PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

ALBERT RAUGI

Périodes des fonctions harmoniques bornées

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1978, fascicule 1
« Séminaire de probabilités », , p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1978___1_A10_0>

PERIODES DES FONCTIONS HARMONIQUES BORNEES

(Albert RAUGI)

1. *PRELIMINAIRES*

(1.1) Soient G un semi-groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Pour toute fonction borélienne f sur G, nous posons

$$R_\mu f(g) = \int_G f(gx)\,\mu(dx) \qquad (g \in G)$$

lorsque cette expression a un sens. Nous appelons fonction μ-harmonique bornée, toute fonction borélienne bornée f telle que $f = R_\mu f$.

Nous notons $H(\mu)$ l'espace de Banach des fonctions μ-harmoniques bornées, muni de la norme de la convergence uniforme. Nous désignons par $H_c(\mu)$ le sous-espace de $H(\mu)$ formé des éléments continus de $H(\mu)$. Nous appelons $HG(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$; $HGD(\mu)$] le sous-espace de $H(\mu)$ formé par les éléments de $H(\mu)$ uniformément continus à gauche (u.c.g.) [resp. uniformément continus à droite (u.c.d.) ; u.c.g. et u.c.d.] .

(1.2) Si f est un élément de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$], pour toute mesure de probabilité α sur G, la fonction borélienne $L_\alpha f$, définie par

$$L_\alpha f(g) = \int_G f(xg)\,\alpha(dx) \quad , \quad (g \in G)$$

est un élément de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$] .

Supposons que G soit un groupe L.C.D. Alors pour tout élément f de $H(\mu)$ [resp. $HD(\mu)$] et toute mesure de probabilité α sur G absolument continue par rapport à une mesure de Haar de G, $L_\alpha f$ est un élément de $HG(\mu)$ [resp. $HGD(\mu)$]. On en déduit que :

(1.3) <u>Lemme</u>.

Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Désignons par m une mesure de Haar de G. Pour tout élément f de $H(\mu)$ [resp. $H_c(\mu)$, $HD(\mu)$], il existe une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $HG(\mu)$ [resp. $HG(\mu)$; $HDG(\mu)$] qui converge m-p.s. (resp. qui converge ponctuellement) vers f.

(1.4) <u>Définition</u>

Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Nous désignons par m une mesure de Haar de G. Nous appelons fonction μ-harmonique bornée au sens faible sur G, toute fonction borélienne bornée telle que

$$R_\mu f = f \quad m\text{-p.s.}$$

Nous désignons par $\mathcal{H}(\mu)$ l'espace de Banach de ces fonctions (muni de la norme de $L^\infty(m)$).

Du lemme (1.3) il résulte que :

(1.5) <u>Corollaire</u>

$$\begin{aligned} H_c(\mu) = \{constantes\} &\Longleftrightarrow \mathcal{H}(\mu) = \{constantes\ m\text{-p.s.}\} \\ &\Longleftrightarrow HG(\mu) = \{constantes\} \end{aligned}$$

(1.6) Soit $(\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mathbb{P}_x)_{x\in G})$ la marche aléatoire droite de loi μ sur G. Pour tout élément f de $H(\mu)$, nous savons que : $f(X_n)$ est une martingale bornée pour toute probabilité

$\mathbb{P}_x$, $x \in G$; $\lim_n f(X_n)$ existe donc $\mathbb{P}_x$-p.s. $\forall x \in G$ et nous avons, pour tout élément g de G ,

$f(g) = \mathbb{E}_g\,[\lim_n f(X_n)] = \mathbb{E}_e\,[\lim_n f(gX_n)]$, si G possède un élément unité e .

(1.7) Lemme

Soit $f \in H(\mu)$ *; posons*

$$h(g,\xi) = [f(g\xi) - f(g)]^2 , \quad (g\,,\xi) \in G \times G .$$

Alors, pour tout entier $r \geq 1$

$$\sup_{x \in G} \Big(\sum_{n \geq 1} \int_G \mathbb{E}_x[h(X_n,\xi)]\ \mu^r(d\xi)\Big) < +\infty$$

Preuve. Nous avons

$$\int_G \mathbb{E}_x[h(X_n,\xi)]\ \mu^r(d\xi) = R_\mu^{n+r}\ f^2(x) - R_\mu^n\ f^2(x)$$

D'où pour tout $N \geq r$,

$$S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_G \mathbb{E}_x[h(X_n,\xi)]\ \mu^r(d\xi)$$

$$= \sum_{k=1}^{r} [R_\mu^{N+k}\ f^2(x) - R_\mu^k\ f^2(x)]$$

$$\leq 2r\ ||f||_\infty^2 .$$

La suite $\{S_N(x)\}_{N \in \mathbb{N}}$ est donc convergente et nous avons

$$\sup_{x \in G} [\lim_N S_N(x)] \leq 2r||f||_\infty^2 .$$

(1.8) Corollaire.

Soit $f \in H(\mu)$. *Posons :*

$B(f) = \{(\omega,\xi) \in \Omega \times G$ *: les limites* $\lim_n f(X_n(\omega)\xi)$ *et* $\lim_n f(X_n(\omega))$ *existent et sont égales*$\}$.

Alors pour tout entier $r \geq 1$ *et tout* $x \in G$, $B(f)$ *est un borélien de* $\Omega \times G$ *de* $\mathbb{P}_x \otimes \mu^r$ *- mesure 1* .

(1.9) Corollaire

Si $f \in HD(\mu)$,

$B(f) \supset \Omega' \times T_\mu$,

où Ω' *est un borélien de* Ω *de* $\mathbb{P}_x$*-mesure 1* $\forall x \in G$ *et* T_μ *est le semi-groupe fermé de* G *engendré par le support de* μ .

Preuve. Il suffit de remarquer que si $f \in HD(\mu)$, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\xi \in G : (\omega,\xi) \in B(f)\}$ est fermé dans G .

(1.10) Corollaire.

Si $f \in HG(\mu)$, $\tilde{B}(f) = \bigcap_{g \in G} B(f^g)$ *est un borélien de* $\Omega \times G$ *de* $\mathbb{P}_x \otimes \mu^r$*-mesure 1* , $\forall r \geq 1$, $\forall x \in G$. *Pour tout élément* (ω,ξ) *de* $\tilde{B}(f)$, *nous avons*

$$\lim_n \sup_{g \in K} |f(gX_n(\omega)\xi) - f(gX_n(\omega)| = 0 ,$$

pour tout compact K *de* G .

Preuve. Il suffit de noter que si $f \in HG(\mu)$, alors

$$\tilde{B}(f) = \bigcap_{g \in G} B(f^g) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} B(f^{g_i}) ,$$

pour toute suite $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ dense dans G .

(1.11) Corollaire.

Si $f \in HGD(\mu)$, $\tilde{B}(f) \supset \Omega' \times T_\mu$, *où* Ω' *est un borélien de* Ω *de* $\mathbb{P}_x$*-mesure 1* , $\forall x \in G$.

2.- CAS D'UN SEMIGROUPE ABELIEN

(2.1) Proposition.

Soient S un semi-groupe abélien L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur S . Soit f une fonction borélienne bornée sur S . Alors nous avons

$$i)\ f \in H(\mu) \iff ii)\ \forall s \in S,\ \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mu^r(\{L_s f = f(s)\}) = 1$$

$$(\text{avec } L_s f = L_{\varepsilon_s} f!)$$

Preuve. Il est clair que ii) $\Longrightarrow$ i). Montrons donc que i) $\Longrightarrow$ ii).

Soient $f \in H(\mu)$ et $s \in S$. Considérons le borélien $B(f)$ de $\Omega \times G$ du corollaire (1.8) et posons

$U_s = \{\xi \in G : \mathbb{P}_s[\{\omega \in \Omega : (\omega,\xi) \in B(f)\}] = 1\}$.

D'après ce corollaire U_s est un borélien de G de μ^r-mesure 1, pour tout entier $r \geq 1$. Pour tout $\xi \in U_s$, nous avons

$$f(s\xi) = \mathbb{E}_{s\xi}[\lim_n f(X_n)] = \mathbb{E}_s[\lim_n f(\xi X_n)]$$

$$= \mathbb{E}_s[\lim f(X_n\xi)] = \mathbb{E}_s[\lim f(X_n)] = f(s) \quad \text{Q.E.D.}$$

(2.2) Corollaire.

Soient G un semi-groupe [resp. un groupe] abélien L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G adaptée à G (i.e. le plus petit sous-semigroupe [resp. sous-groupe] de G engendré par le support de μ est égal à G). Soit f une fonction continue bornée sur S . Alors f appartient à $H_c(\mu)$ si et seulement si f est constante sur les sous-semigroupes $s\,S$, $s \in S$, de S [resp. f est constante].

(2.3) Remarque : Soient G un groupe abélien L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Soit ($\Omega = G^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{P}_x)_{x \in G}$) la marche aléatoire droite de loi μ sur G.

Considérons l'application :

$$\theta : \Omega \to \Omega$$
$$(\omega_0, \omega_1, \ldots) \to (\omega_1, \omega_2, \ldots)$$

Pour tout borélien A de Ω , θ -invariant (i.e. $\theta^{-1}(A) = A$), nous savons que la fonction $f(x) = \mathbb{P}_x [A]$ est un élément de $H(\mu)$. De la proposition (2.1) , il résulte que $\mathbb{P}_x [A] = 1_C (x)$, où C est un borélien de G tel que $m(C)$ ou $m(C^c)$ soit nul.

3. - *PERIODES DES FONCTIONS μ-HARMONIQUES BORNEES UNIFORMEMENT CONTINUES A DROITE*

(3.1) <u>Théorème</u> : *Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G ; notons T_μ le semi-groupe fermé de G engendré par le support de μ. Soit H un sous-groupe fermé de G ; nous désignons par p la projection naturelle de G sur ${}_H\backslash G$. Soient x et g deux éléments de G tels que pour $\mathbb{P}_x$- presque tout ω de Ω, il existe une suite $\{h_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ d'éléments de H telle que la suite*

$$\{ X_n^{-1}(\omega)\ h_n(\omega)\ g\ X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$$

possède une valeur d'adhérence dans $T_\mu\, T_\mu^{-1}$

Alors

$$(*) \qquad \bar{f}\circ p(gx) = \bar{f}op(x)\ ,$$

pour toute fonction $\bar{f}$ sur ${}_H\backslash^G$ telle que $\bar{f}op$ soit μ-harmonique bornée et <u>uniformément continue à droite</u>.

<u>Preuve</u>. Soient $\bar{f}$ une fonction sur ${}_H\backslash^G$ telle que $f = \bar{f}op \subset HD(\mu)$; et x, g deux éléments de G vérifiant la propriété énoncée dans le théorème.

Posons

$$B(f) = \{(\omega,\xi)\in \Omega\times G : \lim_n f(x_n(\omega)\xi) \text{ et } \lim_n f(x_n(\omega))$$

existent et sont égales }.

D'après le corollaire (1.9), il existe un borélien Ω_1 de Ω de $\mathbb{P}_y$-mesure 1, $\forall\, y \in G$, tel que $\Omega_1 \times T_\mu$ soit contenu dans $B(f) \cap B(L_g(f))$.

Considérons le sous-ensemble de Ω défini par $\Omega_2 = \{\Omega \in \Omega_1$: la suite $\{X_n^{-1}(\omega)\, h_n(\omega)\, g\, X_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ possède une valeur d'adhérence dans $T_\mu\, T_\mu^{-1}\}$.

Ω_2 est de $\mathbb{P}_x$-mesure 1. Soit $\omega \in \Omega_2$; désignons par $J(\omega)$ une suite d'entiers telle que

$$\lim_{n\in J(\omega)} X_n^{-1}(\omega)\, h_n(\omega)\, g\, X_n(\omega) = s\, t^{-1} \text{ avec } s,t \in T_\mu$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_n f(g\, X_n(\omega)) &= \lim_n f(g\, X_n(\omega)t) \quad [\text{car } \Omega_1 \times T_\mu \subset B(L_g f)] \\
&= \lim_n f(X_n(\omega)\, [X_n^{-1}(\omega)\, h_n(\omega)\, g\, X_n(\omega)]\, t) \\
&\qquad\qquad [\text{car } f = \bar{f}op] \\
&= \lim_{n\in J(\omega)} f(X_n(\omega)s) \quad [\text{car } f \text{ est u.c.d.}] \\
&= \lim_n f(X_n(\omega)) \quad [\text{car } \Omega_1 \times T_\mu \subset B(f)] .
\end{aligned}$$

Autrement dit, nous avons :

$$\lim_n f(gX_n) = \lim_n f(X_n) \quad \mathbb{P}_x\text{-p.s.} \ ;$$

et par suite

$$f(gx) = \mathbb{E}_x\left[\lim_n f(gX_n)\right] = \mathbb{E}_x\left[\lim_n f(X_n)\right] = f(x)$$

Q.E.D.

(3.2) <u>Remarque</u> : Si μ est étalée, toute fonction μ-harmonique bornée est u.c.d.. Le théorème (2.1) contient donc le théorème IV.1 de [1]

(3.3) <u>Corollaire</u> *Soient N un groupe nilpotent L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur N, adaptée à N. Alors $HD(\mu)$ est réduit aux constantes.*

Preuve : Si N est abélien, le résultat énoncé est vrai. Supposons qu'il le soit pour les groupes nilpotents de longueur inférieure ou égale à (r-1).

Soit N un groupe nilpotent de longueur r ; nous désignons par $\mathcal{D}_1(N), \mathcal{D}_2(N) = [N, \mathcal{D}_1, (N)]$, ..., $\mathcal{D}_r(N) = [N, \mathcal{D}_{r-1}(N)]$, $\mathcal{D}_{r+1}(N)$. $\mathcal{D}_{rn}(N) = \{e\}$, la série centrale descendante de N

Soit f une fonction μ-harmonique bornée u.c.d. sur N. Posons

$$N(f) = \{h \in N : f(xhy) = f(xy), \forall x,y \in N\} ;$$

N(f) est un sous-groupe fermé distingué de G.

N étant un groupe nilpotent, nous savons ([1] lemme IV.11) que $H = T_\mu T_\mu^{-1}$ est un sous-groupe de N. D'après le théorème (3.1), nous avons alors

$$\mathcal{D}_r(H) \subset \mathcal{D}_r(N) \cap H \subset N(f) ;$$

et par suite

$$\mathcal{D}_r(N) = \overline{\mathcal{D}_r(H)} \subset N(f) .$$

On en déduit que f s'écrit $\bar{f}op$, où p désigne l'application naturelle de N sur $N/\mathcal{D}_r(N)$ et $\bar{f}$ est une fonction $p(\mu)$-harmonique u.c.d. sur $N/\mathcal{D}_r(N)$. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

De même nous avons :

(3.3) Corollaire : *Soit G un groupe L.C.D. qui est une extension compacte d'un groupe de Lie résoluble connexe. Soit μ une mesure de probabilité sur G telle que $T_\mu T_\mu^{-1} = G$. Désignons par $G = G_-^\mu G_+^\mu$ une décomposition de G en produit amalgamé de deux sous-groupes, associée à μ (voir [3]). Notons ζ l'application naturelle de G sur $G_-^\mu \backslash G$. Alors les fonctions $\bar{f}$ sur $G_-^\mu \backslash G$ telle que $\bar{f} o\zeta$ appartienne à $HD(\mu)$ sont constantes.*

4. PERIODES CENTRALES DES FONCTIONS μ-HARMONIQUES BORNEES

(4.1) Soient G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Nous désignons par ($\Omega = G^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbb{P}_x)_{x\in G}$) la marche aléatoire droite de loi μ sur G.

Si f est un élément de HG(μ) , nous posons :

$$U(f) = \{\xi \in G : \lim_n \mathbb{E}_e\left[f(xX_n\xi)\right] = f(x), \quad \forall x \in G\}$$

D'après le corollaire (1.10), U(f) est un borélien de G de μ^r-mesure 1, $\forall r \geq 1$.

(4.2) Définition Soit A un sous-groupe fermé distingué de G. Nous disons que G opère de façon compacte sur A, si tout compact de A est contenu dans un compact de A invariant par les automorphismes intérieurs de G et si, de plus, l'unité de A possède une base de voisinages dans A, invariants par les automorphismes intérieurs de G.

(4.3) Théorème : *Soient $(G, \mu, f, U(f))$ comme en (4.1). Nous supposons que μ est adaptée à G. Soit A un sous-groupe fermé distingué de G sur lequel G agit de façon compacte. Nous désignons par A(f) le sous-groupe fermé de A engendré par $A \cap U(f)U(f)^{-1}$.*

Alors nous avons :

$$A(f) = \{a \in A : f(xay) = f(xy) \; ; \; \forall x, y \in G\}.$$
$$= A \cap U(f).$$

Pour prouver le théorème (4.3), nous commençons par montrer le lemme :

(4.4) Lemme *Soient* $(G,\mu,f,\ U(f),\ A,\ A(f))$ *comme dans le théorème (4.3). Alors* $A(f)$ *est un sous-groupe distingué de* G *et* $A(f) = A \cap U(f)$.

Preuve : Comme f est u.c.g., il est clair que

$$(*)\quad U(f) = \{\ \xi \in G :\ \lim_n \sup_{x\in K} \left| \mathbb{E}_e[f(xX_n\xi) - f(xX_n)] \right| = 0 \quad \forall\ K \text{ compact de } G\ \}$$

Posons $B^\circ = \{e\}$, $B = A \cap U(f)\, U(f)^{-1}$, puis $B^n = BB^{n-1}$, pour $n \geq 2$. Nous avons $A(f) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n}$

De $(*)$ il résulte que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n = A \cap U(f)$.

[En effet, raisonnons par récurrence, en supposant que B^n soit contenu dans $A\cap U(f)$ pour $n<p$. Soit ξ un élément de B^p ; ξ s'écrit $\xi = \eta uv^{-1}$ avec $\eta \in B^{p-1}$, $u,v \in U(f)$, $uv^{-1} \in A$. Nous avons alors, pour tout $x \in G$,

$$\left|\mathbb{E}_e[f(xX_n\xi) - f(xX_n)]\right| \leq \left|\mathbb{E}_e[f(x(X_n\xi X_n^{-1})X_n) - f(x[X_n\xi X_n^{-1}]X_nv)\right|$$

$$+\left|\mathbb{E}_e\ [f(x[X_n\eta X_n^{-1}]\ X_n\ u) - f(x[\ X_n\eta X_n^{-1}]\ X_n)]\ \right|$$

$$+\left|\mathbb{E}_e\ [f(xX_n\eta) - f(xX_n)]\ \right| ;$$

qui montre, via $(*)$ que $\xi \in U(f)$]

D'autre part, comme f est u.c.g. et G agit de façon compacte sur A, il est clair que f est u.c.d. sur A (i.e. $\sup_{x\in G} |f(xa)-f(x)|$ converge vers zéro quand a converge dans A vers l'élément unité). Il s'ensuit que $A \cap U(f)$ est fermé dans G et par suite $A(f) = A \cap U(f)$.

Pour achever la preuve du lemme (4.4), il nous reste à montrer que $A(f)$ est distingué dans G.

Soit ξ un élément de $A(f) = A \cap U(f)$. Comme $U(f)$ est un borélien de μ^r-mesure 1, $\forall\, r \geq 1$, il existe un borélien U' de G de μ^r-mesure 1, $\forall\, r \geq 1$, tel que $U' \xi \subset U(f)$. Pour tout $g \in U'$, nous avons $g \xi g^{-1} \in A \cap U(f)\, U(f)^{-1} \subset A(f)$. $A(f)$ étant fermé, il s'ensuit que $g \xi g^{-1} \in A(f)$ pour tout $g \in T_\mu$. Autrement dit

$$g\, A(f)\, g^{-1} \subset A(f)\ , \quad \forall\, g \in T_\mu\ .$$

Pour tout élément g de G, désignons par $\mathrm{Ad}g$ l'automorphisme de A défini par : $a \in A \to gag^{-1} \in A$. Puisque G agit de façon compacte sur A, $\mathrm{Ad}G$ est un groupe compact ; nous savons alors que le semi-groupe $\mathrm{Ad}T_\mu$ de $\mathrm{Ad}G$ est un sous-groupe de $\mathrm{Ad}G$. Comme μ est adaptée à G, nous avons alors $\mathrm{Ad}T_\mu = \mathrm{Ad}G$ et $A(f)$ est donc distingué dans G.

<u>Preuve du théorème (4.3)</u>

Du lemme (4.4) il résulte que pour tout $\xi \in A(f)$,

$$\lim_n |\mathbb{E}_e [f(xX_n \xi)] - f(x)| = 0, \qquad \forall\, x \in G.$$

Comme f est u.c.d. sur A (i.e. $\sup_{x\in G} |f(xa)-f(x)|$ tend vers zéro lorsque a converge dans A vers l'élément unité), il est alors clair que l'on a pour tout compact K de G,

$$(*) \qquad \lim_n \sup_{\xi\in A(f)\cap K} \left| \mathbb{E}_e \left[f(xX_n\xi)\right] - f(x)\right| = 0, \qquad \forall x\in G.$$

Soient $a\in A(f)$ et $x,y\in G$. Pour tout entier naturel n, nous avons

$$|f(xy)-f(xay)| = \left|f(xy) - \mathbb{E}_e\left[f(xyX_n[X_n^{-1}y^{-1}ayX_n])\right]\right|$$

De (*) il résulte alors que l'on a

$$f(xy) = f(xay)$$

le théorème (4.3) est donc démontré.

(4.5) Corollaire

Soit N un groupe nilpotent d'ordre r ; nous désignons par $N^1 = N, \ldots, N^{r+1} = \{e\}$ sa série centrale descendante. Soient μ une mesure de probabilité sur N, adaptée à N et f un élément de HG(μ). Nous appelons φ l'application de G×G sur G qui au couple (x,y) associe le produit xy^{-1}.

Alors, d'une part, nous avons,

(1) $N^r \cap U(f)\,U(f)^{-1} = \{u\in N^r : f(xuy) = f(xy)\ ;\ \forall\, x,y\in G\}$;

et d'autre part, il existe un borélien V(f) de G×G, de $\mu^p\otimes\mu^q$ *-mesure 1,* $\forall\, p,q \in \mathbb{N}^*$, *tel que*

(2) $N^{r-1} \cap \phi[V(f)] = \{u\in N^{r-1} : f(xuy) = f(xy)\ ;\ \forall x,y\in G\}$

<u>Preuve</u> :- (1) est une conséquence immédiate du théorème (4.3)

- Pour montrer (2), posons :

$V(f) = \{(\xi,\eta) \in U(f) \times U(f)$: il existe un borélien $W_{\xi,\eta}$ de G de

μ^r-mesure 1, $\forall\ r \geq 1$ tel que pour tout $b \in W$

$$(\xi b \eta)(\eta b \xi)^{-1} \in U(f)\, U(f)^{-1}\}.$$

Comme U(f) est un borélien de G de μ^r-mesure 1, $\forall\ r \geq 1$, il est clair que U(f) est de $\mu^p \otimes \mu^q$ -mesure 1, $\forall\ p,q \geq 1$.

Soit (ξ,η) un élément de V(f) tel que $\xi\eta^{-1} \in N^{r-1}$. Pour tout élément u de $W_{\xi,\eta}$, nous avons

$$[\xi\eta^{-1}, \eta u] = \xi u \eta (\eta u \xi)^{-1} \in N^r \cap U(f)\, U(f)^{-1} = A(f)$$

A(f) étant un sous-groupe fermé de N et $\xi\eta^{-1}$ étant un élément de N^{r-1}, il est facile de voir que $\{g \in N : [\xi\eta^{-1}, g] \in A(f)\}$ est un sous-groupe fermé de N. Comme μ est adaptée à G, on en déduit que

$$(*) \quad [\xi\eta^{-1}, G] \subset A(f).$$

Pour tous éléments x et y de G, nous avons alors

$$f(x\xi\eta^{-1}y) = \lim_n \mathbb{E}_e [f(x\xi\eta^{-1} y X_n \eta)] \qquad (\text{car } \eta \in U(f))$$

$$= \lim_n \mathbb{E}_e [f(xyX_n\xi)] \qquad (\text{d'après } (*) \text{ et } (1))$$

$$= f(xy) \qquad (\text{car } \xi \in U(f))$$

Q.E.D.

(4.6) Corollaire ([2] *Soient N un groupe nilpotent d'ordre 2 et* μ *une mesure de probabilité sur N, adaptée à N. Alors* $H_c(\mu)$ *est réduit aux constantes.*

Preuve. Ce corollaire est une conséquence immédiate des corollaires (1.5) et (4.5) .

(4.7) Remarques : Soit G un groupe L.C.D. et μ une mesure de probabilité sur G. Nous désignons par m une mesure de Haar à droite sur G.

Soit f un élément de $H(\mu)$. Pour toute mesure de probabilité α sur G, abolument continue par rapport à la mesure de Haar, on voit facilement que l'on a

$$U(L_\alpha f) \supset W(\alpha) \quad U(f),$$

avec

$$W(\alpha)=\{\xi\in G:\ \lim_n \sup \int_G \left| \mathbb{E}_e\left[\frac{d\alpha}{dm}(x\xi^{-1}X_n^{-1}) - \frac{d\alpha}{dm}(xX_n^{-1})\right]\right| m(dx)=0\}$$

$$=\{\xi\in G:\ \lim_n \sup \| (R_{\xi^{-1}}-I)\ R^n_{\check{\mu}} \frac{d\alpha}{dm} \|_1 = 0\} .$$

Nous voyons donc que la grosseur du borélien $U(L_\alpha f)$ est liée à celle de $W(\alpha)$. Dans [2], Guivarc'h obtient le résultat suivant :

Théorème ([2] Th.V.4) Soient N un groupe nilpotent L.C.D., μ une mesure de probabilité sur N, adaptée à μ et possédant un moment d'ordre $\lambda > 0$.

Alors pour toute mesure de probabilité α sur N, absolument continue par rapport à la mesure de Haar de N, $W(\alpha)$ contient le centre de N.

De ce résultat, il résulte immédiatement que :

Corollaire [2] . Soient (N,μ) comme dans le théorème. Alors $H_c(\mu)$ est réduit aux constantes.

[1] AZENCOTT Robert : Espaces de Poisson des groupes localement compacts. Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lectures Notes in Mathematics, 148).

[2] GUIVARC'H Yves : Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques. Bull. Soc. Math. France, 101, 1973, p333-379

[3] RAUGI Albert : Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes. Bull. Soc. Math. France, mémoire 54, 1977, 127 p.