors en tout point (ρ_0, y_0) de $\sum \times Y$, l'opérateur $P_\rho(y, x', D_x)$ vérifie les hypothèses de la proposition 4.3. Les propositions ci-dessus assurent alors l'existence d'une inverse à gauche de la forme $A(\rho, y, x', D_x)$, où le symbole A est dans $S_{\rho, \delta, \varepsilon}^{-\mu, 0}(\Omega)$, ce qui démontre la proposition 3.3.

V - EXEMPLESExemple 1.

Considérons l'opérateur différentiel P dans R^3

$$(5.1) \quad P(x, D_x) = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + (x_1^2 + x_2^2)^k D_{x_3}^2 + \lambda (x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2}) D_{x_3}.$$

où λ est un nombre complexe non nul, k , ρ_1 et ρ_2 des entiers tels que $2\rho_j < k-1$ pour $j = 1, 2$. La plus grande valeur de μ qu'on puisse espérer est :

$$(5.2) \quad \mu = \sup_{j=1,2} \left(\frac{1}{\rho_j + 1} \right)$$

On voit que le choix suivant de ρ et δ convient :

$$(5.3) \quad \rho = \left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, 1 \right) \quad \delta = (\delta_1, \delta_2, 0)$$

$$j = \sup \left(\frac{2-\mu}{2k}, \frac{1-\mu}{2\rho_j} \right) \quad j = 1, 2$$

On a bien $\delta_j \leq \rho_j$ et l'un au moins des δ_j est égal à $\frac{\mu}{2}$ (celui pour lequel le sup est atteint dans (5.2)), ce qui nous amène à distinguer 3 cas pour l'opérateur P_0 que nous supposons injectif (hypothèse H2) :

$$1) \rho_1 < \rho_2, \text{ donc } \mu = \frac{1}{\rho_1 + 1}, \quad \rho_1 = \delta_1, \quad \rho_2 > \delta_2.$$

Il y a encore 3 cas à distinguer suivant la valeur de δ_2 .

$$a) \text{ si } \rho_1 < \rho_2 < k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu} \right)$$

$$P_0(x, D_{x_1}, \xi_2, \xi_3) = D_{x_1}^2 + \xi_2^2 + \lambda (x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2}) \xi_3$$

$$b) \text{ si } \rho_1 < \rho_2 = k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu} \right)$$

$$P_0(x, D_{x_1}, \xi_2, \xi_3) = D_{x_1}^2 + \xi_2^2 + x_2^{2k} \xi_3^2 + \lambda (x_1^{2\rho_1} + x_2^{2\rho_2}) \xi_3.$$

$$c) \text{ si } \rho_2 > k \left(\frac{1-\mu}{2-\mu} \right)$$

$$P_0(x, D_{x_1}, \xi_2, \xi_3) = D_{x_1}^2 + \xi_2^2 + x_2^{2k} \xi_3^2 + \lambda x_1^{2\rho_1} \xi_3.$$

Dans les 3 cas nous supposons l'opérateur $P_o(x, D_{x_1}, \xi_2, \xi_3)$ injectif dans $\mathcal{J}'(R)$ pour $(x_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\xi_3 \neq 0$ (il suffit de prendre $\xi_3 = \pm 1$).

2) si $\rho_1 = \rho_2$ on a $\rho_1 = \delta_1$, $\rho_2 = \delta_2$, donc

$$P_o(x, D_{x_1}, D_{x_2}, \xi_3) = D_{x_1}^2 = D_{x_2}^2 + \lambda(x_1^{2\rho} + x_2^{2\rho}) \xi_3$$

Nous supposons cet opérateur injectif dans $\mathcal{J}'(R^2)$ pour $\xi_3 = \pm 1$

3) Si $\rho_1 > \rho_2$, il y a une étude analogue à celle du cas 1.

Pour que les conditions d'ellipticité générale (H1) soient vérifiées, il suffit dans tous les cas $\lambda \notin \mathbb{R}$. Si les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées l'opérateur P admet une paramétrix à gauche dans $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}(\Omega)$.

Exemple 2.

On peut aussi traiter certains opérateurs d'ordre 2 elliptiques en dehors d'un point et dont les termes d'ordre 2 s'annulent sur une surface passant par ce point.

$$(5.4) \quad P(x, D_x) = D_{x_1}^2 + (x_1^2 + x_2^2)^k D_{x_2}^2 + \lambda(x_1 + x_2^\alpha) D_{x_2}$$

où $\lambda \notin \mathbb{R}$, k et α sont des entiers tels que $\alpha > \frac{k}{2} \geq 1$. Le choix suivant de μ, ρ et δ convient :

$$\mu = \frac{2}{3} \quad \rho = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \quad \delta = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3k}\right)$$

La condition d'ellipticité générale (H1) est vérifiée si $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Posons :

$$P_o(x, D_{x_1}, \xi_2) = D_{x_1}^2 + x_2^{2k} \xi_2^2 + \lambda x_1 \xi_2$$

Nous supposons cet opérateur injectif dans $\mathcal{J}'(R)$ pour $x_2 \in \mathbb{R}$ et $\xi_2 = \pm 1$.

Exemple 3.

Soit l'opérateur :

$$(5.5) \quad P(x, D_x) = D_{x_1}^2 + D_{x_2}^2 + x_1^{2k} D_{x_3}^2 + \lambda x_1^\rho D_{x_3}$$

où $\rho < k-1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition d'ellipticité générale (H1) est vérifiée, et l'on a :

$$P_0(x, D_{x_1}, \xi_2, \xi_3) = D_{x_1}^2 + \xi_2^2 + \lambda x_1^0 \xi_3$$

On suppose cet opérateur injectif dans $\mathcal{J}'(\mathbb{R})$ pour $\xi_3 = \pm 1$ et $\xi_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une paramétrix à gauche dans $\mathcal{L}_{\rho, \delta}^{-\mu}(\mathbb{R}^3)$, avec $\mu = \frac{2}{\rho+2}$, $\rho = (\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}, 1)$, $\delta = (\frac{\mu}{2}, 0, 0)$.

Exemple 4.

Soit l'opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^2$:

$$(5.6) \quad P = (x^2 + t^2)^k (D_x^2 + D_t^2)^2 + a D_t^2 + b t^2 D_x^2 + \lambda D_x \text{ où } k \geq 2$$

où $a, b, \lambda \in \mathbb{C}$. Il faut d'abord choisir des vecteurs $\rho = (\rho_1, \rho_2)$ et $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ vérifiant (1.2). On voit que le choix :

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \rho_1 &= \delta_1 = \sup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{k+1} \right) \quad (\text{donc } \delta_1 < 1 \text{ si } k \geq 2). \\ \rho_2 &= 1 \quad \delta_2 = \frac{2-\rho_1}{k} \end{aligned}$$

convient. Pour déterminer l'opérateur différentiel que nous supposons injectif, il nous faut donc distinguer 3 cas :

1er cas :

$$\rho_1 = \frac{1}{2} > \frac{2}{k+1} \text{ , c'est-à-dire } k > 3$$

$$P_0(t, x, D_t, \xi) = x^{2k} \xi^4 + a D_t^2 + b t^2 \xi^2 + \lambda \xi.$$

Nous supposons donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour $\xi = \pm 1$ l'opérateur différentiel $P_0(t, x, D_t, \xi)$ est injectif dans $\mathcal{J}'(\mathbb{R})$.

2ème cas :

$$\rho_1 = \frac{1}{2} = \frac{2}{k+1} \text{ , c'est-à-dire } k = 3. \text{ Ici :}$$

$$P_0(t, x, D_t, \xi) = (t^2 + x^2)^k \xi^4 + a D_t^2 + b t^2 \xi^2 + \lambda \xi$$

3ème cas :

$$\rho_1 = \frac{2}{k+1} > \frac{1}{2} \text{ , c'est-à-dire } k = 2. \text{ Ici :}$$

$$P_o(t, x, D_t, \xi) = (t^2 + x^2)^k \xi^4 + D_t^2$$

Explicitons maintenant la condition (H1) dans le cas où $k > 3$. On peut alors montrer que la réunion des 2 conditions suivantes :

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |(x^2+t^2)^k \xi^4 + at^2 + bt^2 \xi^2| = |p_1| \geq C ((x^2+t^2)^k |\xi|^4 + |t|^2 + |t|^2 + |t^2 \xi^2|) \\ (5.9) \quad |(x^2+t^2)^k (\xi^2+t^2)^2 + at^2| = |p_2| \geq C ((x^2+t^2)^k (\xi^2+t^2)^2 + |t|^2). \end{array} \right.$$

implique les majorations de l'hypothèse H1, avec $\varepsilon = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEALS - General calculus for pseudo differential operators.
Duke Math. Journal 42 n°1, march 1975.
- [2] BOLLEY - CAMUS - HELFFER - Remarques sur l'hypoellipticité.
C.R.A.S. t 283 (1976) p.979-982
et exposé aux journées "Equations aux Dérivées Partielles"
(Rennes 1976)
(Séminaires d'Analyse Fonctionnelle de Rennes).
- [3] BOUTET de MONVEL - GRIGIS - HELFFER - Paramétrixes d'opérateurs
pseudo différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque
34-35 (1976) p. 93-121.
- [4] GRUSHIN - Hypoelliptic differential equations and pseudo differential
operators with operator valued symbols. Math U.S.S.R. Sbornik
17 (1972) n°4 p. 497-514.
- [5] HORMANDER - Pseudo differential operators and hypoelliptic equations.
Amer - Math - Soc - Proc - of Symp Pure Math 10 (1966) 138-183.
- [6] NOURRIGAT - Paramétrixes pour une classe d'opérateurs hypoelliptiques.
A paraître aux Comm. in Partial Differential Equations.