

MONIQUE SABLE-TOUGERON

**Comportement asymptotique des valeurs propres pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes*, 1978, fascicule 3

« Séminaire d'analyse fonctionnelle », , exp. n° 10, p. 1-29

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1978\\_\\_3\\_A10\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978__3_A10_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES POUR UNE  
CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES DEGENERES

Monique SABLE-TOUGERON  
U.E.R. Mathématiques  
Avenue du Général Leclerc  
35031 RENNES CEDEX  
FRANCE

INTRODUCTION.

Ce travail généralise et améliore les résultats de PHAM THE LAÏ [16]. Par l'étude du noyau de la résolvante, méthode employée par S. AGMON, on obtient un équivalent avec estimation du reste pour les valeurs propres d'un opérateur non nécessairement auto-adjoint, d'ordre  $2m$ , elliptique à l'intérieur, dégénérant à l'ordre  $k$  ( $k$  entier,  $1 \leq k \leq 2m-1$ ), sur le bord d'un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ .

Dans le cas auto-adjoint et à l'ordre deux, le comportement asymptotique des valeurs propres a été déterminé, pour un opérateur particulier, par N. SHIMAKURA [17] pour la boule unité, puis par C. NORDIN [11] pour un domaine général ; et pour un opérateur plus général, par L. VULIS et Z. SOLOMJAK [18]. Pour une bibliographie plus complète sur ce sujet on renvoie à [18] et aussi [15].

1. NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière  $\Gamma$ , tel qu'il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) > 0\} \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = 0\} \\ \text{grad } \varphi(s) \neq 0 \text{ pour } s \in \Gamma \end{cases}$$

Pour  $m, k \in \mathbb{N}$ , on considère les espaces de Sobolev avec poids :

$$W_m^{k/2}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m\},$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$  avec  $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ .

$W_m^{k/2}(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme  $(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\varphi^{k/2} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$ .

Si  $m - k/2 > 0$ , on a  $W_m^{k/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  avec injection compacte, et  $W_m^{k/2}(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ .

De même si on note  $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n > 0\}$ , on utilise les espaces

$$W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n) = \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n), x_n^{k/2} D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}_+^n), \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

On considère la forme sesquilinéaire :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u(x) \overline{D^\beta v(x)} dx$$

Pour  $s \in \Gamma$ , on note  $T_s$  l'espace vectoriel des vecteurs tangents en  $s$  à  $\Gamma$ ,  $S_{T_s}$  la

sphère unité de  $T_s$  et  $v_s = \frac{\text{grad } \varphi(s)}{\|\text{grad } \varphi(s)\|}$ ,  $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$  désignant la norme

euclidienne d'un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors pour tout  $s \in \Gamma$ ,  $\omega \in S_{T_s}$

on associe à  $a(u, v)$  la forme :

$$b_{s, \omega}(u, v) = \int_0^\infty t^k \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a_{\alpha\beta}(s) (\omega + v_s D_t)^\alpha u(t) \overline{(\omega + v_s D_t)^\beta v(t)} dt,$$

avec  $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$ .

On fait les hypothèses :  $1 \leq k \leq 2m-1$  et :

H 1) Pour tous  $\alpha, \beta$ ,  $a_{\alpha\beta}$  appartient à l'espace  $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$  des restrictions à  $\bar{\Omega}$  de fonctions  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

Pour  $|\alpha| = |\beta| = m$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $a_{\alpha\beta}(x) \in \mathbb{R}$  et  $a_{\alpha\beta}(x) = a_{\beta\alpha}(x)$ .

H 2)  $a(u,v)$  est fortement coercitive sur  $W_m^{k/2}(\Omega)$ , c'est-à-dire : il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $u \in W_m^{k/2}(\Omega)$  on ait :

$$\operatorname{Re} a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{W_m^{k/2}(\Omega)}^2 .$$

D'après R. PAVEC (non publié) et P. BOERO-R. PAVEC [5] dans un cas particulier, H 2) entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{ il existe une constante } c > 0 \text{ telle que pour tout } x \in \bar{\Omega} \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^n \\ \text{ on ait} \\ \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} \geq c \|\xi\|^{2m} \\ \cdot \text{ pour tout } s \in \Gamma, \omega \in S_{T_s}, b_{s,\omega} \text{ est fortement coercitive sur } W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+). \end{array} \right.$$

## 2. ENONCE DES RESULTATS.

D'après P. BOLLEY-J. CAMUS [6], [7], l'opérateur  $A$  non borné dans  $L^2(\Omega)$  associé à  $a(u,v)$  a un domaine  $D(A)$  contenu dans  $W_{2m}^k(\Omega)$  ;  $\mathfrak{D}(\bar{\Omega})$  étant dense dans  $W_m^{k/2}(\Omega)$ , on dira que  $A$  est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{A}(\cdot, D) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} D^\beta (a_{\alpha\beta} \varphi^k D^\alpha)$$

Avec les données et les hypothèses de 1), le spectre de  $A$  est constitué d'une infinité dénombrable de valeurs propres  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini de  $\lambda_j$  en dehors de la région  $\{\mu \in \mathbb{C}, |\arg \mu| < \varepsilon\}$ . Alors, les  $\lambda_j$  étant rangées par ordre croissant des modules, si on note  $N(\lambda) = \sum_{\operatorname{Re} \lambda_j < \lambda} 1$ , on a :

THEOREME 2.1 Si  $n < 2m/k$ , on a :

$$N(\lambda) = \int_{\Omega} \omega(x) dx \cdot \lambda^{n/2m} + O(\lambda^{\frac{n-\theta}{2m}}),$$

pour tout  $\theta$  vérifiant  $0 < \theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$ , avec

$$(2.1) \quad \omega(x) = (2\pi)^{-n} \varphi(x) \int_{\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^{\alpha+\beta} < 1}^{-\frac{kn}{2m}} d\xi.$$

De même l'opérateur  $\beta_{s,\omega}$ , non borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , associé à  $b_{s,\omega}(u,v)$  a un domaine  $D(\beta_{s,\omega})$  contenu dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+)$ , et on dira aussi que  $\beta_{s,\omega}$  est la réalisation de Neumann de l'opérateur différentiel

$$\beta_{s,\omega} = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) (\omega + v_s D_t)^\beta (t^k (\omega + v_s D_t)^\alpha).$$

De plus,  $s \in \Gamma$  et  $\omega \in S_{T_s}$  étant fixés,  $(\beta_{s,\omega}, D(\beta_{s,\omega}))$  est auto-adjoint positif dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  d'après H 1) et H 2) ; si  $(\mu_j(s,\omega))_{j \in \mathbb{N}}$  désigne la suite des valeurs propres de  $\beta_{s,\omega}$  on a alors :

THEOREME 2.2 Si  $n > 2m/k$ , pour tout  $s \in \Gamma$ ,  $\omega \in S_{T_s}$ , la série  $\sum_{j \geq 1} \rho_j(s)$ , où

$$(2.2) \quad \rho_j(s) = \frac{1}{n-1} \int_{S_{T_s}} \mu_j(s,\omega) \frac{1-n}{2m-k} d\omega,$$

est convergente et sa somme est bornée sur  $\Gamma$ .

THEOREME 2.3 Si  $2m/k < n < 4m/k - 1$  on a :

$$N(\lambda) = \int_{\Gamma} C(s) ds \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m}} \text{Log } \lambda),$$

pour tout  $\theta$  vérifiant  $\theta \leq \inf(1/2, \frac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)})$

et si  $n \geq \frac{4m}{k} - 1$  on a

$$N(\lambda) = \int_{\Gamma} C(s) ds \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m}}),$$

pour tout  $\theta$  vérifiant  $0 < \theta < \frac{m}{3m-k}$  et  $\theta \leq 1/2$ , avec

$$(2.3) \quad C(s) = (2\pi)^{1-n} \|\text{grad } \varphi(s)\| \frac{k(1-n)}{2m-k} \sum_{j \geq 1} \rho_j(s).$$

Remarque 2.4

i) Si A est auto-adjoint on peut supprimer les contraintes  $\theta \leq 1/2$  dans l'énoncé du théorème 2.3.

ii) Si  $2m/k$  est entier et si  $n = 2m/k$ , d'après [10], en adaptant la méthode de [14], on montre que

$$N(\lambda) = \int_{\Gamma} \tilde{\omega}(s) ds \cdot \lambda^{1/k} \text{Log}(\lambda^{1/(2m-k)}) + O(\lambda^{1/k}), \text{ avec}$$

$$\tilde{\omega}(s) = (2\pi)^{-n} \|\text{grad } \varphi(s)\|^{-1} \int_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) \xi^{\alpha+\beta} < 1 \quad d\xi.$$

iii) Le théorème 2.1 est vrai aussi pour toute réalisation auto-adjointe semi-bornée (A, D(A)) de  $\mathcal{O}(x, D)$  dans  $L^2(\Omega)$  telle qu'il existe  $q \in \mathbb{N}$ ,  $(2m-k)q > n$  et  $D(A^q) \subset W_{2mq}^{kq}(\Omega)$ .

3. OPERATEURS BORNES DANS  $L^2(\Omega)$ , (resp.  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ), A IMAGE DANS  $W_{2m}^k(\Omega)$ , (resp.  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+^n)$ ).

LEMME 3.1 Si  $m > n/2$ , toute fonction  $u \in W_m^{k/2}(\Omega)$  est continue dans  $\Omega$  et :

il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $u \in W_m^{k/2}(\Omega)$ ,  $x \in \Omega$  on ait

$$(3.1) \quad |u(x)| \leq c \varphi(x)^{-\frac{kn}{4m}} \|u\|_{W_m^{k/2}(\Omega)}^{\frac{n}{2m}} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1 - \frac{n}{2m}}.$$

Démonstration. On utilise la méthode de [14].

On note  $\|T\|_{0,j,\Omega}$  la norme de T dans  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), H^j(\Omega))$ ,  $\|T\|_{0,2m;k,\Omega}$  sa norme dans  $\mathcal{L}(L^2(\Omega), W_{2m}^k(\Omega))$ , (E et F étant deux espaces de Banach,  $\mathcal{L}(E,F)$  désigne l'espace des applications linéaires continues de E dans F). De même pour  $\mathbb{R}_+^n$ .

Alors on a :

PROPOSITION 3.2 Soit T un opérateur borné dans  $L^2(\Omega)$  tel que son image et celle de  $T^*$  soient contenues dans  $W_{2m}^k(\Omega)$ , avec  $2m-k > n$ . Alors T est un opérateur intégral dont le noyau T(x,y) est continu et borné sur  $\Omega \times \Omega$  et vérifie : il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $x,y \in \Omega$  on ait

$$(3.2) \quad |T(x,y)| \leq c (\|T\|_{0,2m;k,\Omega} \cdot \|T^*\|_{0,2m;k,\Omega})^{\frac{n}{2(2m-k)}} \cdot \|T\|_{0,0,\Omega}^{1 - \frac{n}{2m-k}}$$

$$(3.3) \quad |T(x,y)| \leq c (\varphi(x) \varphi(y))^{-\frac{kn}{4m}} (\|T\|_{0,2m;k,\Omega} \cdot \|T^*\|_{0,2m;k,\Omega})^{\frac{n}{4m}} \cdot \|T\|_{0,0,\Omega}^{1 - \frac{n}{2m}}.$$

(On peut énoncer la même proposition avec  $\Omega$  remplacé par  $\mathbb{R}_+^n$  et  $\varphi(x)$  remplacé par  $x_n$ ).

Démonstration. Le début de la proposition et (3.2) résultent d'une proposition de [12] et de l'inclusion  $W_{2m}^k(\Omega) \subset H^{2m-k}(\Omega)$ . Pour montrer (3.3) on utilise (3.1) et des inégalités de [12].

PROPOSITION 3.3 Soit T un opérateur borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  tel que son image et celle de  $T^*$  soient contenues dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+)$  ; soit  $T(t,\tau)$  son noyau ; alors si  $2m-k > 1$  il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $t,\tau \in \mathbb{R}_+$  on ait

$$(3.4) \quad |T(t,\tau)| \leq c (t\tau)^{-k/2} \cdot (\|T\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+})^{1/2}$$

Démonstration. Comme pour (3.1) on montre qu'il existe  $c > 0$  telle que pour  $u \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ ,  $t > 0$  on ait :

$$|u(t)| \leq c t^{-k/2} \|u\|_{W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)},$$

puis on utilise l'inégalité suivante qui résulte de [12] :

$$\|Tf\|_{W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)} \leq (\|T\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \cdot \|T^*\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+})^{1/2} \cdot \|f\|_{(W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+))'},$$

pour  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$

PROPOSITION 3.4 Soit T un opérateur borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  dont l'image est contenue dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+)$  avec  $2m-k > 1$ , et  $k > 1$ . Alors T est un opérateur nucléaire au sens de Gohberg et Krein [9], et la suite  $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots \geq |\mu_j| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , de ses valeurs propres vérifie : il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $j \geq 1$  on ait

$$(3.5) \quad |\mu_j| < c \cdot j^{-k}.$$

Démonstration. D'après [13] l'opérateur  $Q = (TT^*)^{1/2}$  borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  a son image contenue dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+)$  ; soit  $Q(t,\tau)$  son noyau ; (3.2) donne l'intégrabilité de  $Q(t,t)$  au voisinage de 0 et (3.4) la donne au voisinage de  $+\infty$ . Si  $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$  est la suite décroissante des valeurs propres de Q, l'inégalité

$$\sum_{j \geq 1} |\mu_j| \leq \sum_{j \geq 1} s_j,$$

démontrée dans [9] et l'égalité

$$\sum_{j \geq 1} s_j = \int_0^\infty Q(t, t) dt,$$

montrent que T est nucléaire.

Pour montrer (3.5) on applique (3.3) et (3.4) au noyau  $Q_\lambda(t, \tau)$  du résolvant modifié de Q,  $Q_\lambda = Q(I + \lambda Q)^{-1}$ ,  $\lambda > 0$  :

Puisque  $\|Q_\lambda\|_{0,0,\mathbb{R}_+} \leq \frac{c}{\lambda}$  et  $\|Q_\lambda\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \leq c\|Q\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+}$ , (3.4) donne

$$\int_0^\infty \lambda^{1/k} Q_\lambda(t, t) dt \leq c \lambda^{-1+1/k},$$

et (3.3) donne une majoration identique pour  $\int_0^\infty \lambda^{1/k} Q_\lambda(t, t) dt$ . De l'égalité

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{s_j^{-1} + \lambda} = \int_{\mathbb{R}_+} Q_\lambda(t, t) dt,$$

on déduit alors

$$s_j^{-1} \sum_{s_j < \lambda} 1 \leq c \lambda^{1/k}, \text{ pour } \lambda > 0.$$

Ceci implique l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que, pour  $j \geq 1$ , on ait :

$$s_j \leq c j^{-k};$$

Alors (3.5) s'obtient à l'aide du résultat de [9] suivant : pour tout  $r > 0$  et  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\prod_{j=1}^n (1 + r |\mu_j|) \leq \prod_{j=1}^n (1 + r s_j).$$

A ce stade on peut déjà démontrer le théorème 2.2 :

on se place donc dans le cas  $n > 2m/k$  et on peut supposer  $2m-k > n$ , (sinon on considère  $\beta_{s,\omega}^q$  avec  $q(2m-k) > n$ , les techniques de [4] donnant  $D(\beta_{s,\omega}^q) \subseteq W_{2mq}^{kq}(\mathbb{R}_+)$ ).

$\Gamma$  et  $S_{T_s}$  étant compacts et les données régulières, la proposition 3.4 appliquée à  $\beta_{s,\omega}^{-1}$  donne l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $s \in \Gamma$ ,  $\omega \in S_{T_s}$ ,  $j \geq 1$  on ait :

$$\mu_j(s, \omega) \frac{1-n}{2^{m-k}} \leq c j^{-1 + \frac{2m-kn}{2m-k}}$$

La série  $\sum_{j \geq 1} \rho_j(s)$  est donc convergente et sa somme est une fonction bornée sur  $\Gamma$ .

4. ENSEMBLE RESOLVANT DE (A, D(A)).

Dans ce paragraphe on donne les calculs qui permettent, grâce à une formule de A. Pleijel utilisée d'abord par S. Agmon [3], de déduire le comportement asymptotique de  $N(\lambda)$  de l'étude du noyau de  $(A-\lambda)^{-1}$ .

On note  $\rho(A)$  l'ensemble résolvant de  $(A, D(A))$ . On a :

PROPOSITION 4.1 Il existe  $K > 0$  tel que la région

$$\mathcal{R}_0 \equiv \{ \mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \mu \leq 0 \} \cup \{ \mu \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} \mu| \geq K(1+|\mu|)^{1 - \frac{1}{2m}} \}$$

soit contenue dans  $\rho(A)$  et il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $\mu \in \mathcal{P}_0$ ,  $\mu \neq 0$  on ait,  $d(\mu)$  désignant la distance de  $\mu$  à  $\mathbb{R}_+$  :

$$(4.1) \quad \| (A-\mu)^{-1} \|_{0,0,\Omega} \leq \frac{c}{d(\mu)} .$$

Démonstration. Elle est identique à celle de [16] : on utilise la forte coercivité de  $a$  pour montrer (4.1) pour  $\operatorname{Re} \mu < 0$ , puis on considère l'opérateur  $A'$  non borné dans  $L^2(\Omega)$ , de domaine  $D(A')$  contenu dans  $W_{2m}^k(\Omega)$  associé à

$$(4.2) \quad a'(u, v) = \int_{\Omega} \varphi^k(x) \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \overline{D^\beta v} \, dx ;$$

on démontre l'estimation : il existe  $c > 0$  telle que pour tous  $\delta > 0$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell \leq 2m$ ,  $u \in W_{2m}^k(\Omega)$  on ait :

$$\|u\|_{W_{\ell}^k(\Omega)} \leq c \{ \delta^{2m-\ell} \|u\|_{W_{2m}^k(\Omega)} + \delta^{-\ell} \|u\|_{L^2(\Omega)} \} .$$

On utilise alors un argument de perturbation d'Agmon [1] pour montrer l'existence de  $\mathcal{R}_0$  et l'estimation (4.1) dans cette région.

PROPOSITION 4.2 Pour tout  $\mu \in \rho(A)$ ,  $(A-\mu)^{-1}$  est compact dans  $L^2(\Omega)$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini de valeurs propres de  $A$  en dehors du secteur  $\{ \mu \in \mathbb{C}, |\arg \mu| < \varepsilon \}$ .

Démonstration. Comme dans [15], elle utilise la compacité de l'injection de  $H^{2m-k}(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$  et la proposition 4.1.

PROPOSITION 4.3 Si  $2m-k > n$  il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$(4.3) \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{|\lambda_j^{-\mu}|} \leq \begin{cases} c \frac{|\mu|^{\frac{n-1}{2m-k}}}{d(\mu)} & \text{si } n > \frac{2m}{k} \\ c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} & \text{si } n < \frac{2m}{k} \end{cases}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_b$$

$$(4.4) \quad \left| \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j^{-\mu}} - \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j^{-\mu}} \right| \leq c \frac{|\mu|^{1-\frac{1}{2m}}}{d(\mu)} \cdot \sum_{j \geq 1} \frac{1}{|\lambda_j^{-\mu}|}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_b, |\mu| \geq 1$$

Démonstration. Comme dans [16], à l'aide de la proposition 4.2, (4.4) se déduit de (4.3) dont la preuve suit ; soit  $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$  et  $Q_\mu = (G_\mu G_\mu^*)^{1/2}$  ;  $Q_\mu$  est continu dans  $L^2(\Omega)$ , son image est contenue dans  $W_{2m}^k(\Omega)$  et d'après [13],

$$\|Q_\mu\|_{0,0,\Omega} \leq \|G_\mu\|_{0,0,\Omega}$$

Alors (4.1), (3.2) et (3.3) donnent :

$$\begin{cases} 0 \leq Q_\mu(x,x) \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m-k}}}{d(\mu)} \\ 0 \leq Q_\mu(x,x) \leq c \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \end{cases}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_b$$

Si  $n < \frac{2m}{k}$ , la seconde inégalité donne :

$$\int_{\Omega} Q_\mu(x,x) dx \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)}$$

Si  $n > \frac{2m}{k}$ , en intégrant la seconde inégalité sur  $\Omega(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$  et la première sur  $\Omega - \Omega(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$ , où

$$\Omega(\rho) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > \rho\}, \text{ pour } \rho \geq 0,$$

on obtient

$$\int_{\Omega} Q_{\mu}(x, x) dx \leq c \frac{|\mu|}{d(\mu)} \frac{n-1}{2m-k} ;$$

la majoration  $\sum_{j \geq 1} \frac{1}{|\lambda_j^{-\mu}|} \leq \int_{\Omega} Q_{\mu}(x, x) dx$ , démontrée dans [9], donne alors (4.3).

On note enfin, comme dans [16] :

$$(4.5) \quad f(\mu) = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda_j^{-\mu}} , \quad \text{pour } \mu \notin \mathbb{R}_+$$

$$(4.6) \quad I(\lambda) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} f(\mu) d\mu , \quad \text{pour } \lambda > 0,$$

où  $L(\lambda)$  est une courbe orientée de  $\mathbb{C}$  joignant  $\lambda - ia \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}}$  à son conjugué, ne rencontrant pas  $\mathbb{R}_+$  et où  $a, \theta \in \mathbb{R}, a > 0, 0 < \theta < 1$ .

$$(4.7) \quad \mathcal{R}_{\theta} = \{\mu \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \mu \leq 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} \mu| > K(1+|\mu|)^{1-\frac{\theta}{2m}}\} , \quad \text{pour } 0 < \theta < 1$$

Alors on a :

**PROPOSITION 4.4** Si  $2m-k > n$ , pour tout  $\theta, 0 < \theta < 1$ , il existe  $a > 0, c > 0, \lambda_0 > 0$  tels que  $\lambda + ia \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}}$  appartienne à  $\mathcal{R}_{\theta}$  pour  $\lambda \geq \lambda_0$  et tels que :

$$(4.8) \quad |N(\lambda) - I(\lambda)| \leq c(\lambda^{1-\frac{\theta}{2m}}) \left| \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j - (\lambda + ia \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}})} \right| + \begin{cases} \lambda^{\frac{n-\theta}{2m}} & , \text{ si } n > \frac{2m}{k} \\ \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m}} & , \text{ si } n > \frac{2m}{k} \end{cases} , \quad \text{pour } \lambda \geq \lambda_0$$

Démonstration. Pour  $a > 0, \theta \in ]0, 1[$ ,  $\lambda > 0$ , d'après la formule de A. Pleijel citée dans [16] par exemple, on a :

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leq a \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}} |f(\lambda + ia \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}})|$$

On note  $\xi = \lambda + ia \lambda^{1-\frac{\theta}{2m}}$  ;  $\theta$  étant fixé on montre facilement qu'il existe  $a > 0,$

$\lambda_0 > 0$  tels que pour  $\lambda \geq \lambda_0$  on ait  $\xi \in \mathcal{R}_{\theta}$  et  $|\xi| \geq 1$ . Alors (4.3) et (4.4) donnent :

$$|f(\xi)| \leq \left| \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j^{-\xi}} \right| + c \left( \frac{|\xi|}{d(\xi)} \right)^2 |\xi|^{-1-\frac{1}{2m}} \times \begin{cases} |\xi|^{\frac{n}{2m}} & \text{si } n < \frac{2m}{k} \\ |\xi|^{\frac{n-1}{2m-k}} & \text{si } n > \frac{2m}{k} \end{cases} ,$$

d'où (4.8) par une majoration immédiate.

5. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1 :  $n < 2m/k$ .

L'estimation de  $N(\lambda)$  s'obtient ici, comme dans le cas non dégénéré traité par S. Agmon [2], par une étude du noyau de la résolvante à l'intérieur de  $\Omega$ .

5.1 Cas où  $2m-k > n$ .

Pour  $x \in \Omega$  on note  $F_{x,\mu}(y)$  la solution élémentaire dans  $\mathbb{R}^n$  de l'opérateur à coefficients constants :

$$\mathcal{Q}'_x(D) - \mu \equiv \varphi(x)^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha+\beta} - \mu, \text{ où } \mu \notin \mathbb{R}_+ ;$$

on a, avec la notation (2.1) :

$$F_{x,\mu}(0) = \frac{n\pi}{2m} \left(\sin \frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \omega(x) (-\mu)^{-1 + \frac{n}{2m}}$$

où  $(-\mu)^{-1 + \frac{n}{2m}}$  est la détermination holomorphe dans  $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$  qui est positive sur le demi-axe négatif.

Pour  $\mu \in \rho(A)$  on note  $G_\mu(y,z)$  le noyau de l'opérateur  $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$  et pour  $x \in \Omega$  on note  $\mathcal{P}_{x,\mu}$  la restriction à  $\Omega$  de l'opérateur inverse de  $(\mathcal{Q}'_x(D) - \mu, H^{2m}(\mathbb{R}^n))$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Le résultat essentiel pour montrer le théorème 2.1 est obtenu par application de la proposition 3.2 et constitue la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. Soient  $\theta > 0, \beta > 0, \theta + \beta > 1$ . Il existe des constantes  $c > 0, a_0 > 0, \mu_0 > 0$  telles que pour tout  $x \in \Omega$  on ait

$$|G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| < c \varphi(x)^{-1 - \frac{kn}{2m} + \frac{k}{2m}} \frac{|\mu|}{d(\mu)^2}^{\frac{n}{2m} + 1 - \frac{\beta}{2m}},$$

pour  $\mu \in \mathcal{P}_{\theta,0}, a_0 |\mu| > \varphi(x)^{-\frac{2m-k}{\beta}}, |\mu| > \mu_0$ .

Démonstration. Le schéma de la démonstration est classique :

pour  $x \in \Omega$  on considère l'opérateur borné dans  $L^2(\Omega)$  :

$$T_{x,\mu,r} = \zeta_{x,r} (G_\mu - \mathcal{P}_{x,\mu}) \zeta_{x,r},$$

où  $\mu \in \rho(A), r \in \mathbb{R}$  vérifie  $0 < r < \inf(1, \varphi(x), \frac{\varphi(x)}{2 \sup_{y \in \Omega} \|\text{grad } \varphi(y)\|})$ ,

et où  $\zeta_{x,r}$  est une fonction  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ , à support contenu dans

$B(x,r) = \{y \in \Omega, \|y-x\| < r\}$ , à valeurs dans  $[0,1]$ , valant 1 en  $x$  et vérifiant

$$\|D^\alpha \zeta_{x,r}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c r^{-|\alpha|}, \text{ où } c \text{ est indépendante de } x \text{ et de } r.$$

On écrit :

$$T_{x,\mu,r} = T_1 + T_2 \equiv \zeta_{x,r} G_\mu \eta_{x,r} (\alpha'_x - \alpha) \mathcal{P}_{x,\mu} \zeta_{x,r} + \zeta_{x,r} G_\mu [\eta_{x,r}, \alpha] \cdot \mathcal{P}_{x,\mu} \zeta_{x,r}$$

où la fonction  $\eta_{x,r}$  possède les mêmes propriétés que  $\zeta_{x,r}$  et vérifie de plus

$$\eta_{x,r} \zeta_{x,r} = \zeta_{x,r}.$$

Une inégalité d'interpolation classique appliquée à  $\Omega(\frac{\varphi(x)}{2})$ , la majoration

$$\|u\|_{H^{2m}(\Omega_\rho)} \leq \rho^{-k} \|u\|_{W_{2m}^k(\Omega)}, \text{ et (4.1) donnent :}$$

$$(5.1) \quad \|G_\mu f\|_{H^j(B(x,r))} \leq c \varphi(x)^{-\frac{kj}{2m}} \frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)} \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

pour  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\mu \in \mathcal{P}_\mathbb{C} - \{0\}$ . D'où :

$$(5.2) \quad \|\zeta_{x,r} G_\mu\|_{0,2m;k,\Omega} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)}, \text{ pour } |\mu| \geq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}, \mu \in \mathcal{P}_\mathbb{C} - \{0\}.$$

D'après [3] on a aussi :

$$(5.3) \quad \|\mathcal{P}_{x,\mu}\|_{0,j,\Omega} \leq c \varphi(x)^{-\frac{kj}{2m}} \frac{|\mu|^{j/2m}}{d(\mu)}, \text{ pour } \mu \notin \mathbb{R}_+.$$

on en déduit, en écrivant

$$\mathcal{Q}(y,D) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(y) \varphi^k(y) D^{\alpha+\beta} + \sum_{h=1}^k \varphi^{k-h}(y) \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} a_{h,\alpha}(y) D^\alpha,$$

$$\|\eta_{x,r} (\alpha'_x - \alpha) \mathcal{P}_{x,\mu} \zeta_{x,r}\|_{0,0,\Omega} \leq c \cdot \frac{|\mu| r \varphi(x)^{-1}}{d(\mu)}, \text{ pour } |\mu| \geq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}, \mu \notin \mathbb{R}_+.$$

Cette dernière majoration, (4.1) et (5.2) donnent alors l'existence d'une constante

$c > 0$  telle que pour  $\mu \in \mathcal{P}_\mathbb{C}$ ,  $|\mu| > \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}$  on ait :

$$\|T_1\|_{0,0,\Omega} \leq c \frac{|\mu| \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)^2} \text{ et } \|T_1\|_{0,2m;k,\Omega} \leq c \frac{|\mu|^2 \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)^2}.$$

Pour estimer  $T_2$  on introduit pour  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ , des fonctions  $\varphi_2, \dots, \varphi_p$ , ayant les mêmes propriétés que  $\zeta_{x,r}$  ; on pose  $\varphi_1 = \eta_{x,r}$ ,  $\varphi_{p+1} = \zeta_{x,r}$  et on impose

$\varphi_j \varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$  pour  $1 \leq j \leq p$ . On montre facilement que l'on a :

$$\zeta_{x,r} G_\mu[\eta_{x,r}, a] = - \zeta_{x,r} G_\mu[a, \varphi_p] G_\mu[a, \varphi_{p-1}] \dots G_\mu[a, \varphi_1].$$

En écrivant  $[a, \varphi_j] = \sum_{h=0}^k \varphi^{k-h} \sum_{\substack{1 \leq |\alpha| \leq 2m-h \\ |\gamma| \geq 1}} a_{h,\alpha} \sum_{\substack{\gamma+v=\alpha \\ |\gamma| \geq 1}} c_{\gamma v} (D^\gamma \varphi_j) D^v$ , (5.1) et des

majorations simples donnent :

$$\|[a, \varphi_j] G_\mu\|_{0,0,\Omega} \leq c \frac{|\mu|}{d(\mu)} (r(\varphi(x))^{-k} |\mu|)^{\frac{1}{2m}-1}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_b, |\mu| \geq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}$$

De même, en utilisant (5.3), on obtient une majoration analogue pour

$\|[a, \varphi_1] \mathcal{B}_{x,\mu} \zeta_{x,r}\|_{0,0,\Omega}$ . Alors ces estimations, avec (5.2), montrent que pour tout  $p \geq 1$  il existe une constante  $c > 0$  telle que :

$$\begin{cases} \|T_2\|_{0,0,\Omega} \leq \frac{c}{d(\mu)} \cdot \left(\frac{|\mu|}{d(\mu)} (r(\varphi(x))^{-k} |\mu|)^{\frac{1}{2m}-1}\right)^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,\Omega} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)} \left(\frac{|\mu|}{d(\mu)} (r(\varphi(x))^{-k} |\mu|)^{\frac{1}{2m}-1}\right)^p \end{cases}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_b, |\mu| \geq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}$$

On sait donc estimer  $T_{x,\mu,r}$  et aussi  $T_{x,\mu,r}^*$  puisque  $A^*$  est associé à  $a^*(u,v) = \overline{a(v,u)}$  donc aussi à une forme  $W_m^{k/2}(\Omega)$ -coercive.

On applique alors (3.3) : pour tout  $p \geq 1$ , il existe  $c > 0$  telle que

$$(5.4) \quad |G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| \leq c \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \left( \frac{|\mu| \varphi(x)^{-1} r}{d(\mu)} + \frac{|\mu|}{d(\mu)} (r(\varphi(x))^{-k} |\mu|)^{\frac{1}{2m}-1} \right)^p$$

pour tous  $x \in \Omega$ ,  $0 < r < \inf(1, \varphi(x), \frac{\varphi(x)}{2 \sup_{y \in \Omega} \|\text{grad } \varphi(y)\|})$ ,  $\mu \in \mathcal{B}_b$ ,  $|\mu| \geq \varphi(x)^k \cdot r^{-2m}$ .

Soit maintenant  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ . On fait  $r = \varphi(x)^{\frac{k}{2m}} |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}}$  dans (5.4) ; on obtient il existe  $\mu_0 > 0$ ,  $a_0 > 0$  tels que pour tout  $p \geq 1$  il existe une constante  $c > 0$  qui vérifie :

$$(5.5) \quad |G_\mu(x,x) - F_{x,\mu}(0)| \leq c \varphi(x)^{-\frac{kn}{2m}-1+\frac{k}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}+1-\frac{\beta}{2m}}}{d(\mu)^2} (1+\varphi(x))^{\frac{2m-k}{2m}} |\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m}} d(\mu) \left(\frac{|\mu|}{d(\mu)}\right)^{1+\frac{\beta-1}{2m}}$$

pour tous  $x \in \Omega$ ,  $\mu \in \mathcal{R}_0$  vérifiant  $|\mu| \geq \mu_0$  et  $a_0 |\mu| > \varphi(x)^{\frac{-(2m-k)}{\beta}}$ .

Soit enfin  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \theta < 1$ . Pour  $\theta + \beta < 1$ , on peut choisir  $p$  de façon que la quantité entre parenthèses de (5.5) reste bornée indépendamment de  $x \in \Omega$  et de  $\mu \in \mathcal{R}_\theta$ ; ceci donne bien la proposition 5.1.

COROLLAIRE 5.2. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$ . Il existe  $c > 0$ ,  $\mu_0 > 0$  tels que  $|\int_{\Omega} G_{\mu}(x,x) dx| \leq c |\mu|^{-1 + \frac{n}{2m}}$  pour  $\mu \in \mathcal{R}_\theta$   $|\mu| > \mu_0$ .

Démonstration. Soit  $\beta > 0$ ,  $\theta + \beta > 1$ . De la proposition 5.1 on déduit

$$\int_{\Omega(\rho)} |G_{\mu}(x,x) - F_{x,\mu}(0)| dx \leq c \frac{|\mu|^{1 + \frac{n}{2m}}}{d(\mu)^2} \times \begin{cases} |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}} \text{Log}|\mu| & \text{si } n = 1 \\ -\frac{\beta}{2m-k} (1 - \frac{kn}{2m}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

pour  $\mu \in \mathcal{R}_\theta$ ,  $|\mu| > \mu_0$ , avec  $\rho = (a_0 |\mu|)^{-\frac{\beta}{2m-k}}$

D'autre part (4.1) et (3.3) donnent :

$$\int_{\Omega - \Omega(\rho)} |G_{\mu}(x,x)| dx \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k} (1 - \frac{kn}{2m})}}{d(\mu)}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{R}_\theta - \{0\}.$$

Enfin on montre facilement l'analogie de cette dernière inégalité pour  $F_{x,\mu}(0)$  avec  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ . Ces trois estimations impliquent :

$$(5.6) \quad \left| \int_{\Omega} (G_{\mu}(x,x) - F_{x,\mu}(0)) dx \right| \leq c \frac{|\mu|^{1 + \frac{n}{2m}}}{d(\mu)} \times \begin{cases} |\mu|^{-\frac{\beta}{2m}} \text{Log}|\mu| & \text{si } n = 1 \\ -\frac{\beta}{2m-k} (1 - \frac{kn}{2m}) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

pour  $\mu \in \mathcal{R}_\theta$ ,  $|\mu| > \mu_0$ .

$\theta$  étant fixé, la meilleure majoration de  $|\int_{\Omega} G_{\mu}(x,x) dx|$  par une puissance de  $|\mu|$  dans  $\mathcal{R}_\theta$  est obtenue s'il existe  $\beta$ ,  $0 < \theta + \beta < 1$ , tel que  $\beta > \frac{2\theta(2m-k)}{2m-kn}$  si  $n = 1$ ,  $\beta \geq \frac{2\theta(2m-k)}{2m-kn}$  si  $n \geq 2$ , ce qui donne bien le corollaire 5.2.

Démonstration du théorème 2.1. Puisque, d'après S. Agmon [1], pour  $\mu \in \rho(A)$  on a :

$$(5.7) \quad \int_{\Omega} G_{\mu}(x,x) dx = \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\lambda_j^{-\mu}},$$

le corollaire 5.2 et la proposition 4.4 donnent : pour  $0 < \theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$ ,

il existe  $c > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tels que pour  $\lambda \geq \lambda_0$  on ait :

$$(5.8) \quad |N(\lambda) - I(\lambda)| \leq c \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{\theta}{2m}}$$

Il reste à étudier  $I(\lambda)$  dans  $\mathcal{P}_{b_\theta}$ , avec  $\theta < \frac{2m-kn}{6m-kn-2k}$ . On note

$$\alpha_{m,n} = \frac{n\pi}{2m} \left(\sin \frac{n\pi}{2m}\right)^{-1} \int_{\Omega} \omega(x) dx.$$

(4.3), (4.4), (5.7) et (5.6), en prenant  $\beta$  très voisin de  $1-\theta$ , donnent :

$$(5.9) \quad |f(\mu) - \alpha_{m,n} (-\mu)^{-1 + \frac{n}{2m}}| \leq c \frac{|\mu|^{1 + \frac{n}{2m} - \frac{1-\theta}{2m-k}(1 - \frac{kn}{2m}) + \epsilon}}{d(\mu)^2}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{P}_{b_\theta}, |\mu| > \mu_0, \epsilon > 0.$$

On choisit la courbe :

$$L(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C}, \mu = \lambda + iy, a \lambda^{1 - \frac{\theta}{2m}} \leq |y| \leq a\lambda\} \cup \{\mu \in \mathbb{C}, |\mu| = (1+a^2)^{1/2} \cdot \lambda, \operatorname{Re} \mu \leq \lambda\}.$$

Pour  $\lambda \geq \lambda_1$ ,  $L(\lambda)$  est contenue dans  $\mathcal{P}_{b_\theta} \cap \{|\mu| > \mu_0\}$  ; l'intégration de (5.9) sur  $L(\lambda)$  donne alors, avec la notation (4.6) :

$$\left| I(\lambda) - \frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1 + \frac{n}{2m}} d\mu \right| \leq c \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{1-\theta}{2m-k}(1 - \frac{kn}{2m}) + \frac{\theta}{2m} + \epsilon}, \text{ pour } \lambda \geq \lambda_1.$$

Enfin un calcul simple de variable complexe donne :

$$\left| \frac{\alpha_{m,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1 + \frac{n}{2m}} d\mu - \int_{\Omega} \omega(x) dx \cdot \lambda^{\frac{n}{2m}} \right| \leq c \lambda^{\frac{n}{2m} - \frac{\theta}{2m}}$$

(5.8) et ces deux dernières majorations donnent alors le théorème 2.1.

### 5.2 Cas où $2m-k < n$ .

On considère  $A^{2q}$  avec  $2(2m-k) q > n$  ; avec les mêmes techniques que dans [4] on montre que le domaine  $D(A^{2q})$  de  $A^{2q}$  est contenu dans  $W_{4mq}^{2kq}(\Omega)$ . Des calculs simples dans les espaces avec poids décrits dans [8] montrent que :

$$(A^{2q} - A'^{2q}) \in \mathcal{L}(W_{4mq-1}^{2kq}(\Omega), L^2(\Omega)).$$

$A'^{2q}$  étant associé à une forme fortement coercitive sur  $D(A^q)$ , on en déduit, comme dans la proposition 4.1, l'existence d'une région

$$\mathcal{B}_{2q} = \{ \mu \in \mathbb{C}, d(\mu) \geq K_q (1 + |\mu|)^{1 - \frac{1}{4mq}} \},$$

contenue dans  $\rho(A^{2q})$  et telle que pour  $\mu \in \mathcal{B}_{2q}$  on ait aussi (4.1) avec A remplacé par  $A^{2q}$ .

Alors la proposition 5.1 et le corollaire 5.2 sont vrais pour le noyau de  $(A^{2q-\mu})^{-1}$ .

On montre facilement aussi l'analogie de (4.3) et (4.4) dans  $\mathcal{B}_{2q}$ ; alors (4.8) est

vraie pour  $N_{2q}(\lambda) = \sum_{(\text{Re } \lambda_j)^{2q}} 1$ . La fonction  $\omega$  associée à  $A^{2q}$  étant la même que

celle associée à A on en déduit encore le théorème 2.1.

6. PRELIMINAIRES A LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2.3.

6.1. Un problème variationnel dans  $\mathbb{R}_+$ , à paramètre.

$\xi$  désignant un paramètre de  $\mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ , on considère sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+) \times W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$

la forme :

$$c_\xi(u, v) = \int_0^\infty t^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} c_{\alpha\beta}(\xi, D_t)^\alpha \overline{u(\xi, D_t)^\beta} v dt,$$

où  $k, m \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2m-1, c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}, c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$ .

On fait l'hypothèse :

pour tout  $\omega$  appartenant à la sphère unité  $S_{n-2}$  de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $c_\omega$  est fortement coercitive sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ .

On note  $(C_\omega, D(C_\omega))$  l'opérateur non borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$  associé à  $c_\omega$  et  $(\mu_j(\omega))_{j \in \mathbb{N}}$  la suite croissante des valeurs propres de  $C_\omega$ . On va démontrer le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1 On suppose  $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$ . Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ , pour tout  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ , le problème

$$(6.1) \quad c_\xi(u, v) - \mu(u, v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (f, v)_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \text{ pour tout } v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+),$$

admet, pour  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$  une solution unique  $u_\mu$  dans  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$  qui s'écrit à l'aide d'un noyau :

$$u_\mu(\xi, t) = \int_0^\infty r(\xi, \mu, t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

où  $r(\xi, \mu, t, \tau)$  est une fonction qui possède les propriétés :

(6.2) pour tous  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ ,  $t, \tau > 0$ ,  $\xi \mapsto r(\xi, \mu, t, \tau)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}^{n-1})$

(6.3) pour tous  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ ,  $t > 0$ ,  $(\xi, \tau) \mapsto r(\xi, \mu, t, \tau)$  appartient à  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$

(6.4) pour tout  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ ,  $(\xi, t) \mapsto r(\xi, \mu, t, t)$  appartient à  $L^1(\mathbb{R}_+^n)$  et :

$$(6.5) \quad \int_{\mathbb{R}_+^n} r(\xi, \mu, t, t) d\xi dt = \frac{\pi(n-1)}{2^{m-k}} \left( \sin \frac{\pi(n-1)}{2^{m-k}} \right)^{-1} \left( \sum_{j \geq 1} \rho_j \right) \cdot (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2^{m-k}}},$$

où  $\rho_j = \frac{1}{n-1} \int_{S_{n-2}} \mu_j(\omega)^{\frac{1-n}{2^{m-k}}} d\omega$ .

Démonstration. La coercivité forte de  $c_\omega$  sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$  implique l'inclusion de  $D(C_\omega)$  dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+)$  et l'existence du résolvant  $(C_\omega - \mu)^{-1}$  pour  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ . De plus il résulte de la compacité de  $S_{n-2}$  qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $\omega \in S_{n-2}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+$  on ait :

$$\|(C_\omega - \mu)^{-1}\|_{0,0,\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|(C_\omega - \mu)^{-1}\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)}$$

Alors (3.2) et (3.4) donnent pour le noyau  $r(\omega, \mu, t, \tau)$  de  $(C_\omega - \mu)^{-1}$  l'estimation :  
il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $\omega \in S_{n-2}$ ,  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ ,  $t, \tau > 0$  on ait :

$$(6.6) \quad |r(\omega, \mu, t, \tau)| \leq c \frac{1}{d(\mu)^{\frac{1}{2^{m-k}}}} \quad \text{et} \quad |r(\omega, \mu, t, \tau)| \leq c (t\tau)^{-\frac{k}{2}} \frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

on fixe maintenant  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ . Pour  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ , le changement de variable  $z = |\xi|t$ , avec les notations  $w(\xi, z) = u(\xi, t)$  et  $g(z) = f(t)$  transforme le problème (6.1) en :

$$c_\xi |\xi|^{-1} (w, v) - \mu |\xi|^{-2m+k} (w, v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (|\xi|^{-2m+k} g, v)_{L^2(\mathbb{R}_+)},$$

pour tout  $v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ .

Pour  $f$  donné dans  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , l'unique solution  $v_\mu$  de ce problème dans  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$  est donnée par :

$$v_\mu(\xi, z) = |\xi|^{-2m+k} \int_0^\infty r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, z, z') g(z') dz'.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de  $u_\mu$  et donne aussi la formule :

$$r(\xi, \mu, t, \tau) = |\xi|^{-2m+k+1} r(\xi|\xi|^{-1}, \mu|\xi|^{-2m+k}, |\xi|t, |\xi|\tau).$$

Alors les estimations (6.6) se traduisent par :

$$|r(\xi, \mu, t, \tau)| \leq c(\mu) \quad \text{et} \quad |r(\xi, \mu, t, \tau)| \leq c(\mu) (t\tau)^{-k/2} |\xi|^{-2m+1} .$$

Ces majorations permettent de montrer (6.2), (6.3) et (6.4) et donc aussi d'appliquer le théorème de Fubini pour écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} r(\xi, \mu, t, t) d\xi dt &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k} \int_0^\infty r(\xi |\xi|^{-1}, \mu |\xi|^{-2m+k}, z, z) dz d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\xi|^{-2m+k} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\mu_j (\xi |\xi|^{-1}) - \mu |\xi|^{-2m+k}} d\xi \\ &= \frac{1}{2^{m-k}} \int_{S_{n-2}} \left( \int_0^\infty \sum_{j \geq 1} \frac{r}{r \mu_j(\omega) - \mu} dr \right) d\omega . \end{aligned}$$

La proposition 3.4 donnant  $\mu_j(\omega) \geq c j^k$  pour tous  $\omega \in S_{n-2}$ ,  $j \geq 1$ , on a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} r(\xi, \mu, t, t) d\xi dt = \frac{1}{2^{m-k}} \sum_{j \geq 1} \int_{S_{n-2}} \frac{1}{\mu_j(\omega)} \left( \int_0^\infty \frac{r}{r - \frac{\mu}{\mu_j(\omega)}} dr \right) d\omega ,$$

ce qui, à l'aide de la formule  $\int_0^\infty \frac{r^{-1+\alpha}}{r-\mu} dr = (-\mu)^{-1+\alpha} \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$ , valable pour  $0 < \alpha < 1$ ,  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ , donne (6.5).

### 6.2. Etude de la résolvante d'un opérateur modèle dans $\mathbb{R}_+^n$ .

Sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n) \times W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$ , on considère la forme

$$c(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} c_{\alpha\beta} D^\alpha u \overline{D^\beta v} dx ,$$

avec encore  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq 2m-1$ ,  $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$ ,  $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ .

On suppose que pour tout  $\mu < 0$ ,  $c(u, v) - \mu(u, v)$  est fortement coercitive sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$ . Alors pour  $\omega \in S_{n-2}$  la forme  $c_\omega$  associée de manière évidente à  $c$  est fortement coercitive sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ .

On note  $(C, D(C))$  l'opérateur non borné dans  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$  associé à  $c$ ; pour  $\mu \notin \mathbb{R}_+$  le résolvant  $F_\mu = (C - \mu)^{-1}$  existe et a son image contenue dans  $W_{2m}^k(\mathbb{R}_+^n)$ .

Si de plus  $2m-k > n$ , la proposition 3.2 donne l'existence d'un noyau  $F_\mu(x, y)$  pour  $F_\mu$ .

On note enfin  $F_\mu(x_n, x_n)$  au lieu de  $F_\mu((0, x_n), (0, x_n))$ .

De la proposition 6.1, en utilisant les notations de 6.1, on va déduire :

COROLLAIRE 6.2. On suppose  $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$ . Pour  $\mu \notin \mathbb{R}_+$ , on a :

$$(6.7) \quad \int_0^\infty F_\mu(x_n, x_n) dx_n = (2\pi)^{1-n} \frac{\pi(n-1)}{2m-k} \left(\sin \frac{\pi(n-1)}{2m-k}\right)^{-1} \left(\sum_{j \geq 1} \rho_j\right)^{-1} (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}}$$

Démonstration. Comme dans PHAM THE LAI [15], on calcule  $F_\mu(x, y)$  ;

on montre que pour tous  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$  on a :

$$(6.8) \quad F_\mu(x, y) = (2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x' - y', \xi \rangle} r(\xi, \mu, x_n, y_n) d\xi,$$

les notations étant celles de 6.1 :

Pour  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^n)$ , la fonction  $u_\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} F_\mu(x, y) \varphi(y) dy$  vérifie en particulier : pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$\begin{cases} \hat{u}_\mu(\xi, \cdot) \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+) \text{ et} \\ c_\xi(\hat{u}_\xi(\xi, \cdot), v) - \mu(\hat{u}_\mu(\xi, \cdot), v)_{L^2(\mathbb{R}_+)} = (\hat{\varphi}(\xi, \cdot), v)_{L^2(\mathbb{R}_+)}, \end{cases}$$

pour tout  $v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+)$ ,

où  $\hat{\varphi}(\xi, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\langle x', \xi \rangle} \varphi(x', x_n) dx'$  est le transformé de

Fourier partielle en  $x'$  de  $\varphi$ .

D'après la proposition 6.1 on a donc :

$$u_\mu(x', x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x', \xi \rangle} \left( \int_0^\infty r(\xi, \mu, x_n, y_n) \hat{\varphi}(\xi, y_n) dy_n \right) d\xi$$

(6.3) et le théorème de Fubini donnent :

$$u_\mu(x', x_n) = (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x', \xi \rangle} r(\xi, \mu, x_n, y_n) \hat{\varphi}(\xi, y_n) d\xi \right) dy_n$$

(6.2) et ce même théorème donnent ensuite :

$$u_\mu(x', x_n) = (2\pi)^{-(n-1)} \int_0^\infty dy_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x' - y', \xi \rangle} r(\xi, \mu, x_n, y_n) d\xi \right) \varphi(y', y_n) d\xi dy'$$

on a donc montré l'égalité dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^n)$  de  $F_\mu(x, \cdot)$  et de

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\langle x'-y', \xi \rangle} r(\xi, \mu, x_n, y_n) d\xi, \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}_+^n. \text{ Ces fonctions de}$$

$(x, y)$  étant continues dans  $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ , on a bien (6.8).

Enfin (6.8), (6.4) et (6.5) donnent immédiatement le corollaire 6.2.

Sur le noyau  $F_\mu(x, y)$  on a aussi le résultat suivant, conséquence immédiate de la proposition 3.2. :

PROPOSITION 6.3. Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $\mu \in \mathbb{R}_+$  et  $\varepsilon > 0$  on ait

$$(6.9) \quad \int_{\varepsilon}^{\infty} |F_\mu(x_n, x_n)| dx_n \leq c \varepsilon^{1 - \frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m}}}{d(\mu)}.$$

On donne maintenant des estimations sur l'opérateur  $F_\mu$  qui seront utilisées dans l'étude des commutants pour la démonstration du théorème 2.3. Ces estimations sont basées sur un lemme, essentiel pour améliorer les résultats de PHAM THE LAÏ [16] :

Pour  $r > 0$  on note :  $B_+(r) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < r, x_n > 0\}$ , et pour  $\ell, k \in \mathbb{N}$ ,

$$W_\ell^k(B_+(r)) = \{u \in \mathcal{D}'(B_+(r)) ; x_n^k D^\alpha u \in L^2(B_+(r)) ; |\alpha| \leq \ell\};$$

on munit  $W_\ell^k(B_+(r))$  de la norme :

$$\|u\|_{W_\ell^k(B_+(r))} = \left( \sum_{|\alpha| \leq \ell} \|x_n^k D^\alpha u\|_{L^2(B_+(r))}^2 \right)^{1/2}.$$

On a :

LEMME 6.4. Soient  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq m$ . Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tous  $\delta, r, 0 < \delta \leq r \leq 1$ , pour tous  $u \in W_m^k(B_+(1))$  et  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \ell \leq m$ , on ait :

$$\|u\|_{W_\ell^k(B_+(r))} \leq c \{ \delta^{m-\ell} \|u\|_{W_m^k(B_+(1))} + \delta^{-\ell} (\delta^k + r^k) \|u\|_{L^2(B_+(1))} \}.$$

Démonstration. D'après [8],  $\|v\|_{W_\ell^k(B_+(1))}$  est équivalente à  $\|x_n^k v\|_{H^\ell(B_+(1))}$  si  $k \geq \ell$

et à  $\{ \|v\|_{H^{\ell-k}(B_+(1))} + \|x_n^k v\|_{H^\ell(B_+(1))} \}$  si  $k < \ell$ .

Un résultat classique d'interpolation donne alors dans les deux cas l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $\rho, 0 < \rho \leq 1$ , tout  $\ell \in \mathbb{N}, 0 \leq \ell \leq m$ , tout  $v \in W_m^k(B_+(1))$  on ait :

$$\|v\|_{W_\ell^k(B_+(1))} \leq c \left\{ \rho^{m-\ell} \left( \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta(x_n^k v)\|_{L^2(B_+(1))} + \sum_{|\gamma|=m-k} \|D^\gamma v\|_{L^2(B_+(1))} \right) + \rho^{k-\ell} \|v\|_{L^2(B_+(1))} + \rho^{-\ell} \|x_n^k v\|_{L^2(B_+(1))} \right\} .$$

Soit alors  $0 < r \leq 1$  et  $u \in W_m^k(B_+(1))$ . On sait  $y = rx, v(x) = u(rx)$  dans cette inégalité ; on obtient, pour tout  $\alpha, |\alpha| \leq \ell$ :

$$r^{|\alpha|-\ell} \|y_n^k D^\alpha u\|_{L^2(B_+(r))} \leq c \left\{ (\rho r)^{m-\ell} \left( \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta(y_n^k u)\|_{L^2(B_+(r))} + \sum_{|\gamma|=m-k} \|D^\gamma u\|_{L^2(B_+(r))} \right) + (\rho r)^{k-\ell} \|u\|_{L^2(B_+(r))} + (\rho r)^{-\ell} \|y_n^k u\|_{L^2(B_+(r))} \right\} ,$$

d'où le lemme.

Pour  $0 < \varepsilon \leq 1/2$ , on introduit une fonction  $\zeta_\varepsilon$  possédant les propriétés

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n), 0 \leq \zeta_\varepsilon \leq 1, \zeta_\varepsilon = 1 \text{ dans } \|x\| \leq \varepsilon \\ \text{le support de } \zeta_\varepsilon \text{ est contenu dans } \|x\| < 2\varepsilon, \text{ et} \\ \|D^\alpha \zeta_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq c \varepsilon^{-|\alpha|} \end{array} \right.$$

Du lemme 6.4 on va déduire :

**PROPOSITION 6.5.** Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $\mu \notin \mathbb{R}_+, 0 < \varepsilon \leq 1/2, |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$  on ait :

$$(6.11) \quad \|\zeta_\varepsilon F_{\mu, 0, 2m+k, \mathbb{R}_+}^n\| \leq c \frac{|\mu|}{d(\mu)}$$

$$(6.12) \quad \|[C, \zeta_\varepsilon] F_{\mu, 0, 0, \mathbb{R}_+}^n\| \leq c \frac{|\mu|}{d(\mu)} (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m}$$

**Démonstration.** Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $\mu \notin \mathbb{R}_+$  on ait :

$$(6.13) \quad \|F_\mu\|_{0,0,\mathbb{R}_+^n} \leq \frac{c}{d(\mu)} \text{ et } \|F_\mu\|_{0,2m-h:k-h,\mathbb{R}_+^n} \leq c \frac{|\mu|}{d(\mu)}, \text{ pour } 0 \leq h \leq k.$$

Ces majorations et le lemme 6.4 donnent pour  $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $0 \leq h \leq k$ ,  $0 \leq \ell \leq 2m-h$  et  $0 < \delta \leq 2\varepsilon$  :

$$(6.14) \quad \|F_\mu f\|_{W_\ell^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \leq \frac{c}{d(\mu)} \{ \delta^{2m-h-\ell} |\mu| + \delta^{-\ell} (\delta^{k-h} + \varepsilon^{k-h}) \} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$$

on fait alors  $\delta = (\varepsilon^{k-h} |\mu|^{-1})^{\frac{1}{2m-h}}$  avec  $\delta < \varepsilon$  ; (6.14) devient :

$$(6.15) \quad \|F_\mu f\|_{W_\ell^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \leq \frac{c}{d(\mu)} \varepsilon^{k-h} (\varepsilon^{k-h} |\mu|^{-1})^{-\frac{\ell}{2m-h}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)},$$

pour  $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$

De cette estimation on déduit alors facilement (6.11) et (6.12).

7. DEMONSTRATION DU THEOREME 2.3 :  $n > 2m/k$ .

7.1. Cas où  $2m-k > n$ .

D'après P. BOERO-R. PAVEC [5], pour chaque point  $s$  de  $\Gamma$  il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $s$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $\theta_s$  de  $\mathcal{V}$  dans  $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$  qui possède les propriétés :

- (7.1) {
- .  $\theta_s(s) = 0$ ,  $\theta_s(\mathcal{V} \cap \Omega) \subseteq \{x \in B(1), x_n > 0\}$ ,  $\theta_s(\mathcal{V} \cap \Gamma) \subseteq \{x \in B(1), x_n = 0\}$
  - . l'image par  $\theta_s$  de la normale en  $s$  à  $\Gamma$  est contenue dans  $\{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$
  - . pour tout  $x \in \mathcal{V}$  la  $n^{\text{ième}}$  coordonnée de  $\theta_s(x)$  est  $\varphi(x)$
  - . si  $J(x)$  désigne la matrice jacobienne de  $\theta_s$  en  $x$ ,  $J(s)$  est une isométrie de  $T_s$  sur  $T = \{x \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}$ ,  ${}^t J(s)$  est une isométrie de  $T$  sur  $T_s$  et l'image par  ${}^t J(s)$  de  $(0, \dots, 0, 1)$  est  $\|\text{grad } \varphi(s)\| v_s$ ,
  - . si  $\rho_s$  désigne la valeur absolue du déterminant jacobien de  $\theta_s^{-1}$ ,  $\Gamma$  étant compacte, il existe  $\varepsilon_0$ ,  $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ , tel que la boule  $\{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \varepsilon_0\}$  soit contenue dans  $\theta_s(\mathcal{V})$  pour tout  $s \in \Gamma$  et tel que l'application  $(s, h) \mapsto \rho_s(0, h)$  soit continue sur  $\Gamma \times [0, \varepsilon_0]$ .

On note  $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap \Omega$  et  $U = \theta_s(\mathcal{U})$ . Par le difféomorphisme  $\theta_s$  la forme  $a$  est transformée en une forme  $c$  fortement coercitive sur l'espace des fonctions de  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$  à support dans  $\bar{U}$  : la restriction à  $\mathcal{U}$  de  $G_\mu = (A-\mu)^{-1}$  est transformée en un opérateur  $A_\mu$  continu dans  $L^2(U)$ , à image dans  $W_{2m}^k(U)$  qui vérifie : pour  $f \in L^2(U)$ ,

$$c(H_\mu f, v) - \mu(H_\mu f, v)_{L^2(U)} = (f, v)_{L^2(U)} \text{ pour tout } v \in W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n) \text{ à support dans } \bar{U}.$$

Alors pour  $2m-k > n$ ,  $G_\mu$  et  $H_\mu$  sont des opérateurs intégraux dont les noyaux  $G_\mu(x, y)$  et  $H_\mu(x, y)$  sont liés par la relation :

$$H_\mu(x, y) = G_\mu(\theta_s^{-1}(x), \theta_s^{-1}(y)) \rho_s(y).$$

Pour étudier  $H_\mu(x, y)$  et par là même  $G_\mu(x, y)$  on va se ramener à la situation de 6.2 : on a

$$c(u, v) = \int_U x_n^k \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} \circ \theta_s^{-1} P_\alpha(x, D) u \overline{P_\beta(x, D) v} dx,$$

avec  $(P_\alpha(x, D)u) \circ \theta_s = D^\alpha(u \circ \theta_s)$  ;  $P_\alpha(x, D)$  est donc un opérateur différentiel d'ordre  $|\alpha|$  ; on note  $P'_\alpha(0, D)$  la partie homogène d'ordre  $|\alpha|$  de  $P_\alpha(x, D)$ , les coefficients étant figés en 0 et :

$$c'_s(u, v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) P'_\alpha(0, D) u \overline{P'_\beta(0, D) v} dx$$

Pour tout  $\mu < 0$ ,  $c'_s(u, v) - \mu(u, v)_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}$  est fortement coercitive sur  $W_m^{k/2}(\mathbb{R}_+^n)$  ;  $C'_s$  étant l'opérateur non borné associé à  $c'_s$  dans  $L^2(\mathbb{R}_+^n)$ , pour  $2m-k > n$  on note alors  $F_\mu(x, y)$  le noyau de l'opérateur  $(C'_s - \mu)^{-1}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}_+$ .

On va utiliser d'abord la fin du paragraphe 6.2 pour démontrer le résultat de comparaison suivant :

PROPOSITION 7.1. On suppose  $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$ . Soient  $\theta, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta + \beta < 1$  ; il existe  $\mu_0 > 0$  tel que pour  $s \in \Gamma$ ,  $\mu \in \mathcal{B}_{\theta_0}$ ,  $|\mu| > \mu_0$  on ait :

$$\left| \int_0^1 |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}} (G_\mu(\theta_s^{-1}(0, h), \theta_s^{-1}(0, h)) \rho_s(0, h) - F_\mu(h, h)) dh \right| < c \frac{|\mu|}{d(\mu)^2} \left( 1 + \frac{n-1}{2m-k} - \frac{\beta}{2m-k} \right)$$

Démonstration. Pour  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0/2$  on considère deux fonctions  $\zeta_\varepsilon$  et  $\eta_\varepsilon$  vérifiant (6.10) et de plus  $\eta_\varepsilon \zeta_\varepsilon = \zeta_\varepsilon$ . Pour  $\mu \in \rho(A)$  on note

$$T_{\varepsilon, \mu} = \zeta_\varepsilon (H_\mu - F_\mu) \zeta_\varepsilon .$$

Si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'_s$  désignent les opérateurs différentiels associés à  $c$  et  $c'_s$  respectivement, on a :

$$T_{\varepsilon, \mu} = \zeta_\varepsilon F_\mu \eta_\varepsilon (\mathcal{C}'_s - \mathcal{C}) H_\mu \zeta_\varepsilon - \zeta_\varepsilon F_\mu [\eta_\varepsilon, \mathcal{C}'_s] H_\mu \zeta_\varepsilon \equiv T_1 + T_2 .$$

Pour estimer  $T_1$  on écrit  $\mathcal{C}'_s - \mathcal{C}$  sous la forme

$$\sum_{h=0}^k x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leq 2m-h} (q_{h,\alpha}(x) - q_{h,\alpha}(0)) D^\alpha + \sum_{h=0}^k x_n^{k-h} \sum_{|\alpha| \leq 2m-h-1} p_{h,\alpha} D^\alpha$$

alors on a : pour  $f \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ ,

$$(7.2) \quad \|\eta_\varepsilon (\mathcal{C}'_s - \mathcal{C}) H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)} \leq c \{ \varepsilon \|H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{W_{2m}^k(U)} + \sum_{h=0}^k \|H_\mu \zeta_\varepsilon f\|_{W_{2m-h-1}^{k-h}(B_+(2\varepsilon))} \} .$$

D'après (4.1),  $H_\mu$  vérifie des inégalités identiques à (6.13) pour  $\mu \in \mathcal{R}_- \setminus \{0\}$  donc aussi les inégalités (6.15) avec  $f \in L^2(U)$  et  $\mu \in \mathcal{R}_- \setminus \{0\}$ .

Ces majorations, (7.2) et (6.11) impliquent :

$$(7.3) \quad \|T_1\|_{0,0,\mathbb{R}_+^n} \leq c \frac{\varepsilon |\mu|}{d(\mu)} \quad \text{et} \quad \|T_1\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+^n} \leq \frac{\varepsilon |\mu|^2}{d(\mu)^2} , \quad \text{pour } \mu \in \mathcal{R}_0, |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$$

pour estimer  $T_2$  on introduit encore  $\varphi_2, \dots, \varphi_p$  vérifiant (6.10) et  $\varphi_j \varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$  pour  $1 \leq j \leq p$  avec  $\varphi_1 = \eta_\varepsilon$  et  $\varphi_{p+1} = \zeta_\varepsilon$ . On a :

$$\zeta_\varepsilon F_\mu [\eta_\varepsilon, \mathcal{C}'_s] = - \zeta_\varepsilon F_\mu [\mathcal{C}'_s, \varphi_p] F_\mu [\mathcal{C}'_s, \varphi_{p-1}] \dots F_\mu [\mathcal{C}'_s, \varphi_1] .$$

De plus  $H_\mu \zeta_\varepsilon$  vérifie aussi une inégalité de type (6.12) pour  $\mu \in \mathcal{R}_0, |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$ .

Alors, avec (6.11), (6.12) on obtient : pour tout  $p \geq 1$  il existe  $c > 0$  tel que pour  $\mu \in \mathcal{R}_0, |\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$  on ait :

$$(7.4) \quad \begin{cases} \|T_2\|_{0,0,\mathbb{R}_+^n} \leq \frac{c}{d(\mu)} \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m} \right)^p \\ \|T_2\|_{0,2m:k,\mathbb{R}_+^n} \leq \frac{c|\mu|}{d(\mu)} \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m} \right)^p \end{cases}$$

Ayant des majorations identiques pour l'adjoint (7.3), (7.4), (3.2) et (3.3) montrent que pour tout  $p \geq 1$ , il existe  $c > 0$  tel que pour  $0 < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\mu \in \mathcal{B}$ ,  $|\mu| > \varepsilon^{-2m+k}$  on ait :

$$\begin{cases} |T_{\varepsilon, \mu}(x, y)| \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m-k}}}{d(\mu)} \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} + \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m, p} \right) \right) \\ |T_{\varepsilon, \mu}(x, y)| \leq c (x_n y_n)^{-\frac{kn}{4m}} \left( \frac{\varepsilon |\mu|}{d(\mu)} + \frac{|\mu|}{d(\mu)} \cdot (\varepsilon^{-2m+k} |\mu|^{-1})^{1/2m, p} \right) \end{cases}$$

Soit alors  $\beta > 0$  ; on fait  $\varepsilon = |\mu|^{\frac{\beta}{2m-k}}$  dans les inégalités ci-dessus ; en notant  $H_\mu((0, h), (0, h)) = H_\mu(h, h)$ , de même pour  $F_\mu$ , on obtient : pour  $|\mu| > \mu_0 \geq 1$ ,  $\mu \in \mathcal{B}$ ,  $0 < h < |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}}$ ,

$$\begin{cases} |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leq c \frac{|\mu|^{1+\frac{n-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} (1 + |\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m-k}} d(\mu) \cdot \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} \right)^{1+\frac{\beta-1}{2m} p}) \\ |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leq c h^{-\frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}-\frac{\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} (1 + |\mu|^{-1+\frac{\beta}{2m-k}} d(\mu) \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} \right)^{1+\frac{\beta-1}{2m} p}) \end{cases}$$

Soit enfin  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \theta < 1$ . Comme en 5.1, ces deux dernières inégalités montrent que pour  $\theta + \beta < 1$  on a :

$$\begin{cases} |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leq c \frac{|\mu|^{1+\frac{n-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \\ |H_\mu(h, h) - F_\mu(h, h)| \leq c h^{-\frac{kn}{2m}} \frac{|\mu|^{1+\frac{n}{2m}-\frac{\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour } \mu \in \mathcal{B}_\theta, |\mu| > \mu_0, \\ 0 < h < |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}} \end{array}$$

On intègre alors la première inégalité sur  $(0, |\mu|^{\frac{-1}{2m-k}})$  et la seconde sur  $(|\mu|^{\frac{-1}{2m-k}}, |\mu|^{\frac{-\beta}{2m-k}})$  ; on obtient la proposition 7.1 puisqu'on peut choisir  $\mu_0$  indépendant de  $s$ .

**COROLLAIRE 7.2** On suppose  $\frac{2m}{k} < n < 2m-k$ . On a

$$\left| \int_{\Omega} G_\mu(x, x) dx \right| = o(|\mu|^{-1+\frac{n-1}{2m-k}}) \text{ dans } \mathcal{B}_\theta \text{ avec}$$

$$(7.5) \quad \begin{cases} \theta \leq \frac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)} & \text{si } \frac{2m}{k} < n < \frac{4m}{k} - 1 \\ \theta < \frac{m}{3m-k} & \text{si } n \geq \frac{4m}{k} - 1 \end{cases}$$

Démonstration. Pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$  on a  $P'_\alpha(y, \xi) = ({}^t J(\theta^{-1}(y))\xi)^\alpha$  donc pour  $\omega \in S_{n-2}$ , en notant  $\omega_s = {}^t J(s) \binom{\omega}{0}$ , on a d'après (7.1) et avec des notations analogues à celles de 6.2 :

$$c'_{s, \omega}(u, v) = \int_0^\infty x_n^k \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(s) (\omega_s + \|\text{grad } \varphi(s)\| v_s \partial_{x_n})^\alpha u (\omega_s + \|\text{grad } \varphi(s)\| v_s \partial_{x_n})^\beta v dx_n$$

La  $j^{\text{ième}}$  valeur propre de  $c'_{s, \omega}$  est donc  $\|\text{grad } \varphi(s)\|^k \mu_j(s, \omega_s)$ , où  $\mu_j(s, \omega_s)$  est la  $j^{\text{ième}}$  valeur propre de  $\beta_{s, \omega_s}$ . Alors le corollaire 6.2 donne, avec la notation (2.3) :

$$\int_0^\infty F_\mu(x_n, x_n) dx_n = \frac{\pi(n-1)}{2m-k} (\sin \frac{\pi(n-1)}{2m-k})^{-1} C(s) (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}}$$

On note  $\gamma_{m, k, n} = \frac{\pi(n-1)}{2m-k} (\sin \frac{\pi(n-1)}{2m-k})^{-1} \int_\Gamma C(s) ds$ .

Les propositions 6.3 et 7.1 impliquent alors : pour  $|\mu| > \mu_0$ ,  $\mu \in \mathcal{B}_\theta$ , avec  $\rho = |\mu|^{-\frac{\beta}{2m-k}}$

$$\left| \int_{\Omega - \Omega(\rho)} G(x, x) dx - \gamma_{m, k, n} (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}} \right| \leq c \left\{ \frac{|\mu|^{1 + \frac{n-1-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}} (1 - \frac{kn}{2m})}{d(\mu)} \right\}$$

Ce qui, joint à la majoration déduite de (4.1) et (3.3) :

$$\left| \int_{\Omega(\rho)} G_\mu(x, x) dx \right| \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}} (1 - \frac{kn}{2m})}{d(\mu)}, \text{ pour } \mu \in \mathcal{B}_\theta,$$

donne enfin : pour  $|\mu| > \mu_0$ ,  $\mu \in \mathcal{B}_\theta$  :

$$(7.6) \quad \left| \int_\Omega G_\mu(x, x) dx - \gamma_{m, k, n} (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}} \right| \leq c \left\{ \frac{|\mu|^{1 + \frac{n-1-\beta}{2m-k}}}{d(\mu)^2} + \frac{|\mu|^{\frac{n}{2m} - \frac{\beta}{2m-k}} (1 - \frac{kn}{2m})}{d(\mu)} \right\}$$

$\theta$  étant fixé, la meilleure majoration de  $\left| \int_\Omega G_\mu(x, x) dx \right|$  par une puissance de  $|\mu|$  dans  $\mathcal{B}_\theta$  est obtenue s'il existe  $\beta$ ,  $0 < \theta + \beta < 1$  tel que :

$$\theta \frac{2m-k}{m} \leq \beta \leq 1 - \frac{2m-k}{kn-2m} \theta,$$

et ceci équivaut au corollaire 7.2.

Démonstration du théorème 2.3. Le corollaire 7.2 et la proposition 4.4 donnent :

$$|N(\lambda) - I(\lambda)| \leq c \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m}} \quad \text{pour } \lambda > \lambda_0, \theta \text{ appartenant aux intervalles } (0, \theta_n) \text{ décrits en (7.5) suivant les valeurs de } n.$$

On étudie encore  $I(\lambda)$  : (4.4) et (7.6) donnent, pour  $\mu \in \mathcal{R}_{\theta_0}, |\mu| > \mu_0, 0 < \theta + \beta < 1$  :

$$|f(\mu) - \gamma_{m,k,n}(-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}}| \leq c \frac{|\mu|^{\frac{n-1}{2m-k}}}{d(\mu)} \left( \frac{|\mu|}{d(\mu)} \right)^{1 - \frac{1}{2m}} + \frac{|\mu|^{-\beta}}{d(\mu)} + |\mu|^{-(1-\beta)} \frac{kn-2m}{2m(2m-k)}$$

On choisit  $L(\lambda)$  du même type qu'en 5.1. Alors pour  $\lambda$  assez grand :

$$|I(\lambda) - \frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}} d\mu| \leq c \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{(1-\theta)}{2m} - \frac{\beta}{2m} + \frac{\theta}{2m} - (1-\beta) \frac{kn-2m}{2m(2m-k)}} \text{Log } \lambda$$

Enfin le même calcul qu'en 5.1 donne pour  $\lambda$  assez grand :

$$\left| \frac{\gamma_{m,k,n}}{2i\pi} \int_{L(\lambda)} (-\mu)^{-1 + \frac{n-1}{2m-k}} d\mu - \int_{\Gamma} C(s) ds \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}} \right| \leq c \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m}}$$

On a donc :  $\theta$  vérifiant (7.5), pour tout  $\beta, 0 < \theta + \beta < 1$ , pour  $\lambda$  assez grand :

$$|N(\lambda) - \int_{\Gamma} C(s) ds \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2m-k}}| \leq c \lambda^{\frac{n-1}{2m-k} - \frac{\theta}{2m} - \frac{(1-\theta)}{2m} - \frac{\beta}{2m} + \frac{\theta}{2m} - (1-\beta) \frac{kn-2m}{2m(2m-k)}} \text{Log } \lambda$$

On note  $f(\lambda)$  la parenthèse de cette dernière inégalité et on fait

$$\beta = \frac{2m-k}{2m} \alpha \theta + (1-\alpha)(1-\theta), \quad \text{pour } 0 < \alpha < 1,$$

dans  $f(\lambda)$ . Alors  $f(\lambda) \leq c \lambda^{-\frac{\theta}{2m}}$  pour  $\lambda$  assez grand si  $\theta \leq 1/2$  et si :

$$\text{il existe } \alpha \in ]0, 1[, \frac{2m(4m-k-kn)\theta}{(kn-2m)(2m-\theta(4m-k))} < \alpha < \frac{2(m-\theta(3m-k))}{2m-\theta(4m-k)}$$

Cette condition est toujours vérifiée si  $n \geq \frac{4m}{k} - 1$  et seulement pour  $\theta < \frac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)}$

si  $n < \frac{4m}{k} - 1$  ; mais dans ce dernier cas on voit facilement que pour  $\theta \leq 1/2$  et

$$\theta \leq \frac{m(kn-2m)}{(2m-k)(kn-m)} \quad \text{on a } f(\lambda) \leq c \lambda^{-\frac{\theta}{2m}} \text{Log } \lambda.$$

Ceci démontre le théorème 2.3 dans le cas  $2m-k > n$ .

7.2 Cas où  $2m-k < n$ .

On procède comme en 5.2 pour se ramener à l'étude du noyau de  $(A^{2q-\mu})^{-1}$  avec  $2q(2m-k) > n$ , et on compare ce noyau à celui de  $(B_s^{2q-\mu})^{-1}$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. AGMON - Lectures on elliptic boundary value problems.  
Van Nostrand Mathematical Studies.
- [2] S. AGMON - Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators.  
Archive for rational mechanics and analysis. vol 28 n° 3 (1968).
- [3] S. AGMON et Y. KANNAÏ - On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators.  
Israël J. Math 5, 1-30 (1967).
- [4] M.S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.  
Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 34 n° 5, 361-379 (1969).
- [5] P. BOERO - R. PAVEC - Coercivité des formes sesquilineaires intégral-différentielles dans des espaces de Sobolev avec poids.  
CRAS Paris t. 270 (1970) p. 1416-1419.
- [6] P. BOLLEY - J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels.  
CRAS Paris t. 279 (1974) 651-653.
- [7] P. BOLLEY - J. CAMUS - Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérés variationnels.  
CRAS Paris t. 282 (1976) 45-47.
- [8] P. BOLLEY - J. CAMUS - Espaces de Sobolev avec poids.  
Sém. Anal. Fonctionnelle Rennes 1968-1969.
- [9] C. GOHBERG et G. KREIN - Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace hilbertien.  
Dunod - Paris.
- [10] P. MALLIAVIN - Un théorème taubérien avec reste pour la transformée de Stieljes  
CRAS Paris 255 (1962) 2351-52.
- [11] C. NORDIN - The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator.  
Arkiv för Matematik vol. 10 (1972) p. 3-21.
- [12] PHAM THE LAÏ - Classe de compacité d'opérateur intervenant dans une classe de problèmes elliptiques dégénérés.  
Israël J. of Math., vol. 17 (1974) p. 364-379.
- [13] PHAM THE LAÏ - Noyaux d'Agmon.  
Séminaire J. Leray, Collège de France (1973).
- [14] PHAM THE LAÏ - Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2.  
CRAS Paris t. 278 (1974) p. 1619-1622.  
Séminaire J. Leray Collège de France.
- [15] PHAM THE LAÏ - Opérateurs elliptiques dégénérés : comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres.  
CRAS Paris t. 280 (1975) p. 1067-1070.  
Journal de Math Pures et appl. vol. 55 (1976) p. 379-420.

- [16] PHAM THE LAÏ - Estimation du reste dans la théorie spectrale d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.  
Séminaire Goulaouic-Schwartz 975-76 exposé n° X.
- [17] N. SHIMAKURA - Quelques exemples de  $\zeta$ -fonctions d'Epstein pour les opérateurs elliptiques dégénérés de second ordre.  
Proc. Japan Acad. Sc. 46 (1970) p. 1065-1069.
- [18] L. VULIS - Z. SOLOMJAK - Spectral asymptotics of degenerate elliptic operators  
Soviet Math Dokl vol. 13 (1972) p. 1484-1488.