

PIERRE LESAIN

MILOS ZLAMAL

**Convergence de l'élément de Wilson en élasticité linéaire  
Cas des quadrilatères quelconques**

*Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4*

« Journées éléments finis », , p. 1-26

[http://www.numdam.org/item?id=PSMIR\\_1977\\_\\_S4\\_A8\\_0](http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__S4_A8_0)

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENCE DE L'ELEMENT DE WILSON EN ELASTICITE LINEAIRE  
CAS DES QUADRILATERES QUELCONQUES

par

LESAINTE Pierre  
Institut de Mathématiques et d'Informatique  
NANTES, France

et

ZLAMAL Milos  
Technical University  
BRNO, Tchécoslovaquie

Journées Elements Finis - Rennes 4, 5 et 6 mai 1977



## INTRODUCTION

L'élément fini non conforme de Wilson est couramment utilisé pour résoudre des problèmes en élasticité linéaire. Le Patch Test <sup>(3)</sup> est satisfait lorsque cet élément est un rectangle ou un parallélogramme et l'erreur commise sur les contraintes est de l'ordre de  $h$ , où  $h$  est le plus grand des diamètres des éléments. Le Patch Test n'est pas satisfait lorsque l'élément est un quadrilatère quelconque. On se propose ici d'étudier certaines modifications apportées à cet élément dans <sup>(7)</sup>. On montre que cet élément modifié satisfait le Patch Test, lorsque les quadrilatères sont quelconques et que l'erreur sur les contraintes est de l'ordre de  $h$ . Il est possible de généraliser cette technique de modification à des éléments non conformes plus sophistiqués construits à partir de polynômes de degré plus élevés.

Cette communication représente une partie d'un travail en commun (à paraître) avec le professeur M. ZLAMAL.

1. - NOTATIONS ET POSITION DU PROBLEME

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  de frontière  $\partial\Omega$ . Pour un entier  $m \geq 0$ , on considère l'espace de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) ; \partial^\alpha v \in L^2(\Omega) , |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme  $\| \cdot \|_{m,\Omega}$  et des semi-normes  $|\cdot|_{m,\Omega}$  et  $[\cdot]_{m,\Omega}$  définies par

$$\begin{aligned} |v|_{m,\Omega} &= \left( \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} , \\ \|v\|_{m,\Omega} &= \left( \sum_{r=0}^m |v|_{r,\Omega}^2 \right)^{1/2} , \\ [v]_{m,\Omega} &= \left( \left\| \frac{\partial^m v}{\partial x^m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^m v}{\partial y^m} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est un multi-indice tel que  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{et} \quad \partial^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha_1} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_2} .$$

Dans les paragraphes suivants, on va résoudre le problème de Dirichlet

$$(1.1) \quad -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega ,$$

$$(1.2) \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega ,$$

pour une fonction  $f \in L(\Omega)$ . Ce problème se met sous la forme variationnelle suivante : trouver  $u \in V = H_0^1(\Omega)$  tel que :

$$(1.3) \quad a(u,v) = (f,v) \quad \text{pour tout } v \in V ,$$

$$\text{où } a(u,v) = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \, dx dy , \quad (f,v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy .$$

Si la frontière  $\partial\Omega$  est assez régulière, le problème (1.3) admet une solution unique  $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  .

On se propose de résoudre numériquement ce problème en utilisant une méthode d'éléments finis non conforme, c'est-à-dire, on va chercher une solution approchée  $u_h$  dans un espace de dimension finie  $V_h \subset V$  . Cet espace  $V_h$  sera construit à partir de l'élément fini de Wilson.

On note  $P_k$  l'espace des polynômes de la forme  $p = \sum_{i+j \leq k} a_{ij} x^i y^j$  et on note  $Q_k$  l'espace des polynômes de la forme  $q = \sum_{i, j \leq k} a_{ij} x^i y^j$ . Le résultat suivant ((<sup>1</sup>) (<sup>2</sup>)) joue un rôle fondamental dans l'obtention des majorations d'erreurs :

LEMME 1.1. - Soit f une forme linéaire et continue sur  $H^{k+1}(\Omega)$  ,  $k \geq 0$  , telle que

$$\langle f, v \rangle = 0 \quad \text{pour tout } v \in P_k .$$

Alors il existe une constante  $c = c(k, \Omega)$  telle que

$$|\langle f, v \rangle| \leq c \| f \|_{k+1, \Omega}^* |v|_{k+1, \Omega} ,$$

pour tout  $v \in H^{k+1}(\Omega)$  , où  $\| \cdot \|_{k+1, \Omega}^*$  désigne la norme sur l'espace dual de  $H^{k+1}(\Omega)$  .

2. - ELEMENT FINI DE WILSON - CONSTRUCTIONS DE L'ESPACE  $V_h$

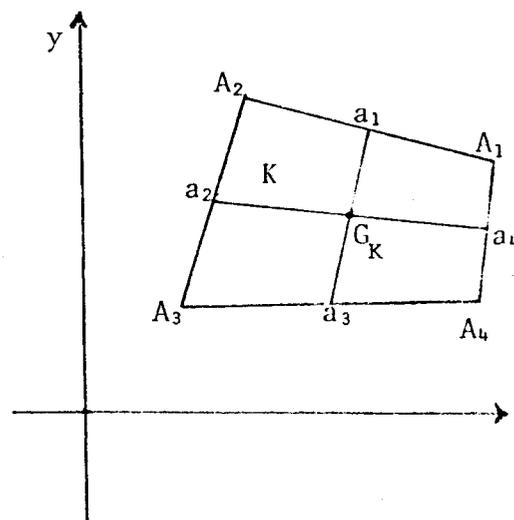
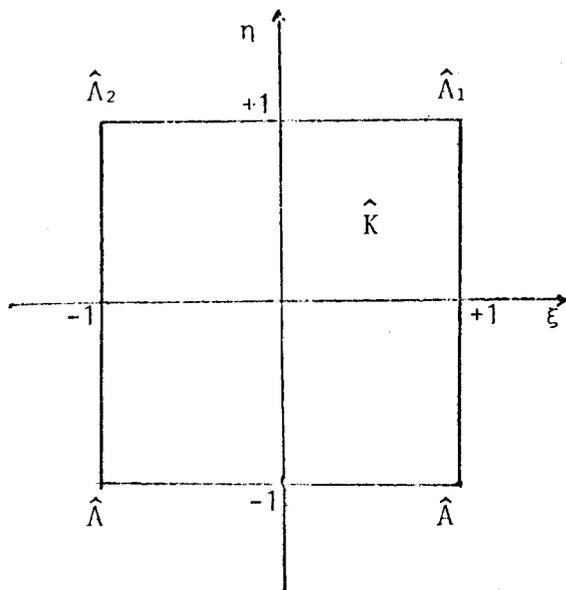
Soit  $\hat{K}$  le carré de référence  $[-1,+1] \times [-1,+1]$ . On définit sur  $\hat{K}$  l'élément fini  $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{P})$  suivant :

Toute fonction  $\hat{v} \in \hat{P}$  est déterminée de façon unique par sa donnée sur l'ensemble  $\hat{\Sigma}$  des degrés de liberté, constitué des valeurs  $v_i$  aux sommets  $A_i$  du carré et des moyennes  $v_\xi$  et  $v_\eta$  des dérivées secondes  $\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi^2}$  et  $\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \eta^2}$  sur le carré  $\hat{K}$ .

L'espace des fonctions de forme  $\hat{P}$  est l'espace  $P_2$  des polynômes de degré  $\leq 2$  en  $\xi$  et  $\eta$ .

On peut écrire :

$$(2.1) \quad \hat{v}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} v_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} v_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} v_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} v_4 + \frac{\xi^2 - 1}{2} v_\xi + \frac{\eta^2 - 1}{2} v_\eta$$



Soit  $K$  le quadrilatère convexe de sommets  $A_i(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ .

Il existe une transformation  $F_K \in (Q_1)^2$  unique telle que  $F_K(\bar{\Lambda}_i) = \Lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  (et par suite  $F_K(\bar{K}) = K$ ), donnée par

$$(2.2) \quad x^K = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} x_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} x_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} x_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} x_4$$

$$(2.3) \quad y^K = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} y_1 + \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} y_2 + \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} y_3 + \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} y_4 .$$

A toute fonction  $v(x,y)$  définie sur  $K$  on fait correspondre  $\hat{v}(\xi,\eta)$  par

$$(2.4) \quad \hat{v}(\xi,\eta) = v(x^K(\xi,\eta), y^K(\xi,\eta)) , \text{ soit } \hat{v} = v \circ F .$$

Sur le quadrilatère  $K$ , on définit l'élément fini  $(K, \Sigma_K, P_K)$  suivant :

Toute fonction  $p \in P_K$  est déterminée de façon unique par sa donnée sur l'ensemble  $\Sigma_K$  des degrés de liberté, constitué des valeurs  $p_i$  aux sommets  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  et des moyennes des dérivées secondes  $\frac{1}{a_2 a_4} \int_{a_2 a_4} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} ds$  et  $\frac{1}{a_1 a_3} \int_{a_1 a_3} \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} ds$ , où  $s$  désigne une abscisse le long du côté  $a_1 a_2$  (resp.  $a_1 a_3$ ). L'espace des fonctions de forme  $P_K$  est donné par

$$(2.5) \quad P_K = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}\} .$$

Soit  $\mathcal{C}_h$  une triangulation de domaine  $\Omega$  (supposé polyédrique) en quadrilatères convexes  $K$  de diamètres  $\leq h$ . On supposera toujours par la suite que les hypothèses suivantes sont satisfaites, uniformément en  $h$  :

Il existe  $c > 0$  telle que  $\frac{h_K}{\rho_K} \leq c$ , pour tout  $K \in \mathcal{C}_K$ .

Il existe  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$  telle que  $\max_{1 \leq i \leq 4} |\cos \theta_i| < \gamma$ , pour tout  $K \in \mathcal{C}_h$ , où  $h_K = \text{diamètre } K$ ,  $\rho_K = \sup \{\text{diamètres des cercles } \subset K\}$ , et où les  $\theta_i^K$  désignent les angles aux sommets de  $K$ .

Lorsque les hypothèses ci-dessus sont satisfaisantes, on a (2).

LEMME 2.1. - Soient  $v$  et  $\hat{v}$  deux fonctions se correspondant par la relation (2.4). Si  $v \in H^2(K)$ , alors  $\hat{v} \in H^2(\hat{K})$  (et réciproquement) et on a

$$|v|_{m,K} \leq c \sup (J_K)^{1/2} h_K^{-m} |\hat{v}|_{m,\hat{K}}, \quad 0 \leq m \leq 2.$$

$$|\hat{v}|_{m,\hat{K}} \leq c (\inf J_K)^{-1/2} h_K^m |v|_{m,K}, \quad 0 \leq m \leq 2.$$

Soit  $W_h$  l'espace des fonctions  $v_h$  telles que  $v_h|_K \in P_K$ ,  $K \in \mathcal{C}_h$ , et continues aux sommets des quadrilatères. Soit  $V_h$  le sous-espace de  $W_h$  des fonctions  $v_h$  nulles aux sommets appartenant à la frontière  $\partial\Omega$ . On n'a pas en général l'inclusion

$$V_h \subset V = H_0^1(\Omega).$$

L'espace  $V_h$  se décompose en la somme  $V_h = \bar{V}_h + V_h'$ , où  $V_h' \subset V_h$  est le sous espace des fonctions nulles aux sommets des quadrilatères et  $\bar{V}_h \subset V_h$  est le sous-espace des fonctions pour lesquelles degrés de liberté définis par des moyennes sur les segments  $a_{2i}^{K_i}$  et  $a_{1i}^{K_i}$  sont nuls. On a l'inclusion :

$$V_h \subset C^0(\bar{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega).$$

DEFINITION 2.1. - Soit  $\hat{v}$  une fonction de  $H^2(\hat{K})$ , on définit  $\hat{r}\hat{v} \in \hat{P}$  fonction  $\hat{P}$ -interpolée de  $\hat{v}$  par

$$\begin{aligned} \hat{r}\hat{v}(\hat{\Lambda}_i) &= \hat{v}(\hat{\Lambda}_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \\ \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\hat{r}\hat{v}) d\xi d\eta &= \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\hat{v}) d\xi d\eta, \\ \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\hat{r}\hat{v}) d\xi d\eta &= \int_{\hat{K}} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\hat{v}) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.2. - Soit  $v$  une fonction de  $H^2(K)$ , on définit  $r_K v \in P_K$ , fonction  $P_K$ -interpolée de  $v$  par

$$\widehat{r_K v} = \hat{r}\hat{v}.$$

Soit  $v$  une fonction de  $H^2(\Omega)$ , on définit  $r_h v \in W_h$ , fonction  $W_h$ -interpolée de  $v$  par

$$r_h v|_K = r_K v.$$

LEMME 2.2 (9). - On a l'inclusion  $P_K \supseteq P_1$ . On en déduit que si  $v \in P_1$ , alors  $r_K v \in P_1$ .

Soit  $v_h \in W_h$ . On introduit la décomposition

$$(2.7) \quad v_h = \bar{v}_h + v'_h, \quad \bar{v}_h \in \bar{W}_h, \quad v'_h \in W'_h$$

où  $\bar{v}_h = v_h$  aux sommets des quadrilatères.

LEMME 2.3. - Soit  $v_h \in W_h$  telle que  $v_h|_K \in P_1$ , pour un certain  $K$ .  
Alors :

$$\bar{v}_h|_K = v_h|_K, \quad v'_h|_K = 0.$$

LEMME 2.4. - Soit  $v_h \in W_h$ , on a les inégalités :

$$(2.8) \quad |\bar{v}_h|_{L^2(\Omega)} + |v'_h|_{L^2(\Omega)} \leq c |v_h|_{L^2(\Omega)},$$

$$(2.9) \quad |v'_h|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|v_h\|_h,$$

où  $\|v_h\|_h = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2}$ .

Démonstration : On a

$$\int_K (\bar{v}_h)^2 dx dy = \int_{\hat{K}} J_K (\bar{v}_h)^2 d\xi d\eta \leq \sup J_K \int_{\hat{K}} (\bar{v}_h)^2 d\xi d\eta,$$

où

$$J_K = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

est le jacobien de la transformation  $F_K$ .

On a donc :

$$\int_K (\bar{v}_h)^2 dx dy \leq \hat{c} \sup J_K \int_{\hat{K}} (\hat{v}_h)^2 d\xi d\eta = \hat{c} \sup J_K \int_K \frac{v_h^2}{J_K} dx dy,$$

soit

$$\int_K (\bar{v}_h)^2 dx dy \leq \hat{c} \frac{\sup J_K}{\inf J_K} \int_K v_h^2 dx dy.$$

On montre de même que

$$\int_K (v'_h)^2 dx dy \leq \hat{c} \frac{\sup J_K}{\inf J_K} \int_K v_h^2 dx dy;$$

on en déduit l'inégalité (2.8).

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \int_K (v_h')^2 dx dy &\leq \hat{c} \sup_{J_K} \int_{\hat{K}} ((\hat{v}_h)')^2 d\xi d\eta \\ &\leq \hat{c} \sup_{J_K} \int_{\hat{K}} \left( \left( \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{v}_h}{\partial \eta} \right)^2 \right) d\xi d\eta \\ \int_K (v_h')^2 dx dy &\leq \hat{c} \sup_{J_K} |v_h|_{1, \hat{K}}^2, \text{ donc} \\ \int_K (v_h')^2 dx dy &\leq \hat{c} h_K^2 \frac{\sup_{J_K} |v_h|_{1, K}^2}{\inf_{J_K} |v_h|_{1, K}^2}, \end{aligned}$$

et on en déduit l'inégalité (2.9).

De la même manière, on peut montrer le

LEMME 2.5. - Soit  $v_h \in W_h$ , on a :

$$(2.10) \quad |\bar{v}_h|_{1, \Omega} + \|v_h'\|_h \leq c \|v_h\|_h,$$

$$(2.11) \quad \|v_h'\|_h \leq ch \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |v_h|_{2, K}^2 \right)^{1/2}.$$

Démonstration : Montrons l'inégalité (2.11). On a :

$$\begin{aligned} \int_K \left( \frac{\partial v_h'}{\partial x} \right)^2 dx dy &\leq c \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{v}_h'}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{v}_h'}{\partial \eta} \right)^2 d\xi d\eta \\ &\leq c \int_{\hat{K}} \left( \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_h'}{\partial \xi^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \hat{v}_h'}{\partial \eta^2} \right)^2 \right) d\xi d\eta \\ &\leq c [v_h]_{2, \hat{K}}^2. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant le lemme 2.1, que

$$\int_K \left( \frac{\partial v_h'}{\partial x} \right)^2 dx dy \leq ch_K^2 |v_h|_{2, K}^2,$$

et l'inégalité (2.11) en découle immédiatement.

3. - PROBLEME APPROCHE - PATCH TEST POUR DES MAILLES RECTANGULAIRES

On considère le problème approché suivant : Trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$(3.1) \quad a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{pour tout } v_h \in V_h,$$

où

$$(3.2) \quad a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \left( \frac{\partial u_h}{\partial x} \frac{\partial v_h}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y} \frac{\partial v_h}{\partial y} \right) dx dy.$$

On a le résultat suivant (4) :

LEMME 3.1. - L'application  $v_h \rightarrow \|v_h\|_h = (a_h(v_h, v_h))^{1/2}$  est une  
norme sur l'espace  $V_h$ . Le problème 3.1 a donc une solution unique  
 $u_h \in V_h$ .

On a le résultat général de majoration d'erreur (6) .

LEMME 3.2. - Soit  $u$  la solution du problème (1.3) et soit  $u_h$   
la solution du problème 3.2. On a

$$(3.3) \quad \|u - u_h\|_h \leq c \inf \{ \|u - v_h\|, v_h \in V_h \} + \sup \left\{ \frac{|E(u, w_h)|}{\|w_h\|_h}; w_h \in V_h \right\},$$

$$\text{où } E(u, w_h) = \int_K (\Delta u) w_h dx dy + a_h(u, w_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n_K} w_h ds,$$

$\frac{\partial}{\partial n_K}$  désignant la dérivée normale extérieure le long de  $\partial K$ .

Le critère pratique de convergence appelé Patch Test ((<sup>3</sup>), (<sup>6</sup>)) s'écrit de la façon suivante :

$$(3.4) \quad E(u, w_h) = 0 ,$$

pour tout  $w_h \in V_h$  et tout  $u$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  soient constants.

Le résultat suivant montre que ce critère est satisfait dans certains cas.

LEMME 3.3. - On suppose que  $\Omega$  est un rectangle à côtés parallèles aux axes, "triangulé" en rectangles. Alors le critère (3.4) est satisfait.

Démonstration : On introduit la décomposition suivante :

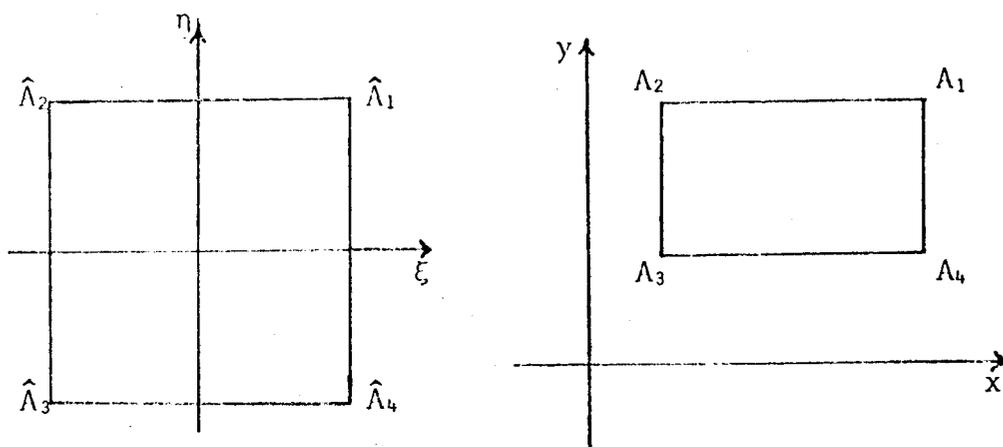
$$(3.5) \quad w_h = \bar{w}_h + w'_h ,$$

où  $\bar{w}_h \in \bar{V}_h$  et  $\bar{w}_h = w_h$  aux sommets des rectangles.

On a alors :

$$(3.6) \quad E(u, w_h) = E(u, w_h - \bar{w}_h) = E(u, w'_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{\partial u}{\partial n_K} w'_h ds .$$

Considérons la contribution d'un élément particulier  $K$  à la somme ci-dessus



$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n_K} w'_h ds = \int_{\Lambda_4}^{\Lambda_1} \frac{\partial u}{\partial x} w'_h dy - \int_{\Lambda_3}^{\Lambda_2} \frac{\partial u}{\partial x} w'_h dy + \int_{\Lambda_2}^{\Lambda_1} \frac{\partial u}{\partial y} w'_h dy - \int_{\Lambda_3}^{\Lambda_4} \frac{\partial u}{\partial y} w'_h dx .$$

On a

$$\int_{\Lambda_4}^{\Lambda_1} \frac{\partial u}{\partial x} w'_h dy - \int_{\Lambda_3}^{\Lambda_2} \frac{\partial u}{\partial x} w'_h dy = \frac{\Delta y}{2} \int_{-1}^{+1} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \hat{w}'_h \right) (1, \eta) - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \hat{w}'_h \right) (-1, \eta) \right) d\eta .$$

Si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est une constante, alors  $\frac{\partial u}{\partial x} \hat{w}'_h$  est une constante, et on a

$$\int_{-1}^{+1} (w'_h(1, \eta) - w'_h(-1, \eta)) d\eta = 0 ,$$

puisque  $w'_h(1, \eta) = w'_h(-1, \eta) = \frac{\eta^2 - 1}{2} w_\eta .$

THEOREME 3.1 (\*). - Soit  $u \in H^2(\Omega)$  la solution du problème (1.3).

On suppose que les hypothèses du lemme 3.3 sont satisfaites. On a :

$$(3.7) \quad \| u - u_h \|_h \leq ch |u|_{2, \Omega} .$$

LEMME 3.4. - On suppose que l'ouvert polyédrique  $\Omega$  est "triangulé" en quadrilatères quelconques. Alors le critère (3.4) n'est pas en général satisfait.

Démonstration : Pour un élément  $K$ , on considère l'expression

$$\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n_K} w_h' ds .$$

La contribution des côtés  $\Lambda_4\Lambda_1$  et  $\Lambda_3\Lambda_2$  à cette expression s'écrit

$$\int_{\Lambda_4}^{\Lambda_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{y_1 - y_4}{\Lambda_1 \Lambda_4} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{x_1 - x_4}{\Lambda_1 \Lambda_4} \right) w_h' ds - \int_{\Lambda_3}^{\Lambda_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{y_2 - y_3}{\Lambda_2 \Lambda_3} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{x_2 - x_3}{\Lambda_2 \Lambda_3} \right) w_h' ds$$

ou encore

$$\int_1^{+1} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} (y_1 - y_4) - \frac{\partial u}{\partial y} (x_1 - x_4) \right) \widehat{w}_h' \right) (1, \eta) d\eta - \int_1^{+1} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} (y_2 - y_3) - \frac{\partial u}{\partial y} (x_2 - x_3) \right) \widehat{w}_h' \right) (-1, \eta) d\eta .$$

Cette dernière expression est en général différente de zéro lorsque  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont des constantes.

REMARQUE 5.1. - Pour mieux comprendre pourquoi le critère (3.4) n'est pas satisfait (et pour remédier à cet inconvénient), on considère l'égalité suivante, intervenant lors de la majoration générale de l'erreur : on a

$$\begin{aligned} & a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = \\ & = (f, u_h - v_h) - a_h(v_h, u_h - v_h) = \\ & = a(u, \bar{u}_h - \bar{v}_h) + (-\Delta u, u_h' - v_h') - a_h(v, \bar{u}_h - \bar{v}_h) - a_h(v_h, u_h' - v_h') \\ (3.8) \quad & a_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = \\ & = a(u - \bar{v}_h, \bar{u}_h - \bar{v}_h) - a_h(v_h', \bar{u}_h - \bar{v}_h) - a_h(\bar{v}_h, u_h' - v_h') + \\ & \quad + (-\Delta u, u_h' - v_h') - a_h(v_h', u_h' - v_h') . \end{aligned}$$

Les deux derniers termes du membre de droite de (3.8) peuvent se regrouper en  $a_h(u - v_h, \bar{u}_h - \bar{v}_h)$ , terme qui se majore aisément en remplaçant  $v_h$  par  $r_h u$ , fonction  $V_h$ -interpolée de  $u$ , et on a

$$(3.9) \quad a_h(u - r_h u, \bar{u}_h - \bar{v}_h) \leq ch|u|_{2,\Omega} |\bar{u}_h - \bar{v}_h|_{1,\Omega} \leq ch|u|_{2,\Omega} \|u_h - v_h\|_h$$

Les deux derniers termes du membre de droite de l'égalité (3.8) satisfont le Patch-Test, avec  $v_h = r_h u$ . En effet, si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont des constantes, on a  $(-hu, u'_h - v'_h) = 0$ ; d'autre part, si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont des constantes sur chaque élément  $K$ , la restriction de la fonction  $u(x,y)$  à cet élément  $K$  est de la forme  $a + bx + cy$ . Donc, sur le carré de référence, on a  $\hat{u}(\xi,\eta) \in Q_1$ , donc  $\hat{r}\hat{u} = \hat{u} \in Q_1$ . On en déduit que  $(r_h u)' = 0$ , et par suite

$$(3.10) \quad a_h((r_h u)', u'_h - (r_h u)') = 0.$$

Considérons enfin le terme  $a_h(\bar{v}_h, w'_h)$ . On a :

$$(3.11) \quad a_h(\bar{v}_h, w'_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_{\hat{K}} \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial x} \left( \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \xi} \frac{\partial y^K}{\partial \eta} - \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \eta} \frac{\partial y^K}{\partial \xi} \right) + \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial y} \left( - \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \xi} \frac{\partial x^K}{\partial \eta} + \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \eta} \frac{\partial x^K}{\partial \xi} \right) \right) d\xi d\eta$$

Pour chaque élément  $K$ , on a

$$(3.12) \quad \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \xi} \frac{\partial y^K}{\partial \eta} - \frac{\widehat{\partial w}'_h}{\partial \eta} \frac{\partial y^K}{\partial \xi} = \xi w_\xi \left( \frac{\partial y^K}{\partial \eta} (0,0) + \xi \frac{\partial^2 y^K}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \eta w_\eta \left( \frac{\partial y^K}{\partial \xi} (0,0) + \eta \frac{\partial^2 y^K}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

Une condition suffisante pour que  $a(\bar{r}_h u, w'_h) = 0$ , pour tout

$w_h \in V_h$  et pour tout  $u$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  soient des constantes est que l'on remplace, dans l'expression (3.12),  $\frac{\partial y^K}{\partial \xi}(\xi, \eta)$  et  $\frac{\partial y^K}{\partial \eta}(\xi, \eta)$  par  $\frac{\partial y^K}{\partial \xi}(0,0)$  et  $\frac{\partial y^K}{\partial \eta}(0,0)$  respectivement. Il faut donc pour cela modifier la forme bilinéaire  $a_h(\dots)$ , de telle sorte que la géométrie caractérisant les éléments  $K \in \mathcal{T}_h$  soit traitée de façon exacte lorsqu'on considère les degrés de liberté associés aux sommets des éléments, et de façon approchée lorsqu'on considère les degrés de liberté définis par des moyennes sur chaque élément.

4. - PROBLEME APPROCHE ET PATCH TEST POUR DES QUADRILATERES QUELCONQUES

A toute fonction  $p \in P_K$ , on associe  $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x} p$  et  $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y} p$  tels que

$$(4.1) \quad J_K \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} p = \frac{\partial y^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} - \frac{\partial x^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} ,$$

$$(4.2) \quad J_K \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} p = - \frac{\partial x^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \xi} + \frac{\partial y^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{p}}{\partial \eta} .$$

Soit  $v_h \in W_h$ , on définit  $\frac{\tilde{\partial}}{\partial x} v_h$  et  $\frac{\tilde{\partial}}{\partial y} v_h$  par

$$(4.3) \quad \left( \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} v_h \right) \Big|_K = \frac{\partial}{\partial x} (v_h|_K) , \quad \left( \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} v_h \right) \Big|_K = \frac{\partial}{\partial y} (v_h|_K) .$$

On considère les formes bilinéaires suivantes, sur  $W_h \times W_h$  :

$$(4.4) \quad \tilde{a}_h(\bar{v}_h, w'_h) = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \int_K \left( \frac{\partial v_h}{\partial x} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} w'_h + \frac{\partial v_h}{\partial y} \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} w'_h \right) dx dy ,$$

$$(4.5) \quad \hat{a}_h^t(v'_h, \bar{w}_h) = \tilde{a}_h(\bar{w}_h, v'_h)$$

$$(4.6) \quad \tilde{\tilde{a}}_h(v'_h, w'_h) = \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \int_K \left( \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} v'_h \frac{\tilde{\partial}}{\partial x} w'_h + \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} v'_h \frac{\tilde{\partial}}{\partial y} w'_h \right) dx dy .$$

La forme bilinéaire  $a_h(v_h, w_h)$  permettant de définir le problème

(3.1) est remplacée par :

$$(4.7) \quad b_h(v_h, w_h) = a_h(\bar{v}_h, \bar{w}_h) + \tilde{a}_h(\bar{v}_h, w'_h) + \hat{a}_h^t(v'_h, \bar{w}_h) + \tilde{\tilde{a}}_h(v'_h, w'_h)$$

et on considère le problème approché suivant : Trouver  $u_h \in V_h$  tel que

$$(4.8) \quad b_h(u_h, v_h) = (f, \bar{v}_h) , \quad \text{pour tout } v_h \in V_h .$$

REMARQUE 4.1. - Lorsque les quadrilatères sont des rectangles, on a  $b_h(\dots) = a_h(\dots)$ .

REMARQUE 4.2. - Dans l'inégalité (4.8), on l'utilise l'expression  $(f, \bar{v}_h)$  à la place de  $(f, v_h)$ , ce qui consiste à ne considérer que des forces agissant aux noeuds.

REMARQUE 4.3. - A la place de la forme bilinéaire  $b_h$ , on peut aussi définir (voir Remarque 3.1) la forme bilinéaire  $b'_h$  :

$$(4.9) \quad b'_h(v_h, w_h) = a_h(v_h, \bar{w}_h) + \tilde{a}_h(\bar{v}_h, w'_h) + a_h(v'_h, w'_h) .$$

La forme bilinéaire  $b_h$  est symétrique et mène à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est symétrique. Lorsqu'on utilise la forme bilinéaire  $b'_h$ , on perd cette propriété de symétrie, mais par contre, on peut obtenir, dans le cas d'éléments finis plus sophistiqués que la brique de Wilson, de meilleurs résultats de convergence, un "super Patch-Test" étant alors satisfait.

LEMME 4.1. - L'application  $v_h \rightarrow (b_h(v_h, v_h))^{1/2}$  est une norme sur l'espace  $V_h$ , uniformément équivalente à la norme  $\| \cdot \|_h$ . Le problème (4.8) a donc une solution unique  $u_h \in V_h$ .

Démonstration : On a :

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad b_h(v_h, v_h) &= \\
 &= a_h(\bar{v}_h, \bar{v}_h) + 2\hat{a}_h(\bar{v}_h, v'_h) + \hat{a}_h(v'_h, v'_h) = \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{E}_h} \left\{ \int_K \frac{1}{J_K} \left( \frac{\partial v^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \xi} - \frac{\partial v^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \eta} + J_K \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial x} \right)^2 d\xi d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_K \frac{1}{J_K} \left( -\frac{\partial x^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \xi} + \frac{\partial x^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \eta} + J_K \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial y} \right)^2 d\xi d\eta \right\} = \\
 &= \sum_{K \in \mathcal{E}_h} b_h^K(v_h, v_h) .
 \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad &\int_{\hat{K}} \frac{1}{J_K} \left( \frac{\partial v^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \xi} - \frac{\partial v^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \eta} + J_K \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial x} \right)^2 d\xi d\eta \\
 &\geq \frac{J_K(0,0)}{\inf J_K} \int_{\hat{K}} \frac{1}{J_K(0,0)} \left( \frac{\partial v^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \xi} - \frac{\partial v^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{v}'_h}{\partial \eta} + J_K \frac{\widehat{\partial v}_h}{\partial x} \right)^2 d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

Posons  $y^K(\xi\eta) = (J_K(0,0))^{1/2}(\alpha + \beta\xi + \gamma\eta + \delta\xi\eta)$  .

L'intégrale du membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad &\int_{\hat{K}} \left( \gamma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} (0,0) - \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} (0,0) + \xi \left( \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} (0,0) - \beta \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v_\xi \right) \right. \\
 &\quad \left. + \eta \left( \gamma \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} - \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} (0,0) - \beta v_\eta \right) \right)^2 d\xi d\eta ,
 \end{aligned}$$

où  $\hat{v} = \widehat{v}_h|_K$  et où les coefficients  $\beta, \gamma$  et  $\delta$  satisfont les inégalités

$$\hat{c} \leq \beta, \gamma, \delta \leq \hat{C} .$$

L'intégrale écrite en (4.12) est égale à

$$\begin{aligned}
 &4 \left( \gamma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} (0,0) - \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} (0,0) \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi} (0,0) - \beta \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v_\xi \right)^2 \\
 &+ \frac{4}{3} \left( \gamma \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} - \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta} (0,0) - \beta v_\eta \right)^2 .
 \end{aligned}$$

Si on pose  $x^K(\xi, \eta) = (J_K(0,0))^{1/2}(a + b\xi + c\eta + d\xi\eta)$ , on a alors

$$b_h^K(v_h, v_h) \geq \frac{J_K(0,0)}{\text{ml } J_K} \left\{ 4 \left( \gamma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 + 4 \left( c \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - b \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - \beta \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma v_\xi \right)^2 + \frac{4}{3} \left( d \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - b \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} + c v_\xi \right)^2 + \frac{4}{3} \left( \gamma \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} - \delta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) - \beta v_\eta \right)^2 + \frac{4}{3} \left( c \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} - d \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) - b v_\eta \right)^2 \right\}.$$

Il existe une constante  $\hat{c} > 0$  telle que

$$\left( \gamma \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - \beta \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 + \left( c \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) - b \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 \geq \hat{c} \left( \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 \right).$$

En effet, les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 + c^2 & -\gamma\beta - bc \\ -\gamma\beta - bc & \beta^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

ont un produit égal à 1  $((\gamma^2 + c^2)(\beta^2 + b^2) - (\gamma\beta + bc)^2 = (\gamma b - \beta c)^2 = 1)$

et une somme comprise entre  $4\hat{c}$  et  $4\hat{C}$ .

On procède de la même manière pour les autres termes. On en déduit

$$b_h^K(v_h, v_h) \geq \hat{c} \left( \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \xi}(0,0) \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}(0,0) \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \xi \partial \eta} \right)^2 + v_\xi^2 + v_\eta^2 \right),$$

donc

$$b_h^K(v_h, v_h) \geq \hat{c} |\hat{v}|_{1, \hat{K}}^2.$$

De la dernière inégalité, on déduit immédiatement le lemme 4.1.

LEMME 4.2. - Soit  $u_h \in V_h$  la solution du problème (4.8). On a la  
majoration d'erreur :

$$(4.13) \quad \|u - u_h\|_h \leq c \left( |u - \overline{r_h u}|_{1,\Omega} + \|u - r_h u\|_h + \sup \left\{ \frac{G(r_h u, w_h)}{\|w_h\|_h} ; w_h \in V_h \right\} \right),$$

où

$$(4.14) \quad G(r_h u, w_h) = \tilde{a}_h(\overline{r_h u}, w_h') + \tilde{a}_h^t((r_h u)', \overline{w}_h) + \tilde{\tilde{a}}_h((r_h u)', w_h').$$

Démonstration : On a d'après le lemme 4.1 :

$$\begin{aligned} c \|u_h - v_h\|_h^2 &\leq b_h(u_h - v_h, u_h - v_h) = (f, \overline{u}_h - \overline{v}_h) - b_h(v_h, u_h - v_h) \\ &\leq a(u, \overline{u}_h - \overline{v}_h) - a_h(\overline{v}_h, \overline{u}_h - \overline{v}_h) - \tilde{a}_h(\overline{v}_h, u_h' - v_h') - \\ &\quad - \tilde{a}_h^t(v_h', \overline{u}_h - \overline{v}_h) - \tilde{\tilde{a}}_h(v_h', u_h' - v_h'). \end{aligned}$$

On a  $a_h(\overline{v}_h, \overline{w}_h) = a(\overline{v}_h, \overline{w}_h)$ , car  $\overline{V}_h \subset H_0(\Omega)$ , donc

$$\begin{aligned} c \|u_h - v_h\|_h^2 &\leq a(u - \overline{v}_h, \overline{u}_h - \overline{v}_h) - \tilde{a}_h(\overline{v}_h, u_h' - v_h') - \tilde{a}_h^t(v_h', \overline{u}_h - \overline{v}_h) \\ &\quad - \tilde{\tilde{a}}_h(v_h', u_h' - v_h'). \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.4, on a

$$a(u - \overline{v}_h, \overline{u}_h - \overline{v}_h) \leq |u - \overline{v}_h|_{1,\Omega} |\overline{u}_h - \overline{v}_h|_{1,\Omega} \leq c |u - \overline{v}_h|_{1,\Omega} \|u_h - v_h\|_h.$$

En remplaçant  $v_h$  par  $r_h u$  dans les deux dernières inégalités,  
on a

$$c \|u_h - r_h u\|_h^2 \leq c |u - \overline{r_h u}|_{1,\Omega} \|u_h - r_h u\|_h + G(r_h u, w_h)$$

on en déduit

$$\|u_h - r_h u\|_h \leq c |u - \overline{r_h u}|_{1,\Omega} + c \sup \left\{ \frac{G(r_h u, w)}{\|w_h\|_h} ; w_h \in V_h \right\}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire

$$\|u - u_h\|_h \leq \|u - r_h u\|_h + \|u_h - r_h u\|_h,$$

on obtient l'inégalité (4.13).

LEMME 4.3 (Patch Test). - Soit une fonction  $u$  telle que  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  soient des constantes sur chaque élément  $K \in \mathcal{C}_h$ . On a alors

$$(4.15) \quad G(r_h u, w_h) = 0, \text{ pour tout } w_h \in V_h.$$

Démonstration : D'après la remarque 3.1, si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont des constantes sur chaque élément  $K$ , on a  $(r_h u)' = 0$ , donc  $\tilde{a}_h^t((r_h u)', \bar{w}_h) = \tilde{a}_h^t((r_h u)', w_h') = 0$ , pour tout  $w_h \in V_h$ . D'autre part on peut écrire

$$(4.16) \quad a_h(\overline{r_h u}, w_h') = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\hat{K}} \frac{\partial \widehat{r_h u}}{\partial x} \left( \frac{\partial y^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \widehat{w}_h'}{\partial \xi} - \frac{\partial y^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \widehat{w}_h'}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \int_{\hat{K}} \frac{\partial (\widehat{r_h u})}{\partial y} \left( - \frac{\partial x^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \widehat{w}_h'}{\partial \xi} + \frac{\partial x^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \widehat{w}_h'}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

Si  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$  sont constants sur chaque élément  $K$ , on a  $u|_K \in P_1$ , et d'après le lemme 2.1,  $u|_K = r_h u|_K \in P_1$ . On en déduit immédiatement que

$$a_h(\overline{r_h u}, w_h') = 0, \text{ pour tout } w_h \in V_h.$$

LEMME 4.4. - Soit  $v \in H^2(\Omega)$ . On a

$$(4.17) \quad |v - \overline{r_h v}|_{1,\Omega} \leq ch|v|_{2,\Omega},$$

$$(4.18) \quad \|v - r_h v\|_h \leq ch|v|_{2,\Omega}.$$

Démonstration : On a

$$|v - \overline{r_h v}|_{1,\Omega}^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v - \overline{r_h v}|_{1,K}^2,$$

$$\|v - r_h v\|_h^2 = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} |v - r_h v|_{1,K}^2.$$

Le lemme 4.3 est alors une conséquence de résultats classiques d'interpolation (2).

LEMME 4.5. - Soit  $v \in H^2(\Omega)$ , on a

$$(4.19) \quad \tilde{a}_h(\overline{r_h v}, w'_h) \leq ch|v|_{2,\Omega} \|w'_h\|_h,$$

$$(4.20) \quad \tilde{a}_h^t((r_h v)', \overline{w}_h) \leq ch|v|_{2,\Omega} |\overline{w}_h|_{1,\Omega},$$

$$(4.21) \quad \tilde{a}_h^t((r_h v)', w'_h) \leq ch|v|_{2,\Omega} \|w'_h\|_h.$$

Démonstration : Considérons l'expression

$$H(\hat{g}, \hat{w}'_h) = \frac{1}{h_K} \int_{\hat{K}} \hat{g} \left( \frac{\partial y^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial \hat{w}'_h}{\partial \xi} - \frac{\partial y^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial \hat{w}'_h}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta.$$

L'application  $\hat{g} \rightarrow H(\hat{g}, \hat{w}'_h)$  est linéaire et continue, de  $H^1(\hat{K})$  dans  $\mathbb{R}$ , de norme  $\leq \hat{c} |\hat{w}'_h|_{1,\hat{K}}$ . D'autre part,

$$H(\hat{g}, \hat{w}'_h) = 0 \text{ pour tout } \hat{g} \in P_0.$$

D'après le lemme 1.1, on a

$$(4.22) \quad |H(\widehat{g}, \widehat{w}'_h)| \leq \widehat{c} |\widehat{g}|_{1, \widehat{K}} |\widehat{w}'_h|_{1, \widehat{K}} .$$

En utilisant le lemme 2.1, il vient

$$|H(\widehat{g}, \widehat{w}'_h)| \leq c |g|_{1, K} |w'_h|_{1, K} .$$

Si on remplace  $g$  par  $\frac{\partial}{\partial x} (\overline{r_h u})$ , on a

$$|g|_{1, K} = \left| \frac{\partial}{\partial x} (\overline{r_h u}) \right|_{1, K} \leq |\overline{r_h u}|_{2, K} \leq c |u|_{2, K} ,$$

donc

$$(4.23) \quad H\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial x} \overline{r_h u}}, \widehat{w}'_h\right) \leq c |u|_{2, K} |w'_h|_{1, K} ,$$

on obtient une inégalité semblable pour les termes en  $\frac{\partial}{\partial y} \overline{r_h u}$ .

En sommant les inégalités telles que (4.23) pour tous les éléments  $K \in \mathcal{T}_h$ , on obtient la relation (4.19).

Si dans l'inégalité (4.22) on remplace  $\widehat{g}$  par  $\widehat{\frac{\partial}{\partial x} \overline{w_h}}$  et  $\widehat{w}'_h$  par  $(\widehat{r_h v})'$ , on obtient l'inégalité

$$(4.24) \quad \left| \frac{1}{h_K} \int_{\widehat{K}} \widehat{\frac{\partial}{\partial x} \overline{w_h}} \left( \frac{\partial y^K}{\partial \eta} (0,0) \frac{\partial}{\partial \xi} (\widehat{r_h v})' - \frac{\partial y^K}{\partial \xi} (0,0) \frac{\partial}{\partial \eta} (\widehat{r_h v})' \right) d\xi d\eta \right| \leq c |\overline{w_h}|_{1, K} |(\widehat{r_h v})'|_{1, K} .$$

On a une inégalité analogue pour les termes en  $\frac{\partial}{\partial y} \overline{w_h}$ . En sommant les inégalités telles que (4.24) pour tous les éléments  $K \in \mathcal{T}_h$ , et en utilisant le lemme 2.5, on obtient l'inégalité (4.20). L'inégalité (4.21) se montre de la même manière.

En combinant les lemmes 2.5, 4.3, 4.4 et 4.5 on obtient le

THEOREME 4.1. - Soit  $u \in H^2(\Omega)$  la solution du problème (1.3).

Soit  $u_h \in V_h$  la solution du problème (4.8). On a la majoration :

$$\|u - u_h\|_h \leq ch|u|_{2,\Omega}.$$

REMARQUE 4.4. - Les résultats précédents s'étendent au problème de l'élasticité linéaire en utilisant les mêmes techniques que dans (\*).

REMARQUE 4.5. - Lorsque les éléments sont des rectangles, on peut montrer les résultats de super-convergence suivants (5) : on pose

$$|v|_h = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \text{aire } K |\overrightarrow{\text{grad}} v(G_K)|^2 \right)^{1/2}, \text{ pour } v \in H^3(\Omega)$$

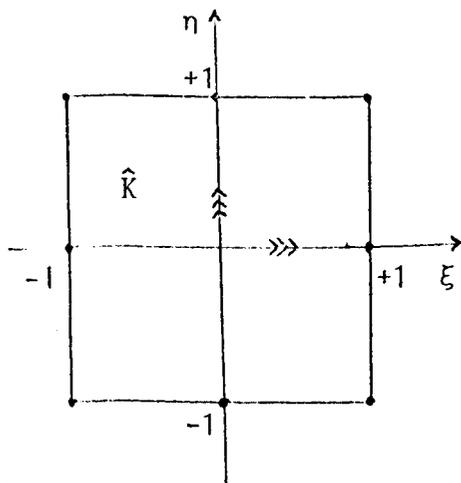
où  $G_K$  est défini sur la figure 1.

Si la solution  $u$  du problème (1.3) appartient à  $H^3(\Omega)$ , on a alors

$$|u - u_h|_h \leq ch^2|u|_{3,\Omega},$$

$$\|u_h'\|_h \leq ch^2|u|_{3,\Omega}.$$

REMARQUE 4.6. - La méthode définie en (4.7), (4.8) peut-être utilisée pour d'autres éléments non conformes, utilisant des polynômes de degré plus élevés, par exemple l'élément fini de la famille "serendipity".



utilisée pour d'autres éléments non conformes, utilisant des polynômes de degré plus élevés, par exemple l'élément fini de la famille "serendipity".

$$\hat{P} = Q_2 - \{\xi^2\eta^2\} + \{\xi^3\} + \{\eta^3\} = P_3.$$

Les degrés de liberté sont les

valeurs aux sommets et aux milieux des côtés (les fonctions de formes associées à ces degrés de liberté étant des polynômes de  $Q_2$ ), et les moyennes sur  $\hat{K}$  des dérivées  $\frac{\partial^3}{\partial \eta^3} \hat{P}$  et  $\frac{\partial^3}{\partial \xi^3} \hat{P}$  (les fonctions de formes correspondantes étant respectivement  $\xi^3 - \xi$  et  $\eta^3 - \eta$ ).

Le Patch Test est satisfait pour le problème (3.2) lorsqu'on utilise cet élément, et on a une convergence en  $O(h)$ . Si on utilise la méthode du paragraphe 4 (forme bilinéaire  $b_h$ ) un super Patch-Test est satisfait et on obtient une convergence en  $O(h^2)$ . On peut généraliser la construction de tels éléments en utilisant des résultats contenus dans (8).

REFERENCES

- (<sup>1</sup>) BRAMBLE, J. H. ; HILBERT, S. H. : Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation, Numer. Math. 16 (1971), 362-369.
- (<sup>2</sup>) CIARLET, P. G. : The finite element method for elliptic problems, North Holland (1977).
- (<sup>3</sup>) IRONS, B. M. ; RAZZAQUE, A. : Experience with the Patch Test for convergence of finite elements, in The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (A. K. AZIZ editor), Academic Press, New York, (1972), 557-587.
- (<sup>4</sup>) LESAINF, P. : On the convergence of Wilson's conforming element for solving the elastic problem, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 7 (1976), 1-16.
- (<sup>5</sup>) LESAINF, P. ; ZLAMAL, M. : (à paraître).
- (<sup>6</sup>) STRANG, G. ; FIX, G. J. : An analysis of the finite element method, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1973).
- (<sup>7</sup>) TAYLOR, R. L. ; BERESFORD, P. J. ; WILSON, E. L. : A non conforming element for stress analysis, Internat. J. Num. Methods Engrg. 10 (1976), 1211 et 1219.
- (<sup>8</sup>) THOMAS, J. M. : Méthode des éléments finis hybrides et mixtes mixtes pour les problèmes elliptiques du second ordre, Thèse, Paris, (1977).
- (<sup>9</sup>) ZIENKIEWICZ, O. C. : The finite element method in engineering science, MacGraw Hill, London, (1971).