

P. BOLLEY

J. CAMUS

Hypoellipticité pour une équation d'évolution abstraite du second ordre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 3

« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 3, p. 1-32

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__3_A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPOELLIPTICITE POUR UNE EQUATION D'EVOLUTION ABSTRAITE DU SECOND ORDRE

P. BOLLEY

Institut de Mathématiques & Informatique
Université de Nantes

44 000 - NANTES

J. CAMUS

UER Mathématiques & Informatique
Université de Rennes

35 000 - RENNES

Dans cet article on étudie l'hypoellipticité de l'opérateur suivant :

$$P = (\partial_t + at A) (\partial_t + bt^k A) + cA$$

où $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, A est un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert H , a, b, c sont des nombres complexes et k est un entier impair > 1 . Plus précisément on démontre le résultat suivant :

THEOREME :

Si $\operatorname{Re} a \cdot \operatorname{Re} b < 0$ et si $\frac{c}{a} \notin \mathbb{Z}$, l'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$.

Cette notion d'hypoellipticité est précisée plus loin ; en particulier lorsque $H = L^2(\mathbb{R})$ et $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$ on retrouve l'hypoellipticité classique.

Cette étude vient à la suite de plusieurs travaux faits sur des opérateurs de la forme $(\partial_t + at A) (\partial_t + bt A) + cA$ (cf. [5], [7], ...) ou plus généralement $(\partial_t + at^k A) (\partial_t + bt^k A) + ct^{k-1} A$ (cf. [4], [3], [6], [1], ...).

La démonstration du résultat annoncé est faite tout d'abord dans le cas où A est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné par une méthode qui nous a été inspirée par les techniques utilisées dans [7] et [3] ; puis dans le cas général on opère comme dans [1].

Notons que les méthodes de réduction à une variable et d'homothéties dans le cas où $A = -i \frac{\partial}{\partial x}$, utilisées par exemple dans [2] ne semblent pas s'adapter ici.

I - CAS OU A EST DEFINI POSITIF SUR H ET A INVERSE A^{-1} BORNE.

1-1 - NOTATIONS.

On utilise les notations de (cf. aussi) que l'on rappelle ici. Dans ce chapitre I, A désigne un opérateur linéaire, non borné dans un espace de Hilbert H de domaine dense dans H, auto-adjoint défini positif et ayant un inverse borné A^{-1} (par exemple l'opérateur A peut-être $(1 - \Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur \mathbb{R}^n ou bien une extension auto-adjointe de $|D_x|$ sur \mathbb{R}).

On introduit une famille "d'espaces de Sobolev" H^s pour $s \in \mathbb{R}$ ("dans la variable x") définis par A de la façon suivante : si $s \geq 0$, H^s est l'espace des éléments u de H tels que $A^s u \in H$ muni de la norme $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$ où $\|u\|_0$ désigne la norme de u dans H ; si $s < 0$, H^s est le complété de H pour la norme $\|u\|_s = \|A^s u\|_0$. Etant donnés s et m dans \mathbb{R} , A^m est un isomorphisme (pour les structures d'espaces de Hilbert) de H^s sur H^{s-m} (par exemple l'opérateur A étant l'opérateur $(1 - \Delta_x)^{\theta/2}$, où $\theta > 0$, sur \mathbb{R}^n alors l'espace H^s est l'espace de Sobolev classique dans \mathbb{R}^n d'ordre $s\theta$).

On note par H^∞ l'intersection des espaces H^s et par $H^{-\infty}$ leur réunion. On munit le premier de la topologie limite projective et le deuxième de la topologie limite inductive. Puisque pour chaque $s \in \mathbb{R}$, H^s et H^{-s} peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre, H^∞ et $H^{-\infty}$ peuvent être regardés comme dual l'un de l'autre.

Soit J un sous ensemble ouvert de \mathbb{R} . On note $C^\infty(J; H)$ l'espace des fonctions C^∞ dans J à valeurs dans H . C'est l'intersection des espaces $C^j(J; H^k)$ (des fonctions j fois continuellement différentiables dans J à valeurs dans H^k) pour tous j et k entiers > 0 . On munit $C^\infty(J; H)$ de la topologie C^∞ naturelle. Si K est un sous-ensemble compact de J on note $C_0^\infty(K; H)$ le sous-espace de $C^\infty(J; H)$ formé des fonctions qui s'annulent identiquement hors de K. C'est un sous-espace formé de $C^\infty(J; H)$ et on note $(C_0^\infty(J; H))$ la limite inductive des $C_0^\infty(K; H)$ pour tout sous-ensemble compact K de J.

On note par $\mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ le dual de $C_0^\infty(J; H)$; c'est l'espace des distributions dans J à valeurs dans $H^{-\infty}$.

Soit l'opérateur P différentiel sur \mathbb{R} défini par :

$$P = (\partial_t + at A) (\partial_t + bt^k A) + cA$$

où a, b, c sont des nombres complexes, k est un entier impair ≥ 3 .

Définition 1.1. On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de \mathbb{R} si pour tout sous ensemble J' de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J; H^\infty)$ tels que $Pu \in C^\infty(J'; H^\infty)$ alors $u \in C^\infty(J'; H^\infty)$. On dit que P est hypoelliptique au point $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J .

Le résultat important de ce chapitre I est :

THEOREME 1.1.

L'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$ dans chacun des cas suivants :

- i) $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b < 0$, $\frac{c}{a} \neq 1, 2, \dots$
- ii) $\operatorname{Re} a < 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, $\frac{c}{a} \neq 0, -1, -2, \dots$
- iii) $\operatorname{Re} a < 0$, $\operatorname{Re} b < 0$.

I-2 - UNE ESTIMATION SOUS ELLIPTIQUE.

Si J est un intervalle de \mathbb{R} , on note $V(J)$ le complété de $C_0^\infty(J; H^\infty)$ pour la norme :

$$\|u\|_{V(J)} = \left\{ \int \left(\|\partial_t u\|_0^2 + \|t^{\frac{k+1}{2}} Au\|_0^2 + \|A^{\frac{1}{2}} u\|_0^2 \right) dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et $V'(J)$ le dual de $V(J)$.

On a l'estimation suivante :

Proposition 2.1. Si $\operatorname{Re} a(|a|^2 - 2 \operatorname{Re} c \bar{a}) > 0$ alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout u tels que $A^{1/2} u \in V(-T, T)$, on ait :

$$\|u\|_{V(-T, T)} \leq C \|Pu\|_{V'(-T, T)}$$

Démonstration. Pour $u \in C_0^\infty(J; H^\infty)$ où $J =]-T, T[$ on a :

$$\begin{aligned} \int_J ((\partial_t u + bt^k A), (\partial_t \bar{a} t A))_0 dt = \\ \int_J (\|\partial_t u\|_0^2 - abt^{k+1} \|Au\|_0^2 + b(t^k Au, \partial_t u)_0 - a(\partial_t u, tAu)_0) dt \end{aligned}$$

Or par intégrations par parties on a :

$$2 \operatorname{Re} \int_J (\partial_t u, tAu)_0 dt = - \int_J (u, Au)_0 dt$$

$$2 \operatorname{Re} \int_J (\partial_t u, t^k Au)_0 dt = -k \int_J (u, t^{k-1} Au)_0 dt$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (\partial_t u + bt^k A, \partial_t u - atAu)_0 dt \right. &= c\bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (Au, u)_0 dt \} \\ &= \operatorname{Re} \bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J ||\partial_t u||_0^2 - |a|^2 \frac{\operatorname{Re} b \operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J t^{k+1} ||Au||_0^2 dt + \frac{|a|^2}{2} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (u, Au)_0 dt \\ &+ \operatorname{Re}(\bar{a}b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt) - \operatorname{Re}(c\bar{a} \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (Au, u)_0 dt) \\ &= |\operatorname{Re} a| \int_J ||\partial_t u||_0^2 dt - \frac{|a|^2}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Re} a \operatorname{Re} b \int_J t^{k+1} ||Au||_0^2 dt + (\frac{|a|^2}{2} - \operatorname{Re} c\bar{a}) \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \int_J (Au, u)_0 dt \\ &+ \operatorname{Re} \bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Re} \left(\int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt \right) - \operatorname{Im} \bar{a} b \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt \\ &= |\operatorname{Re} a| \int_J ||\partial_t u||_0^2 dt - \frac{|a|^2}{|\operatorname{Re} a|} \operatorname{Re} a \operatorname{Re} b \int_J t^{k+1} ||Au||_0^2 dt \\ &+ \int_J \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \left(\frac{|a|^2}{2} - \operatorname{Re} c\bar{a} - k \frac{\operatorname{Re} \bar{a} b}{2} t^{k-1} \right) (Au, u)_0 dt. \end{aligned}$$

Mais $\frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} (|a|^2 - 2 \operatorname{Re} c\bar{a}) > 0$, $k > 1$ et A est défini positif ; donc il existe $T_1 > 0$ et $C_1 > 0$ tels que si u est nulle pour $|t| \geq T_1$ on a :

$$\int_J \frac{\operatorname{Re} a}{|\operatorname{Re} a|} \left(\frac{|a|^2}{2} - \operatorname{Re} c\bar{a} - \frac{\operatorname{Re} \bar{a} b}{2} k t^{k-1} \right) (Au, u)_0 dt \geq C_1 \int_J ||A^{\frac{1}{2}} u||_0^2 dt$$

De plus pour tout $\epsilon > 0$

$$|2 \operatorname{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt| \leq \epsilon \int_J ||\partial_t u||_0^2 + \frac{1}{\epsilon} \int_J t^{k-1} t^{k+1} ||Au||_0^2 dt$$

Comme $\operatorname{Re} a \operatorname{Re} b < 0$ et $k+1$ pair on voit qu'il existe $C_2 > 0$ et $T_2 > 0$ tels que si u est nulle pour $|t| \geq T_2$ on a :

$$|\operatorname{Rea}| \int_J ||\partial_t u||_0^2 dt - \frac{|a|^2}{|\operatorname{Rea}|} \operatorname{Rea} \operatorname{Reb} \int_J t^{k+1} ||Au||_0^2 dt - \frac{\operatorname{Im} \bar{a} b}{|\operatorname{Rea}|} \operatorname{Im} \int_J (t^k Au, \partial_t u)_0 dt \\ \geq C_2 \left\{ \int_J ||\partial_t u||_0^2 dt + \int_J t^{k+1} ||Au||_0^2 dt \right\}$$

Donc pour $T = \min (T_1, T_2)$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in C_0^\infty(J; H^\infty)$ on ait (avec $J =]-T, T[$)

$$||u||_{V(J)}^2 \leq C | \langle Pu, u \rangle_{V'(J) \times V(J)} |$$

Soit maintenant u tel que $A^{\frac{1}{2}} u \in V(J)$. Alors $Pu \in V'(J)$; en effet Pu s'écrit :

$$Pu = \partial_t^2 u + abt^{k+1} + at\Delta \partial_t u + bkt^{k-1} Au = bt^k A \partial_t u + cAu$$

et $V'(J)$ s'écrit :

$$V'(J) = H^{-1}(J; H) \oplus t^{\frac{k+1}{2}} L^2(J; H) \oplus L^2(J; H)^{-\frac{1}{2}}$$

où $H^{-1}(J; H)$ est l'espace de Sobolev classique d'ordre -1 sur J à valeurs dans H ; on vérifie alors que si $A^{1/2} u \in V(J)$ alors chaque terme de Pu appartient à $V'(J)$.

Soit alors une suite (v_n) de $C_0^\infty(J; H)$ convergeant vers $A^{\frac{1}{2}} u$ dans $V(J)$; la suite (u_n) où $u_n = A^{-1/2} v_n$, qui appartient à $C_0^\infty(J; H)$, converge vers u dans $V(J)$ et $\langle Pu_n, u_n \rangle_{V'(J) \times V(J)}$ converge vers $\langle Pu, u \rangle_{V'(J) \times V(J)}$. D'où le résultat.

Corollaire 2.1. On suppose que $\operatorname{Rea}(|a|^2 - 2 \operatorname{Re} \bar{a}) > 0$. Il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que si $u \in V(-T, T)$ et $A^{1/2} Pu \in V'(-T, T)$ alors $A^{1/2} u \in V(-T, T)$.

Démonstration. A est le générateur infinitésimal d'un semi groupe $(T_h)_{h \geq 0}$ de contractions sur H et qui de plus est holomorphe dans $|\arg h| < \frac{\pi}{2}$. De façon générale $T_h H$ est inclus dans le domaine de A^s pour tout $h > 0$ et $s \geq 0$ et $T_h A^s x = A^s T_h x$ pour tout x appartenant au domaine de A^s .

Soit $u \in V(J)$ (avec $J =]-T, T[$) ; alors $T_h(A^{-\frac{1}{2}}u)$ est tel que $A^{-\frac{1}{2}}T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) \in V(J)$ donc par application de la proposition 2.1 on a pour tout $h \geq 0$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) - A^{-\frac{1}{2}}u}{h} \right\|_{V(J)} &\leq C \left\| P \left(\frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}u) - A^{-\frac{1}{2}}u}{h} \right) \right\|_{V'(J)} \\ &= C \left\| \frac{T_h(A^{-\frac{1}{2}}Pu) - A^{-\frac{1}{2}}Pu}{h} \right\|_{V'(J)} \end{aligned}$$

Comme $A^{-\frac{1}{2}}Pu \in V'(J)$ il s'en suit que le deuxième membre est borné au voisinage de $t = 0$; donc le premier membre est borné et par suite $A^{1/2}u \in V(J)$.

On définit l'espace $W(J)$ par :

$$W(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}); \partial_t^2 u, t^{k+1}A^2u, tA\partial_t u; Au \in L^2(J; H)\}$$

On a le résultat de régularité maximale suivant :

Corollaire 2.2. On suppose que $\frac{\text{Re}a}{|\text{Re}a|}(|a|^2 - 2\text{Re}a\bar{c}) > 0$. Alors il existe $T > 0$ tel que si $u \in V(-T, T)$ et $Pu \in L^2(-T, T; H)$ alors $u \in W(-T, T)$.

Démonstration. 1 - $A^{-\frac{1}{2}}u \in V(J)$ (où $J =]-T, T[$) d'après le corollaire 2.1 car $u \in V(J)$ et $A^{1/2}Pu \in V'(J)$.

2 - On montre maintenant que $t^{\frac{k+1}{2}}Au \in V(J)$

D'après le corollaire 2.1, il suffit de vérifier que $t^{\frac{k+1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}u \in V(J)$ et que $A^{1/2}P(t^{\frac{k+1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}u) \in V'(J)$. Or $t^{\frac{k+1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}u \in V(J)$ car $A^{-\frac{1}{2}}u \in V(J)$. De plus :

$$P(t^{\frac{k+1}{2}}u) = t^{\frac{k+1}{2}}Pu + \alpha t^{\frac{k-3}{2}}u + \beta t^{\frac{k-1}{2}}\partial_t u + \gamma t^{\frac{k+1}{2}}Au + \delta t^{\frac{3k-1}{2}}Au$$

pour certains coefficients α, β, γ et δ . Comme $Pu \in L^2(J; H)$ et $A^{-\frac{1}{2}}u \in V(J)$ on en déduit que $AP(t^{\frac{k+1}{2}}u) \in V'(J)$.

3 - On montre enfin que $\partial_t u \in V(J)$.

D'après le corollaire 2.1, il suffit de vérifier que

$A^{\frac{1}{2}} \partial_t u \in V(J)$ et que $A^{\frac{1}{2}} P(A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) \in V'(J)$. or

$$\partial_t (A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) = A^{\frac{1}{2}} \partial_t^2 u = A^{\frac{1}{2}} P u - a b t^{k+1} A^{\frac{3}{2}} u - a t A^{\frac{1}{2}} \partial_t u - b k t^{k-1} A^{\frac{1}{2}} u - c A^{\frac{1}{2}} u.$$

Comme $P u \in L^2(J; H)$ et $A^{\frac{1}{2}} u \in V(J)$ on en déduit que $\partial_t (A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) \in L^2(J; H)$.

De plus $t^{\frac{k+1}{2}} A(A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) \in L^2(J; H)$ car $A^{\frac{1}{2}} u \in V(J)$ et $A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) = \partial_t u$

$\in L^2(J; H)$ car $u \in V(J)$. Donc $A^{\frac{1}{2}} \partial_t u \in V(J)$. Enfin $A^{\frac{1}{2}} P(A^{\frac{1}{2}} \partial_t u) = P(\partial_t u)$

$$= \partial_t P u + \alpha t^k A^2 u + \beta A^{\frac{1}{2}} \partial_t u + \gamma t^{k-2} A u \text{ pour certains coefficients } \alpha, \beta \text{ et } \gamma.$$

Comme $P u \in L^2(J; H)$ et $A^{\frac{1}{2}} u \in V(J)$ on en déduit que $P(\partial_t u) \in V'(J)$.

4 - On en déduit alors que $\partial_t u$, $t^{\frac{k+1}{2}} A u$ et $A^{\frac{1}{2}} u \in V(J)$ et par suite que $u \in W(J)$.

I-3 - LES ESPACES $H^{n,h}$ et $W^{n,h}$.

Etant donnés un entier $n \geq 0$, un entier h impair et un intervalle ouvert borné J de \mathbb{R} on définit l'espace $H^{n,h}(J)$ par (cf. [])

$$H^{0,h}(J) = L^2(J; H)$$

$$H^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}) ; \partial_t u, t^h A u \in H^{n-1,h}(J)\} \text{ pour } n \geq 1;$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

On définit également l'espace $W^{n,h}(J)$ par :

$$W^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}) ; \partial_t^2 u, t^{k+1} A^2 u, A u, t A \partial_t u \in H^{n,h}(J)\}$$

cet espace étant muni de la norme canonique.

L'opérateur P est linéaire et continu de $W^{n,h}(J)$ dans $H^{n,h}(J)$ et l'espace $W^{n,h}(J)$ est l'espace de régularité maximale associé à l'espace $H^{n,h}(J)$ pour l'opérateur P . Notons que $W^{0,h}(J) = W(J)$.

On définit de façon habituelle les espaces $W_{loc}^{n,h}(J)$ et $H_{loc}^{n,h}(J)$.

Proposition 3.1. Etant donné $n \geq 1$, l'espace $H^{n,h}(J)$ s'injecte continuellement dans $H^{n-1,h}(J)$.

Démonstration. La propriété est vraie pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$. Soit alors $u \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$; donc $\partial_t u$ et $t^k Au \in H^{n-2,h}(J)$ ie $u \in H^{n-1,h}(J)$.

Proposition 3.2. Si $0 \notin \bar{J}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $u \in H^{n,h}(J)$
- ii) $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ avec $\partial_t^j A^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$.

Démonstration. Montrons que i) implique ii). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit alors $u \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$. L'hypothèse de récurrence montre alors que $\partial_t^j A^{n-1-j} \partial_t u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$ et $\partial_t^j A^{n-1-j} (t^h Au) \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$; d'où $\partial_t^j A^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$. Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit alors u tel que $\partial_t^j A^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$. D'une part $\partial_t^j A^{n-1-j} \partial_t u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$; d'autre part $\partial_t^j A^{n-1-j} (t^h Au) = \sum_{l=0}^{\inf(h,j)} h(h-1)\dots(h-l+1) t^{h-l} A^{n-j} \partial_t^{j-l} u$ et chaque terme du deuxième membre appartient à $L^2(J; H)$ car $A^{n-j} \partial_t^j u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Ainsi d'après l'hypothèse de récurrence $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$ ie $u \in H^{n,h}(J)$.

Proposition 3.3. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $u \in H^{n,h}(J)$
 ii) $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ avec $t^{hj} A^j \partial_t^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$

Démonstration. Montrons que i) implique ii). Le résultat est immédiat d'après la définition de $H^{n,h}(J)$.

Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est immédiat pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit alors u tel que $t^{kj} A^j \partial_t^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$. On doit montrer que $\partial_t u$ et $t^h A u \in H^{n-1,h}(J)$ ie d'après l'hypothèse de récurrence on doit montrer que $t^{hj} A^j \partial_t^{n-1-j} (\partial_t u) \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$ ce qui est vrai par hypothèse et que $t^{hj} A^j \partial_t^{n-1-j} (t^h A u) \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Or $t^{hj} A^j \partial_t^{n-1-j} (t^h A u) = \sum_{l=0}^{\inf(h, n-1-j)} h \dots (h-l+1) t^{hj+h-l} A^{j+l} \partial_t^{n-1-j-l} u$ et il est facile de vérifier qu'il suffit (en utilisant la proposition 3.2) de démontrer que le résultat est vrai pour des u à support compact au voisinage de $t = 0$; mais pour de telles fonctions l'inégalité de Hardy montre que :

$$\| t^{hj+h-l} A^{j+l} \partial_t^{n-1-j-l} u \|_{L^2(J; H)} \leq C \| t^{h(j+1)} A^{j+1} \partial_t^{n-(j+1)} u \|_{L^2(J; H)}$$

pour $0 \leq l \leq \inf(h, n-1-j)$. Comme $t^{h(j+1)} A^{j+1} \partial_t^{n-(j+1)} u \in L^2(J; H)$ il s'en suit que $t^{hj} A^j \partial_t^{n-j-1} (t^h A u) \in L^2(J; H)$.

Remarque 3.1. On peut même montrer que $u \in H^{n,h}(J)$ si et seulement si $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ avec $\partial_t^n u$ et $t^{hn} A^n u \in L^2(J; H)$.

On va caractériser l'espace $H^{n,h}(J)$ à l'aide de l'opérateur $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$ et d'un opérateur Z du type :

$$Z = \partial_t + dt^h A$$

où d est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re} d > 0$.

Proposition 3.4. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $u \in H^{n,h}(J)$
- ii) $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2}} \frac{1}{A^2} Z^{n-j} u \in L^2(J; H)$ pour $0 \leq j \leq n$.

Démonstration.

1ère étape. On démontre que $H^{n,h}(J)$ coïncide avec l'espace $K^{n,h}(J)$ défini par :

$$K^{0,h}(J) = L^2(J; H)$$

$$K^{n,h}(J) = \{u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty}) ; Zu, t^{\frac{h-1}{2}} \frac{1}{A^2} u \in K^{n-1,h}(J)\} \text{ pour } n \geq 1.$$

Tout d'abord si u est à support compact dans J on a par intégration par parties :

$$h \left\| t^{\frac{h-1}{2}} \frac{1}{A^2} u \right\|_{L^2(J; H)}^2 = -2 \operatorname{Re} \int_J (\partial_t u, t^h A u)_0 dt$$

d'où en décomposant :

$$= -2 \operatorname{Re} \int_J (Zu, t^h A u)_0 dt + 2 \operatorname{Re} \left\| t^h A u \right\|_{L^2(J; H)}^2$$

d'où pour tout $\varepsilon > 0$:

$$(2 \operatorname{Re} - \varepsilon) \left\| t^h A u \right\|_{L^2(J; H)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| Zu \right\|_{L^2(J; H)}^2 + h \left\| t^{\frac{h-1}{2}} \frac{1}{A^2} u \right\|_{L^2(J; H)}^2$$

De la première égalité et de cette dernière inégalité on en déduit que si u est à support compact dans J alors u est dans $H^{1,h}(J)$ si et seulement si u est dans $K^{1,h}(J)$. D'autre part si le support de u ne rencontre pas 0 on a aussi cette propriété. D'où l'on déduit que $H^{1,h}(J)$ et $K^{1,h}(J)$ coïncident.

Soit alors $n \geq 2$ et supposons que les espaces $H^{j,h}(J)$ et $K^{j,h}(J)$ coïncident pour $0 \leq j \leq n-1$. Montrons que $H^{n,h}(J)$ et $K^{n,h}(J)$ coïncident.

cident. Soit $u \in K^{n,h}(J)$ ie Zu et $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$ et soit à montrer que $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J) = K^{n-1,h}(J)$. Il suffit de montrer que $t^h Au \in K^{n-1,h}(J)$. Or $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^h Au) = t^h A (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in H^{n-2,h}(J) = K^{n-2,h}(J)$ et $Z(t^h Au) = t^h AZu + ht^{h-1} Au \in H^{n-2,h}(J)$ car $Zu \in K^{n-1,h}(J) = H^{n-1,h}(J)$ donc $t^h AZu \in H^{n-2,h}(J)$ et $t^{h-1} Au = t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in K^{n-2,h}(J)$ car $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$. Inversement soit $u \in H^{n,h}(J)$ ie $\partial_t u$ et $t^h Au \in H^{n-1,h}(J)$ et soit à montrer que Zu et $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-1,h}(J)$ ie $\partial_t (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) = t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} \partial_t u + \frac{h-1}{2} t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u \in K^{n-2,h}(J)$ et $t^h A (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in K^{n-2,h}(J)$. D'après l'hypothèse de récurrence il suffit de montrer que $t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u$

$K^{n-2,h}(J) = H^{n-2,h}(J)$ c'est à dire d'après la proposition 3.3 que

$$t^{hj} A^j \partial_t^{n-2-j} (t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u) \in L^2(J;H) \text{ pour } 0 \leq j \leq n-2. \text{ Or } t^{hj} A^j \partial_t^{n-2-j} (t^{\frac{h-1}{2}-1} A^{\frac{1}{2}} u) = \inf_{l=0}^{(\frac{h-3}{2}, n-2-j)} (\frac{h-3}{2}) \dots (\frac{h-3}{2} - l + 1) t^{hj + \frac{h-1}{2} - l - 1} A^{j+\frac{l}{2}} \partial_t^{n-2-j-l} u$$

et il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le résultat pour des u à support compact au voisinage de 0. Mais pour de telles fonctions on peut appliquer l'inégalité de Hardy ; or $\partial_t u \in H^{n-1,h}(J)$ donc $t^{hj} A^j \partial_t^{n-1-j} u \in H^{1,h}(J)$, par suite $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{hj} \partial_t^{n-1-j} u \in L^2(J;H)$ et grâce à l'inégalité de Hardy on en déduit que chaque terme du second membre de l'égalité précédente appartient à $L^2(J;H)$.

2ème étape. On démontre la proposition 3.4.

Montrons que i) implique ii). Ce résultat est immédiat d'après la 1ère étape.

Inversement montrons que ii) implique i). Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ d'après la 1ère étape. Soit alors $n \geq 2$ et supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$. Soit u tel que $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Z^{n-j} u \in L^2(J;H)$ pour

$0 \leq j \leq n-1$, ce qui est vrai par hypothèse et que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{1}{2}} Z^{n-1-j} (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Or $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{1}{2}} Z^{n-1-j} (t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} u) = \inf(\frac{h-1}{2}, n-1-j) \sum_{l=0}^{n-1-j} c_l t^{\frac{h-1}{2}j + \frac{h-1}{2} - l} A^{\frac{j}{2} + \frac{1}{2}} Z^{n-1-j-l} u$ pour des coefficients complexes c_l et il est facile de voir qu'il suffit de démontrer le résultat pour des u à support compact au voisinage de $t = 0$. Mais pour de telles fonctions la proposition 4.1 montre que :

$$\left\| t^{\frac{h-1}{2}(j+1)-1} A^{\frac{j+1}{2}} Z^{n-1-j-1} u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \sum_{m=0}^1 \left\| t^{\frac{h-1}{2}(m+j+1)} A^{\frac{m+j+1}{2}} Z^{n-(m+j+1)} u \right\|_{L^2(J;H)}$$

et le deuxième membre est fini.

Proposition 3.5. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) $u \in W^{n,h}(J)$
- ii) $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ avec $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j} u \in W(J)$ pour $0 \leq j \leq p \leq n$.

Démonstration. Montrons que ii) implique i). Soit donc $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tel que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j} u \in W(J)$ pour $0 \leq j \leq p \leq n$.

Tout d'abord on en déduit que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{p-j} (Au) \in L^2(J;H)$ pour $0 \leq j \leq p \leq n$ ie $Au \in H^{n,h}(J)$.

Montrons maintenant que $\partial_t^2 u \in H^{n,h}(J)$. On a la formule suivante :

$$\begin{aligned} t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} \partial_t^2 u &= \partial_t^2 (t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u) + \alpha \partial_t (t^{\frac{h-1}{2}j-1} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u) + \beta t^{\frac{h-1}{2}j-2} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u \\ &+ \sum_{m=1}^{\inf(h,n-j)} \gamma_m \partial_t (t^{h-m+\frac{h-1}{2}j} A^{1+\frac{j}{2}} Z^{n-j-m} u) \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^{\inf(h,n-j)} \sum_{l=1}^{\inf(h,n-j-m)} \delta_{ml} t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m-1} u$$

pour certains coefficients α, β, γ et δ ; certains termes disparaissent

pour $h = 1$. Or $\partial_t^2 (t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u) \in L^2(J;H)$ par hypothèse ; $\partial_t (t^{\frac{h-1}{2}j-1} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u)$
 $= \partial_t A^{\frac{1}{2}} (t^{\frac{h-3}{2}} t^{\frac{h-1}{2}} (j-1) A^{\frac{j-1}{2}} Z^{n-1-(j-1)} u) \in L^2(J;H)$ par hypothèse et $t^{\frac{h-1}{2}j-2}$
 $A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u = t^{h-3} A t^{\frac{h-1}{2}} (j-2) A^{\frac{j-2}{2}} Z^{n-2-(j-2)} u \in L^2(J;H)$ par hypothèse pour

$j \geq 2$ et pour $j = 1$ le terme s'écrit $\frac{1}{2} t^{\frac{h-1}{2}-2} Z^{n-1} u \in L^2(J;H)$. De plus

$\partial_t (t^{\frac{h-m}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m} u) = \partial_t (t^{\frac{h-m}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m} A u)$. Or $A u \in H^{n,h}(J)$

donc $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m} u \in H^{1,h}(J)$ pour $m \geq 1$ donc $\partial_t (t^{\frac{h-m}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m} u)$

$L^2(J;H)$ pour $m = 1, \dots, \inf(h,n-j)$. Enfin $t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-m-1} u$

peut être majoré en norme dans $L^2(J;H)$, du moins pour des u à support com-

pact, par l'inégalité de Hardy en fonction de $t^{2h-m-1+\frac{h-1}{2}j+K} A^{\frac{j+2}{2}} \partial_t^k$

$Z^{n-j-m-1} A u$. Or pour K tel que $m+1-1 \geq K \geq -h-1+m+1$ ce terme appartient à $L^2(J;H)$ car $A u \in H^{n,h}(J)$.

Ainsi $\partial_t^2 u \in H^{n,h}(J)$.

Montrons maintenant que $t^{h+1} A^2 u \in H^{n,h}(J)$. On a la formule

suivante :

$$t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} (t^{h+1} A^2 u) = t^{h+1} A^2 t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u +$$

$$\sum_{m=1}^{\inf(h+1,n-j)} a_m t^{\frac{h-1}{2}j+h+1-m} Z^{n-j-m} u$$

pour certains coefficients a_h .

Or $t^{h+1} A^2 t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u \in L^2(J;H)$ par hypothèse. Par l'iné-

galité de Hardy $t^{\frac{h-1}{2}j+h+1-m} A^{\frac{j+2}{2}} Z^{n-j-h} u$ peut être majoré en norme dans

$L^2(J;H)$ en fonction de $t^{\frac{h-1}{2}(j+1)} A^{\frac{j+2}{2}} \partial_t^{m-2} Z^{n-j-h} Au$ pour $m \geq 2$; or ce terme appartient à $L^2(J;H)$. Enfin pour $m = 1$, on écrit $t^{\frac{h-1}{2}j+h} A^{\frac{j+2}{2}} Z^{n-j-1} u$
 $= t^h A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-1} Au) \in L^2(J;H)$ car $Au \in H^{n,h}(J)$ donc $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j-1} Au \in H^{1,h}(J)$.

Montrons enfin que $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} (t \partial_t Au) \in H^{n,h}(J)$. On a la formule suivante

$$t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} (t \partial_t Au) = t \partial_t A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u)$$

$$\sum_{m=1}^{\inf(h+1, n-j)} \alpha_m t^{\frac{h-1}{2}j+h-m+1} A^{\frac{j+2}{2}} Z^{n-j-m} u$$

$$+ \beta t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j+1}{2}} \partial_t Z^{n-j-1} u$$

Or $t \partial_t A(t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j}{2}} Z^{n-j} u) \in L^2(J;H)$ par hypothèse. Les termes $t^{\frac{h-1}{2}j+h-m+1} A^{\frac{j+2}{2}} Z^{n-j-m} u$ ont été traités précédemment. Le terme $t^{\frac{h-1}{2}j} A^{\frac{j+1}{2}} \partial_t Z^{n-j-1} u$ appartient également à $L^2(J;H)$ car $Au \in H^{n,h}(J)$. Ainsi $u \in W^{n,h}(J)$.

Inversement on montre par les mêmes procédés que i) implique ii).

I-4 - PROPRIETES DES OPERATEURS X ET Y.

Soit l'opérateur $Z = \partial_t + dt^h A$ où d est un nombre complexe et h un entier impair ≥ 1 . On donne tout d'abord quelques inégalités.

Proposition 4.1. On suppose $\text{Re } d > 0$. Etant donnés deux entiers q et $j \geq 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour u à support compact dans J , on ait :

$$\|t^q u\|_{L^2(J;H)} \leq C \sum_{l=0}^j \|t^{\frac{h-1}{2}l} A^{\frac{l}{2}} t^{q+j-1} Z^{j-1} u\|_{L^2(J;H)}$$

Démonstration. Soit un entier p impair > 1 . On a :

$$\int_J (\partial_t^{h+bt} u, t^p u)_0 dt = \int_J (Zu, t^p u)_0 dt$$

Or par intégration par parties on a :

$$2 \operatorname{Re} \int_J (\partial_t^{h+bt} u, t^p u)_0 dt = -p \left\| t^{\frac{p-1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

De plus :

$$\int_J (t^h A u, t^p u)_0 dt = \left\| t^{\frac{h+p}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

Ainsi :

$$p \left\| t^{\frac{p-1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2 = -2 \operatorname{Re} \int_J (t^{\frac{p+1}{2}} Zu, t^{\frac{p-1}{2}} u)_0 dt + 2 \operatorname{Red} \left\| t^{\frac{h+p}{2}} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

Comme $\operatorname{Red} > 0$, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$

telle que :

$$\left\| t^{\frac{p-1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \left(\left\| t^{\frac{p-1}{2}+1} Zu \right\|_{L^2(J;H)} + \left\| t^{\frac{h+1}{2}} + \frac{p-1}{2} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)} \right)$$

Soit en posant : $q = \frac{1}{2}(p-1)$

$$\left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \left(\left\| t^{q+1} Zu \right\|_{L^2(J;H)} + \left\| t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)} \right)$$

C'est le résultat annoncé pour $j = 1$. Le cas général se démontre par récurrence sur j .

Proposition 4.2. On suppose $\operatorname{Red} < 0$. Etant donnés deux entiers q et $j \geq 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout u à support compact dans J on ait :

$$\left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \left\| t^{q+j} Q^j u \right\|_{L^2(J;H)}$$

$$\left\| t^{\frac{q+j}{2} \frac{h-1}{2}} A^{\frac{j}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \left\| t^{q+j} u \right\|_{L^2(J;H)}$$

$$\left\| t^{q+jh} A^j u \right\|_{L^2(J;H)} \leq C \left\| t^{q+j} u \right\|_{L^2(J;H)}$$

Démonstration. Comme on l'a vérifié dans la démonstration précédente on a :

$$(2q+1) \left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)}^2 = -2 \operatorname{Re} \int_J (t^{q+1} Z u, t^q u)_0 dt + 2 \operatorname{Red} \left\| t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

D'où comme $\operatorname{Red} < 0$:

$$(2q+1) \left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)}^2 \leq -2 \operatorname{Re} \int_J (t^{q+1} Z u, t^q u)_0 dt$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc :

$$(2q+1-\varepsilon) \left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| t^{q+1} Z u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

C'est la première inégalité pour $j = 1$. Le cas général se démontre par récurrence sur j .

De la première égalité ci-dessus on en déduit :

$$(-2\operatorname{Red}) \left\| t^{\frac{h+1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2 \leq \left\| t^{q+1} Z u \right\|_{L^2(J;H)}^2 + \left\| t^q u \right\|_{L^2(J;H)}^2$$

Compte tenu de l'inégalité précédente on en déduit la deuxième inégalité, pour $j = 1$ de la proposition 4.2. Le cas général se démontre par récurrence sur j .

Enfin par intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} (2q+h) \left\| t^{\frac{h-1}{2}+q} A^{\frac{1}{2}} u \right\|_{L^2(J;H)}^2 &= 2 \operatorname{Re} \int_J (t^q Z u, t^{h+q} A u)_0 dt \\ &+ 2 \operatorname{Red} \left\| t^{h+q} A u \right\|_{L^2(J;H)}^2 \end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a donc :

$$(-2 \operatorname{Red} - \varepsilon) \| |t^{h+q} A u| \|_{L^2(J;H)}^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} \| |t^q Z u| \|_{L^2(J;H)}^2$$

C'est la troisième inégalité de la proposition 4.2. Le cas général se démontre par récurrence sur j .

On rappelle maintenant un résultat de résolubilité locale relatif à l'opérateur Z démontré par [] :

Définition 4.1. On dit que Z est localement résoluble en $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que pour tout $f \in C_0^\infty(J;H)$ il existe $u \in \mathcal{D}'(J;H^{-\infty})$ tel que $Pu = f$.

Proposition 4.3. L'opérateur Z est localement résoluble (resp. hypoelliptique) en $t = 0$ si et seulement si $\operatorname{Red} > 0$ (resp. > 0).

Démonstration. Cf []. On note maintenant $X = \partial_t + atA$ et $Y = \partial_t + bt^h A$ où k est un entier. On a les formules de concaténation suivantes.

Proposition 4.4. Pour tout entier $n \geq 1$, il existe des coefficients complexes e_p et f_p pour $1 \leq p \leq \inf(k, n+1)$ tels que :

$$Y^n(XY + cA) = (XY + (c+na)A)Y^n + \sum_{p=1}^{\inf(k, n+1)} e_p t^{k-p} AY^{n-p+1}$$

$$X^n(XY + cA) = (XY + (c-na)A)X^n + \sum_{p=1}^{\inf(k, n+1)} f_p t^{h-p} AX^{n-p+1}$$

Démonstration. Un calcul direct montre que :

$$Y(XY + cA) = (XY + (ca)A)Y - bkt^{k-1}AY$$

Puis par récurrence sur n on démontre le résultat général.

On procède de même pour X .

On donne enfin une formule de commutation de X et de Y.

Proposition 4.5. Pour tout entier $n \geq 1$ il existe des coefficients complexes g_p et h_p pour $1 \leq p \leq \inf(k, n)$ tels que :

$$Y^p X = X Y^p + p a A Y^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k, n)} g_p t^{h-p} A Y^{n-p}$$

$$X^n Y = Y X^n - n a A X^{n-1} + \sum_{p=1}^{\inf(k, n)} h_p t^{h-p} A X^{n-p}$$

Démonstration. Un calcul direct montre que :

$$YX - XY = aA - bkt^{k-1}A$$

Puis par récurrence sur n on démontre le résultat général.

Plus généralement :

Proposition 4.6. Pour tous entiers m et $n \geq 1$, il existe des polynômes $Q(t; x, y)$ et $R(t; x, y)$ en x et y et à coefficients polynômes en t et des polynômes $p_{jq}(t)$ et $n_{jq}(t)$ pour $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq j+q \leq m$ tels que :

$$Y^n X^m = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq j+q \leq m}} p_{jq}(t) A^j X^{m-q-j} + Q(t; \partial_t, A) Y$$

$$X^n Y^m = \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq j+q \leq m}} r_{jq}(t) A^j X^{m-q-j} + R(t; \partial_t, A) X$$

Démonstration. Soit $m \geq 1$. La proposition montre que :

$$YX^m = m a A X^{m-1} + \sum_{j=1}^{\inf(k, m)} h_j t^{k-j} A X^{m-j} + X^m Y.$$

Puis par récurrence sur n on démontre la formule générale.

On procède de même pour l'autre formule.

I-5 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPONELLIPTICITE LORSQUERea < 0 ET Reb > 0.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 5.1.

On suppose $\text{Rea} < 0$ et $\text{Reb} > 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que étant donnés un entier $n \geq n_0$ et un intervalle ouvert J de \mathbb{R} contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ alors $Pu \in H_{\text{loc}}^{n,k}(J)$ implique $u \in W_{\text{loc}}^{n,k}(J)$.

ii) $\frac{c}{a} \neq -p$ pour tout entier $p \geq 0$.

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

I-5.1 : Démonstration de la condition nécessaire d'hypoellipticité.

On transforme tout d'abord la propriété d'hypoellipticité de P sous forme d'une estimation.

Proposition 5.1. On suppose que étant donnés un entier $n \geq 0$ et un intervalle ouvert J de \mathbb{R} contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ alors $Pu \in H_{\text{loc}}^{n,k}(J)$ implique $u \in W_{\text{loc}}^{n,k}(J)$. Alors il existe $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T, T; H)$ on ait :

$$\|u\|_{W^{n,k}(-T,T)} \leq C \|Pu\|_{H^{n,k}(-T,T)}$$

Démonstration. Par un procédé classique (cf. [] par exemple) on montre que pour tout compact K de J et tout $\theta_1 \in C_0^\infty(J)$, il existe $\theta_2 \in C_0^\infty(J)$ et une constante $C > 0$ tels que pour tout $u \in W_{\text{loc}}^{n,k}(J)$, on ait :

$$||\theta_1 u||_{W^{n,k}(J)} \leq C (||\theta_2 Pu||_{H^{n,h}(J)} + ||u||_{L^2(J;H)})$$

De là on déduit qu'il existe $T' > 0$ et $C' > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T', T'; H^\infty)$ on ait :

$$||u||_{W^{n,k}(J)} \leq C' (||Pu||_{H^{n,k}(J)} + ||u||_{L^2(J;H)})$$

Comme de plus :

$$||u||_{L^2(J;H)} \leq T' ||\partial_t u||_{L^2(J;H)} < T' ||u||_{W^{n,k}(J)}$$

On en déduit alors le résultat.

On peut alors démontrer la condition nécessaire d'hypoellipticité pour l'opérateur p .

Proposition 5.2. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$, $T > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T, T; H^\infty)$ on ait :

$$||u||_{W^{n,k}(-T,T)} \leq C ||Pu||_{H^{n,k}(-T,T)}$$

Alors $\frac{c}{a} \neq -q$ pour tout q entier ≥ 0 .

Démonstration. Supposons qu'il existe q entier ≥ 0 tel que $c + qa = 0$.

Appliquons l'hypothèse à $X^q u$ pour $u \in C_0^\infty(J; H)$ où $J =]-T, T[$:

$$||X^q u||_{W^{n,k}(J)} \leq C ||PX^q u||_{H^{n,k}(J)}$$

Or d'après la proposition 4.4 on en déduit puisque $c+qa = 0$.

$$PX^q = X^{q+1}Y - \sum_{l=1}^{\inf(k, q+1)} f_l t^{k-p} AX^{q-l+1}$$

De plus :

$$Y^{p-h}(t^{h-1}u) = \sum_{j=0}^{\inf(k-1, p-h)} g_j t^{k-1-j} Y^{p-h-j}u$$

pour certains coefficients complexes g_j .

Utilisant alors les équivalences de normes données par les propositions 3-5 et 3-4, on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in C_0^\infty(J; H^\infty)$ on ait :

$$\begin{aligned} \sum_{0 < h < p < n} \left\| t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} X^q u \right\|_{W(J)} &\leq C \sum_{0 < h < p < n} \left\| t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} X^{q+1} u \right\|_{L^2(J; H)} \\ &+ \sum_{0 \leq h \leq p \leq n} \sum_{1 \leq l \leq \inf(k, q+1)} \sum_{0 \leq j \leq \inf(k-1, p-h)} \left\| t^{\frac{h-1}{2} + k-1-j} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h-j} \right. \\ &\quad \left. X^{q+1-l} u \right\|_{L^2(J; H)} \end{aligned}$$

On va montrer que chaque terme du second membre est de la forme $\left\| QY u \right\|_{L^2(J; H)}$ où Q est un "opérateur en ∂_t et A " ou bien peut être "absorbé" par un terme du premier membre à condition que u soit à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

D'après la proposition 4.6 on a :

$$\begin{aligned} \left\| t^{\frac{h-1}{2} + k-1-j} A^{\frac{h}{2}+1} Y^{p-h-j} X^{q+1-l} u \right\|_{L^2(J; H)} &\leq C \left(\left\| QY u \right\|_{L^2(J; H)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{0 \leq r \leq p-h-j \\ 0 \leq s+r \leq q+1-l}} \left\| t^{\frac{h-1}{2} + k-1-j} A^{\frac{r+h}{2}} X^{q+1-l-s-r} A u \right\|_{L^2(J; H)} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 4.2 et l'inégalité de Hardy, on obtient :

$$\begin{aligned} \left\| t^{\frac{h-1}{2} + k-1-j} A^{\frac{r+h}{2}} X^{q+1-l-s-r} A u \right\|_{L^2(J; H)} \\ \leq C \left\| t^{\frac{h-1}{2} + k-j-1-s+r+n-h} A^{\frac{h}{2}} \partial_t^{n-h} X^q A u \right\|_{L^2(J; H)} \end{aligned}$$

Or $r \leq p-h-j$ donc $k-j-l+s-r+n-h \geq k-l \geq 2$; on en déduit donc que ce terme peut être absorbé par $\|X^q u\|_{W^{n,h}(J)}$ pour u à support assez petit au voisinage de $t = 0$.

En conséquence il existe un entier $m \geq 0$ et deux constantes $T' > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T', T'; H^\infty)$ on ait :

$$\|X^q u\|_{W^{n,k}(J)} \leq C \sum_{j+h \leq m} \|\partial_t^j A^h Y u\|_{L^2(J; H)}$$

Or d'après la proposition 4.2 :

$$\|u\|_{L^2(J; H)} \leq C \|X^q u\|_{L^2(J; H)}$$

Ainsi il existerait $T' > 0$, $C' > 0$ et un entier $m \geq 0$ tels que pour tout $u \in C_0^\infty(-T', T'; H^\infty)$ on ait :

$$\|u\|_{L^2(J; H)} \leq C' \sum_{j+h \leq m} \|\partial_t^j A^h Y u\|_{L^2(J; H)}$$

Or une telle inégalité entraînerait que $Y^+ = -(\partial_t - \bar{b}t^k A)$ est localement résoluble en $t = 0$ (cf. []) ; ce qui n'est pas d'après la proposition 4.3.

I-5.2 : Démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité.

La démonstration de la condition suffisante d'hypoellipticité de P est basée sur le résultat de régularité suivant :

Proposition 5.3. On suppose que $\text{Re } a < 0$ et $\text{Re } b > 0$, qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $-(|a|^2 - 2 \text{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$ et $\frac{c}{a} \neq 0, \dots, -(n-1)$. Alors il existe $T > 0$ tel que pour u vérifiant :

$$t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in V(-T, T) \text{ pour } 0 \leq h \leq p \leq n$$

$$t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} P u \in L^2(-T, T; H) \text{ pour } 0 \leq h \leq p \leq n \text{ (ie } P u \in H^{n,h}(-T, T))$$

alors $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(-T, T)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ (ie $u \in W^{n,h}(-T, T)$)

Démonstration. 1 - On démontre le résultat pour $h = 0$ ie $Y^p u \in W(J)$ pour $0 \leq p \leq n$ où $J =]-T, T[$. Cette démonstration est faite par récurrence sur p .

1.1 - On montre tout d'abord que $Y^n u \in W(J)$. Comme $-(|a|^2 - 2 \operatorname{Re}(c+na)\bar{a}) > 0$ il suffit d'après le corollaire 2.2 que $Y^n u \in V(J)$ et que $(XY + (c+na)A)Y^n u \in L^2(J; H)$. Or par hypothèse $Y^n u \in V(J)$, $Y^n P u \in L^2(J; H)$ et $t^{k-p} A Y^{n-p+1} u \in L^2(J; H)$ pour $1 \leq p \leq \inf(k, n+1)$ car $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{n-h} u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq n$. Tenant compte de la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a le résultat recherché.

1.2 - On suppose que pour un p donné avec $1 \leq p \leq n-1$ on a $Y^q u \in W(J)$ pour $p+1 \leq q \leq n$. On montre alors que $Y^p u \in W(J)$.

Pour cela on calcule :

$$Y^p P u - Y^{p+2} u = (Y^p X - X Y^p) Y u + (X - Y) Y^{p+1} u - c A Y^p u$$

d'après la proposition 4.5 :

$$= (pa + c + g_1 t^{k-1}) A Y^p u + \sum_{h=2}^{\inf(k,p)} g_h t^{k-h} A Y^{p-h+1} u + (a - b t^{k-1}) t A Y^{p+1} u.$$

Or $Y^p P u \in L^2(J; H)$ par hypothèse, $t^{k-h} A Y^{p-h+1} u \in L^2(J; H)$ pour $2 \leq h \leq \inf(k, p)$ car $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ par hypothèse, $Y^{p+2} u \in L^2(J; H)$ car $Y^{p+1} u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence et $A Y^{p+1} u \in L^2(J; H)$ car $Y^{p+1} u \in W(J)$ par hypothèse de récurrence. De là on en déduit que si $pa + c \neq 0$ il existe T éventuellement plus petit que le précédent tel que $A Y^p u \in L^2(J; H)$ avec $J =]-T, T[$.

Par suite pour tout nombre complexe λ , compte tenu de l'hypothèse $Y^p P u \in L^2(J; H)$ on a $Y^p (X Y - \lambda A) u \in L^2(J; H)$. Or $t^{k-h} A Y^{p+1-h} u \in L^2(J; H)$

pour $1 \leq h \leq \inf(k, p+1)$. Donc d'après la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a $(XY + (\lambda + pa)A)Y^p u \in L^2(J; H)$ avec $Y^p u \in V(J)$; le corollaire 2.2 montre alors que $Y^p u \in W(J)$ dès que $-(|a|^2 - 2 \operatorname{Re}(\lambda + pa)\bar{a}) > 0$.

1.3 - On montre enfin que $u \in W(J)$.

Pour cela on calcule :

$$Pu - Y^2 u = (a - bt^{k-1}) tAYu + cAu.$$

Or $Pu \in L^2(J; H)$, $Y^2 u \in L^2(J; H)$ car $Yu \in V(J)$ par hypothèse et $(a - bt^{k-1}) tAYu \in L^2(J; H)$ car $Yu \in W(J)$ d'après 1.2. De là on en déduit que si $c \neq 0$ alors $Au \in L^2(J; H)$. On termine comme en 1.2.

2 - Soit maintenant h tel que $1 \leq h \leq n-1$ et supposons que $t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Y^{p-1} u \in W(J)$ pour $0 \leq p \leq n$ avec $1 \leq h-1$. Montrons que $t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(J)$ pour $h \leq p \leq n$.

2.1 - On montre d'abord par récurrence sur p que $A t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in L^2(J; H)$. Pour $p = h$ on doit montrer que $A t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} u \in L^2(J; H)$.

Pour cela on calcule :

$$A^{\frac{h}{2}} X(t^{\frac{k-1}{2}} Yu) - A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} Pu = -ct^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{k}{2}+1} u - \frac{k-1}{2} h A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Yu$$

Or :

$$A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} Yu = A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{k-1}{2}} Y^{h-(h-1)} u \in L^2(J; H) \text{ d'après}$$

l'hypothèse de récurrence (en h).

$$A^{\frac{h}{2}} t A t^{\frac{k-1}{2}} Yu = t^{\frac{k+1}{2}} A^{\frac{3}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{h-(h-1)} u \in L^2(J; H) \text{ d'après}$$

l'hypothèse de récurrence (en h).

Donc $A^{\frac{k}{2}} X(t^{\frac{k-1}{2}} Yu) \in L^2(J; H)$. De plus $A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} Pu \in L^2(J; H)$ par hypothèse.

Enfin $A^{\frac{k}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Yu = t^{\frac{k-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{h-(h-1)} u \in L^2(J; H)$. Par suite si

$c \neq 0$ alors $A t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} u \in L^2(J;H)$.

Soit alors p tel que $h+1 \leq p \leq n$ et supposons que $A t^{\frac{h-1}{2}h} A^h$

$Y^{q-h} u \in L^2(J;H)$ pour $h \leq q \leq p-1$ et montrons le pour $q = p$. Pour cela on forme :

$$\begin{aligned} & A^{\frac{h}{2}} (X t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1} u) - A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h} P u = (-c - (p-h)a + g_1 t^{\frac{k-1}{2}h}) A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \\ & - \inf_{1 \leq l \leq p-h} \sum_{l=2}^{p-h} g_l t^{\frac{k-1}{2}h + \frac{h}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h-l+1} u - \frac{k-1}{2} h A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Y^{p-h+1} u \end{aligned}$$

Or :

$$A^{\frac{h}{2}} \partial_t (t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1} u) = A^{\frac{h}{2}} \partial_t (t^{\frac{k-1}{2}h} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)} u) \in L^2(J;H) \text{ d'après}$$

l'hypothèse de récurrence (en h).

$$A^{\frac{h}{2}} t A t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1} u = t^{\frac{k+1}{2}} A^{\frac{3}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)} u \in L^2(J;H) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence (en } h).$$

Donc :

$$A^{\frac{h}{2}} X t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h+1} u \in L^2(J;H). \text{ De plus } A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h} Y^{p-h} P u \in L^2(J;H)$$

par hypothèse :

$$t^{\frac{h-1}{2}h + \frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h+1-l} u = t^{\frac{k-2}{2}} A (t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{(p-1+1)-h} u) \in L^2(J;H) \text{ d'après}$$

l'hypothèse de récurrence (pour $q = p-1+1$ avec $2 \leq l \leq p-h$).

$$\text{Enfin } A^{\frac{h}{2}} t^{\frac{k-1}{2}h-1} Y^{p-h+1} u = t^{\frac{k-3}{2}} A^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k-1}{2}(h-1)} A^{\frac{h-1}{2}} Y^{p-(h-1)} u \in L^2(J;H) \text{ d'après}$$

l'hypothèse de récurrence (en h).

Ainsi si $c + (p-h)a \neq 0$, il existe T éventuellement plus petit

que le précédent tel que $A t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in L^2(J;H)$ avec $J =]-T, T[$.

2.2 - On montre maintenant que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(J)$ pour

$h \leq p \leq n$. De 2.1 on déduit que pour tout nombre complexe J compte tenu de

$$\text{l'hypothèse } t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} P u \in L^2(J;H) \text{ on a } t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} (XY + \lambda A) u \in L^2(J;H)$$

Or $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} t^{k-1} A Y^{p-h-2+1} u \in L^2(J;H)$ pour $1 \leq l \leq \inf(k, p-h+1)$ d'après 2.1.

Donc d'après la formule de concaténation de la proposition 4.4 on a :

$t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} (XY + (\lambda + (p-h)a)A) Y^{p-h} u \in L^2(J;H)$. Or $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h+1} u \in L^2(J;H)$

comme on l'a déjà vu et $X(t^{\frac{k-1}{2}h-1} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u) \in L^2(J;H)$ comme on le vérifie

par des méthodes analogues aux précédentes. Par suite $(XY + (\lambda + (p-h)a)A)$

$(t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u) \in L^2(J;H)$ pour tout λ et $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in L^2(J;H)$. Le

corollaire 2.2 montre alors que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in W(J)$.

3 - On démontre enfin que $t^{\frac{k-1}{2}n} A^{\frac{n}{2}} u \in W(J)$.

Le calcul fait en 2.1 pour $p = h$ vaut pour $p = h = n$ d'où

l'on déduit que $A t^{\frac{k-1}{2}n} A^{\frac{n}{2}} u \in L^2(J;H)$. Puis on termine comme précédemment.

La proposition 5.3 est ainsi démontrée.

On peut alors démontrer la condition suffisante d'hypoellipticité. Soit n_0 tel que $-(|a|^2 - 2 \operatorname{Re}(c+n_0 a) \bar{a}) > 0$. Soient un entier $n \geq n_0$, J un intervalle de \mathbb{R} et u une distribution de $\mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ tel que $Pu \in H_{loc}^{n,h}(J)$.

En dehors de $t = 0$, P est elliptique ; par suite le résultat de régularité est vrai en dehors de $t = 0$ et il suffit de démontrer cette régularité sur un voisinage $J =]-T, T[$ de 0. Tout d'abord comme $t = 0$ n'est pas caractéristique pour P , il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $t^{\frac{h-1}{2}} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} A^s u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$.

Comme on peut supposer $s \leq 0$, l'hypothèse $Pu \in H_{loc}^{n,h}(J)$ implique que

$P(A^s u) \in H_{loc}^{n,h}(J)$. Donc d'après la proposition précédente 5.3 on en déduit

en particulier que $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} (A^{\frac{s+1}{2}} u) \in V(J)$ pour $0 < h < p < n$. De proche en

proche on arrive ainsi à $t^{\frac{k-1}{2}h} A^{\frac{h}{2}} Y^{p-h} u \in V(J)$ pour $0 \leq h \leq p \leq n$ et $u \in W^{n,h}(J)$

d'après la proposition 5.3.

Remarque 5.1. Lorsque $\operatorname{Re} a < 0$ et $\operatorname{Re} b > 0$ l'opérateur X est hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y n'est pas hypoelliptique en $t = 0$, d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY + cA$ donnée précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur Y qui n'est pas hypoelliptique.

1-5 - UNE CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE D'HYPONELLIPTICITE LORSQUE

$\operatorname{Re} a > 0$ ET $\operatorname{Re} b < 0$.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 6.1. *On suppose $\operatorname{Re} a > 0$ et $\operatorname{Re} b < 0$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que étant donné un entier $n \geq n_0$ et un intervalle ouvert J de \mathbb{R} contenant 0, pour toute distribution $u \in \mathcal{D}(J; H^{-\infty})$ alors $Pu \in H_{loc}^{n,1}(J)$ implique $u \in W_{loc}^{n,1}(J)$.*
- ii) $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geq 1$.*

On a ainsi un résultat de régularité maximale dans ces espaces avec poids qui permet d'en déduire facilement le théorème 1.1.

Les démonstrations sont analogues au cas précédent (où $\operatorname{Re} a < 0$) ; en fait elles se simplifient notablement puisque les espaces $H^{n,1}$ et $W^{n,1}$ ne font plus intervenir de poids, lorsqu'on les définit à partir des opérateurs $A^{1/2}$ et X . La démonstration de la condition nécessaire utilise l'inégalité.

$$\|u\|_{W^{n,1}(J)} \leq c \|Pu\|_{H^{n,1}(J)}$$

que l'on applique à $Y^{q-1}u$ (et non à $Y^q u$, car il y a une commutation de X

et de Y à effectuer) si l'on suppose que $-c+qa = 0$ pour un q entier >1 .
On arrive ainsi à une inégalité qui montrerait que $X^+ = -(\partial_t - aA)$ est localement résoluble en $t = 0$; ce qui n'est pas.

Remarque 6.1. Lorsque $\text{Re } a < 0$ et $\text{Re } b > 0$ l'opérateur X n'est pas hypoelliptique en $t = 0$ alors que Y est hypoelliptique en $t = 0$ d'après la proposition 4.3. La régularité de l'opérateur $P = XY + cA$ donnée précédemment est donnée dans des espaces construits à partir de l'opérateur X qui n'est pas hypoelliptique.

I-7 - HYPOELLIPTICITE LORSQUE $\text{Re } a < 0$ ET $\text{Re } b > 0$.

Le principal résultat est le suivant (cf théorème 1.1).

THEOREME 7.1. Si $\text{Re } a < 0$ et $\text{Re } b < 0$, l'opérateur P est hypoelliptique en $t = 0$.

Démonstration. Pour tout u à support compact dans un intervalle J on a, en reprenant la démonstration de la proposition 4.2 et pour tout $\epsilon > 0$.

$$(-2 \text{Re } a - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \|tAu\|_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \|Xu\|_{L^2(J;H)}$$

d'où :

$$(-2 \text{Re } a - \epsilon)^{\frac{1}{2}} \|tYAu\|_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \|Pu\|_{L^2(J;H)} + \frac{|c|}{\epsilon^{1/2}} \|Au\|_{L^2(J;H)}$$

Or toujours d'après la démonstration de la proposition 4.2 pour tout

$\eta > 0$:

$$(1-\eta)^{\frac{1}{2}} \|Au\|_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\eta^{1/2}} \|tAYu\|_{L^2(J;H)}$$

donc :

$$((-2 \text{Re } a - \epsilon)^{\frac{1}{2}} - \frac{|c|}{\epsilon^{1/2}} \frac{(1-\eta)^{1/2}}{\eta^{1/2}}) \|tYAu\|_{L^2(J;H)} \leq \frac{1}{\epsilon^{1/2}} \|Pu\|_{L^2(J;H)}$$

ϵ étant fixé >0 tel que $(-2 \operatorname{Re} a - \epsilon) > 0$, on choisit η assez près de 1 pour que :

$$(-2 \operatorname{Re} a - \epsilon)^{1/2} - \frac{|c|}{\epsilon^{1/2}} \frac{(1-\eta)^{1/2}}{\eta^{1/2}} > 0.$$

Ainsi il existe une constante $C > 0$ pour que pour tout u à support compact dans J on ait :

$$\|tAYu\|_{L^2(J;H)} \leq C \|Pu\|_{L^2(J;H)}$$

et donc toujours d'après la proposition 4.2.

$$\|Au\|_{L^2(J;H)} \leq C \|Pu\|_{L^2(J;H)}$$

A partir de cette estimation il est facile d'en déduire que P est hypoelliptique en $t = 0$.

II - CAS GENERAL.

II-1 - NOTATIONS.

Soit $(E_\lambda)_{-\infty < \lambda < +\infty}$ la résolution spectrale de A (cf []). On utilise les notations de [] que l'on rappelle ici.

Pour $\epsilon > 0$, on considère les trois projections orthogonales de H définies par les opérateurs $E_{-\epsilon}$, $E_{+\epsilon} - E_{-\epsilon}$ et $I - E_{+\epsilon}$ et les sous-espaces correspondants $H_- = E_{-\epsilon}H$, $H_0 = (E_{+\epsilon} - E_{-\epsilon})H$ et $H_+ = (I - E_{+\epsilon})H$. Ces espaces sont orthogonaux deux à deux et déterminent H par $H = H_- \oplus H_0 \oplus H_+$. Soit A_- la restriction de A aux éléments de son domaine qui sont dans H_- ; dans H_- l'opérateur A_- est auto-adjoint défini négatif et à inverse borné. Soit A_0 la restriction de A aux éléments de H_0 ; dans H_0 l'opérateur A_0 est auto-adjoint et borné. Enfin soit A_+ la restriction de A aux éléments

de son domaine qui appartiennent à H_+ ; dans H_+ l'opérateur A_+ est auto-adjoint, défini positif et à inverse borné. Ces trois opérateurs déterminent l'opérateur A par $A = A_- + A_0 + A_+$.

Puisque $-A_-$ est un opérateur auto-adjoint, défini positif à inverse borné dans H_- , on peut définir comme en I la famille d'espaces de Sobolev H_-^s pour $s \in \mathbb{R}$. De même puisque A_+ est un opérateur auto-adjoint, défini positif et à inverse borné dans H_+ , on peut définir la famille d'espaces de Sobolev H_+^s pour $s \in \mathbb{R}$. On pose alors $H^s = H_-^s \oplus H_0 \oplus H_+^s$ et on définit comme en I les espaces $C^\infty(J; H^\infty)$ et $\mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Définition 1.1. On dit que P est hypoelliptique dans un ensemble ouvert J de \mathbb{R} si pour tout sous-ensemble ouvert J' de J et toute distribution $u \in \mathcal{D}'(J; H^{-\infty})$ tels que $Pu \in C^\infty(J; H^\infty)$ alors $u \in C^\infty(J'; H^\infty)$.

On dit que P est hypoelliptique au point $t = 0$ s'il existe un voisinage ouvert J de 0 tel que P soit hypoelliptique dans J .

II-2 - CONDITION SUFFISANTE D'HYPONELLIPTICITE QUAND $\text{Re } a \text{ Re } b < 0$.

L'opérateur P est le même qu'en I.

Le principal résultat est le suivant :

THEOREME 2.1. Si $\text{Re } a \text{ Re } b < 0$ et si $\frac{c}{a}$ n'est pas un entier de \mathbb{Z} alors P est hypoelliptique en $t = 0$.

Démonstration. Supposons par exemple $\text{Re } a > 0$ et $\text{Re } b < 0$.

Si $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier $p \geq 1$ le théorème 1.1 de I montre que l'opérateur :

$$P_+ = (\partial_t + at A_+) (\partial_t + bt^k A_+) + cA_+$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_+ .

Si $\frac{c}{a} \neq -p$ pour tout entier $p \geq 0$ la théorème 1.1 de I montre que l'opérateur :

$$P_- = (\partial_t + (-a)t(-A_-))(\partial_t + (-b)t^k(-A_-)) + (-c)(-A_-)$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_- .

Enfin l'opérateur :

$$P_0 = (\partial_t + at A_0)(\partial_t + bt^k A_0) + c A_0$$

est hypoelliptique en $t = 0$ relativement à l'espace H_0 puisque A_0 est un opérateur borné dans H_0 .

Comme P est égal à $P_- + P_0 + P_+$ on en déduit que P est hypoelliptique en $t = 0$ dès que $\frac{c}{a} \neq p$ pour tout entier p de \mathbb{Z} .

B I B L I O G R A P H I E

- [1] : ARAMAKI J. - Some remarks on local solvability and hypoellipticity second order abstract evolution equations,
J. of Hokkaido University (1976), 302-307.

- [2] : BOLLEY P. - CAMUS J. et HELFFER B. - Remarques sur l'hypoellipticité,
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 283 (29.11.1976), série A,
979-982.

- [3] : GIGLIOLI A. - A class of second order evolution equations with double characteristics,
Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. IV, Ser 3, (1976)
187-229.

- [4] : GIGLIOLI A. et TREVES F. - An example in the solvability theory of linear PDE'S,
Am. J. Math 96 (1974), 366-384.

- [5] : GRUSIN V.V. - On a class of hypoelliptic operators,
Math. Sbornik 83 (125) (1970), 456-573.

- [6] : MENIKOFF A. - Some examples of hypoelliptic partial differential equations.

- [7] : TREVES F. - Concatenation of second order evolution equations applied to local solvability and hypoellipticity,
Comm. Pure Appl. Math., 26 (1973), 201-205.

- [8] : YOSIDA K. - Functional analysis,
Springer Verlag, Berlin, 1966.