

P. LADEVÈZE

**Nouvelle procédure d'estimation d'erreur relative à la
méthode des éléments finis et applications**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule S4

« Journées éléments finis », , p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___S4_A7_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Nouvelle procédure d'estimation d'erreur relative à la méthode des éléments finis et applications.

P. Ladevèze

Institut de Mécanique Théorique et Appliquée

Université Pierre et Marie Curie - Paris

La méthode des éléments finis est une approche numérique extrêmement utilisée, notamment en Mécanique. Un des problèmes importants est certainement la détermination du degré de confiance que l'utilisateur peut accorder à la solution numérique obtenue. C'est ce problème qui est traité dans cette étude.

La qualité des approximations par éléments finis a été très étudiée sur le plan mathématique [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] ... Les estimations d'erreur obtenues ne sont à vrai dire, que des évaluations du taux de convergence. Certes, ces informations sont intéressantes : elles permettent de dénoncer les raffinements superflus (en regard de l'erreur obtenue) et de classifier les éléments. Néanmoins, elles n'apportent pas de réponse au problème posé : elles utilisent la solution exacte qui n'est évidemment pas connue (excepté les estimations a posteriori introduites par Aubin [7]), et des constantes numériquement beaucoup trop grandes.

En calcul des structures, une autre approche de cette question a été proposée et utilisée par Fraeys de Veubeke et Sander. L'idée de base est classique ; elle consiste à résoudre numériquement les problèmes primal et dual, ce qui donne un encadrement de l'énergie exacte. Cette démarche est satisfaisante quant au résultat obtenu mais présente de sérieux inconvénients car elle nécessite la résolution de deux problèmes différents. De ce fait, elle est rarement utilisée.

La méthode d'estimation d'erreur décrite dans ce travail débouche sur de véritables critères, caractérisant l'erreur due à l'approximation par éléments finis.* Elle est pratique dans le sens où on ne résoud pas de nouveaux problèmes numériques ; sa mise en oeuvre ne nécessite que la mise en mémoire au niveau de l'élément d'une "matrice élémentaire d'erreur". Evidemment, nous utilisons la solution "éléments finis" usuelle. Sur le fond, ces estimations peuvent donc être qualifiées d'estimations d'erreur a posteriori.

Pour ne pas compliquer outre mesure l'exposé, nous considérons le problème : approximations par éléments finis triangulaires (interpolation linéaire) d'un problème de thermique (conduction anisotrope). Dans ses grandes lignes, la méthode est la suivante :

La solution $(\tilde{u}_0, \tilde{q}_0)$ du modèle de référence est constituée d'un champ de température $\tilde{u}_0$ et d'un champ de flux de chaleur $\tilde{q}_0$ définis sur le domaine Ω occupé par le milieu. La solution du modèle approché est la colonne θ_h composée des valeurs aux noeuds de la température.

La méthode, qui dans son principe est très générale, consiste à comparer $(\tilde{u}_0, \tilde{q}_0)$ à un couple $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$ de même nature mathématique et "représentatif" de θ_h . $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$ appartient à l'ensemble des couples $\hat{V} \times \hat{W}$ qui d'une part sont admissibles, et qui d'autre part prolongent en un sens précisé ultérieurement, la solution "éléments finis" θ_h . En outre, $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$ minimise l'erreur en relation de comportement sur $\hat{V} \times \hat{W}$. Ce problème est a priori défini sur le domaine Ω tout entier ; un point fondamental est qu'il se ramène à des problèmes "types" définis sur les éléments "types".

Le modèle approché sera "satisfaisant" si $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$ vérifie de façon "satisfaisante" la relation de comportement du modèle de référence. Différents critères peuvent être introduits ; par exemple, le modèle approché sera e^* -satisfaisant si l'erreur relative en relation de comportement $\hat{e}$ associée à

* L'approximation du domaine géométrique n'est pas comprise dans ce que nous entendons par approximation par éléments finis.

$(\hat{\mu}_0, \hat{q}_0)$ est telle que

$$\hat{e} \leq e^*$$

e^* sera la précision imposée par l'utilisateur.

La mise en pratique de ce critère consiste à déterminer une majoration de $\hat{e}$, explicite en fonction des données et de θ_h . Nous obtenons également une procédure de maillage automatique adaptée à une précision imposée.

Pour exprimer le plus clairement possible les idées essentielles, le cas monodimensionnel est d'abord traité. L'erreur $\hat{e}$ est explicite en fonction "seulement" des données : elle permet donc d'apprécier numériquement la finesse de la méthode d'estimation d'erreur.

Le cas des éléments triangulaires ne peut être traité ici dans son détail (voir [11]), seules les étapes essentielles seront exposées.

Cette vue de la méthode des éléments finis élargit son domaine d'utilisation habituel. Par exemple, dans le cas monodimensionnel, nous montrons que $\hat{e} = O(h^2)$ ce qui est nettement meilleur que l'erreur relative au couple (μ_h, q_h) déduit des fonctions d'interpolation, erreur qui est de l'ordre de $O(h)$. Ce point est la source de développements qui feront l'objet de travaux ultérieurs : lien entre grandeurs extraites de θ_h et "superconvergence" - amélioration d'une approximation par éléments finis...

0 Notations

Tous les espaces vectoriels sont réels. Si X désigne un espace vectoriel, $L(X)$ est l'espace des endomorphismes de X , $L_s(X)$ l'espace des endomorphismes symétriques et $L_s^+(X)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

La transposition euclidienne est notée par un trait : $\overline{\cdot}$ (produit scalaire des vecteurs $v, w : \overline{v} w$)

1. Méthode d'estimation d'erreur : généralités

Le modèle de référence est un problème plan de conduction thermique. Le

modèle approché est l'approche numérique du modèle de référence associée à des éléments finis triangulaires et tels que la fonction d'interpolation soit linéaire.

1.1. Le modèle de référence

Le domaine Ω est un ouvert à bord lipschitzien de l'espace euclidien orienté à deux dimensions E_2 ; M désigne le point courant. Sur une partie $\partial_1 \Omega$ de la frontière $\partial \Omega$ la température est imposée. En outre, le milieu est soumis à une charge thermique notée f .

- ensemble des champs de température admissibles : $\mu_0 + \mathcal{U}$

μ_0 est un champ appartenant à $H^1(\Omega)$, prenant sur $\partial_1 \Omega$ les valeurs imposées; $\mathcal{U} \equiv \{ \mu \mid \mu \in H^1(\Omega), \mu|_{\partial_1 \Omega} = 0 \}$ D'autre part, nous posons :

$$\mathcal{J} \equiv \{ \text{grad } \mu \mid \mu \in \mathcal{U} \} \subset \mathcal{E} \equiv \{ E \mid E \in E_2^\Omega, E \in L^2(\Omega) \}$$

- ensemble des champs de flux de chaleur admissibles : $q_0 + \mathcal{J}^0$

La charge thermique f est une forme linéaire sur $\mathcal{U}$, supposée continue. q_0 est une solution particulière appartenant à $L^2(\Omega)$ de l'équation d'équilibre.

$$\forall \mu \in \mathcal{U} \quad \int_{\Omega} \bar{q} \text{grad } \mu = f(\mu)$$

$\mathcal{J}^0$ est l'orthogonal de $\mathcal{J}$ par rapport à la forme bilinéaire

$$\begin{array}{ccc} (q, E) & \longmapsto & \int_{\Omega} \bar{E} q \\ \mathcal{J} \times \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \end{array}$$

où $\mathcal{J} \equiv \{ q \mid q \in E_2^\Omega, q \in L^2(\Omega) \}$

Physiquement, le champ de flux de chaleur est $-q$; c'est par commodité que nous utilisons son inverse.

- relation de comportement (loi de Fourier) : $q(\mu) = K_0 \cdot \text{grad } \mu$

K_0 est le champ d'opérateur de conductibilité défini sur Ω ; K_0 appartient à $[L^2(E_2)]^\Omega$. D'autre part, nous supposons : $K_0, K_0^{-1} \in L^\infty(\Omega)$.

Dans le cas particulier des matériaux homogènes isotropes, $K_0(M)$ s'écrit :

$$K_0(M) = k_0 I_d$$

- formulation du problème

Trouver un couple $(\tilde{\mu}_0, \tilde{q}_0)$, où $\tilde{\mu}_0$ est un champ de température et $\tilde{q}_0$ un champ de flux de chaleur, tel que :

- (1) a. $\tilde{\mu}_0 \in \mu_0 + \mathcal{U}$ (équation de liaison)
- b. $\tilde{q}_0 \in q_0 + \mathcal{J}^0$ (équation d'équilibre)
- c. $\tilde{q}_0 = q(\tilde{\mu}_0)$ (relation de comportement)

1.2. Erreur en relation de comportement et erreur en solution

A une solution approchée du problème (1), qui est par définition un couple (μ, q) , appartenant à $(\mu_0 + \mathcal{U}) \times (q_0 + \mathcal{J}^0)$, on associe la quantité $q - q(\mu)$ qui caractérise le degré de vérification de la relation 1.c. Nous appelons erreur en relation de comportement associée au couple (μ, q) cette quantité.

L'introduction de cette notion est motivée par la remarque classique suivante : si les équations de liaison et d'équilibre sont rigoureuses par rapport à un cadre d'hypothèses très générales et bien structurées, la relation de comportement au contraire, est l'aboutissement d'une modélisation assez arbitraire à laquelle s'ajoutent des erreurs de nature expérimentale. Il y a donc lieu d'imposer aux solutions approchées du modèle de référence de vérifier exactement les équations de liaison et d'équilibre, c'est-à-dire de faire porter le doute sur la relation de comportement qui, par sa nature même est la moins sûre.

D'autre part, la quantité $q - q(\mu)$ est une véritable erreur : si l'erreur en relation de comportement est "petite", l'erreur en solution est également "petite". C'est ici qu'interviennent les limites des moyens mathématiques actuels. En effet, les relations entre les deux erreurs utilisant des normes plus fines que celles associées au cadre de régularité naturel, mettent en jeu des constantes numériquement grandes (surtout pour les modèles du type "élasticité") ; de ce fait, elles sont sans intérêt sur le plan pratique.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de comparaison classique, qui est une forme du théorème de l'hypercercle de Prager et Synge :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_0 - u\|_u^2 &\equiv \int_{\Omega} \overline{q \operatorname{grad}(\tilde{u}_0 - u)} \cdot \kappa_0 q \operatorname{grad}(\tilde{u}_0 - u) \leq \Psi(q - q(u)) \\ \|\tilde{q}_0 - q\|_y^2 &\equiv \int_{\Omega} \overline{\tilde{q}_0 - q} \cdot \kappa_0^{-1} (\tilde{q}_0 - q) \leq \Psi(q - q(u)) \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{ccc} \Psi : & q & \longrightarrow \int_{\Omega} \bar{q} \kappa_0^{-1} q \\ & y & \longrightarrow \mathbb{R} \end{array}$$

$[\Psi(q - q(u))]^{1/2}$ est appelé : erreur quadratique en relation de comportement associée au couple (u, q) .

Remarque : Pour le modèle de référence considéré ici, les normes $\|\cdot\|_u$ et $\|\cdot\|_y$ n'ont pas de sens physique.

1.3. Le modèle approché

1.3.1. Notations-hypothèses

Les éléments sont désignés par E_R . Nous supposons que l'adhérence de Ω est la réunion des adhérences des E_R . En outre, nous imposons à la partie $\gamma_0 \Omega$ du bord où le déplacement est imposé, d'être vide ou réunion de côtés d'éléments.

L'ensemble des noeuds est ici l'ensemble des sommets noté I ; les inconnues au noeud sont la valeur du champ de température.

φ_i est la fonction de base relative au noeud m_i ; elle est telle que

$$\varphi_i(m_i) = 1 \quad \varphi_i(m_j) = 0 \text{ pour } m_j \in I, m_j \neq m_i$$

1.3.2. Formulation du modèle approché

Trouver (u_h, q_h) tel que

$$\begin{aligned} (2) \quad & \cdot u_h \in u_0 + \mathcal{U}_h \\ & \cdot (\forall u \in \mathcal{U}_h) \quad \int_{\Omega} \bar{q}_h \operatorname{grad} u = f(u) \\ & \cdot q_h = q(u_h) \end{aligned}$$

$$\text{où } \mathcal{U}_h \equiv \{u \mid u \in \mathcal{U}, u = \sum_I \theta_i \varphi_i\}$$

Cette formulation est à vrai dire une formulation intermédiaire. C'est

la formulation équivalente suivante qui est en réalité le modèle approché.

Trouver $\theta_h \in \theta_0 + \theta_h$ minimisant la restriction

$$(3) \quad \text{de } \theta \longmapsto \frac{1}{2} \bar{\theta} K \theta - \bar{F} \theta \quad \text{à } \theta_0 + \theta_h$$

K est la matrice de conduction et F la charge thermique généralisée. Pour appliquer des critères de dimensionnement, le praticien a besoin des champs de température et du champ de flux de chaleur.

Le problème (3) donne une information suffisante du champ de température (valeurs aux noeuds). Par contre, la description retenue du champ du flux de chaleur est déduite de q_h par une procédure de lissage ; q_h est discontinu et de ce fait difficile à interpréter sur le plan mécanique.

1.4. Schéma de la méthode d'estimation

L'élément qui représentera la solution θ_h du modèle approché appartiendra à l'ensemble $\hat{V} \times \hat{W}$ des prolongements admissibles de θ_h :

$$\hat{V} \equiv \left\{ u \mid u \in u_0 + \mathcal{U} ; \forall M_i \in I \quad \int_{U_i \cap E_h} u \varphi_i = \int_{U_i \cap E_h} u_h \varphi_i \right\}$$

$$\hat{W} \equiv \left\{ q \mid q \in q_0 + \mathcal{J}^0 ; \forall E_h, \forall u \in V_h^h \quad \int_{E_h} \bar{q} \operatorname{grad} u = \int_{E_h} \bar{q}_h \operatorname{grad} u \right\}$$

où $V_h^h \equiv \left\{ u \mid u = \sum_I \theta_i \varphi_i \right\}$

En d'autres termes, les grandeurs significatives extraites de θ_h ne sont pas (u_h, q_h) mais

- les moyennes de u_h sur les côtés des éléments : $\int_{U_i \cap E_h} u_h \varphi_i$
 - les moyennes de q_h : $\int_{E_h} q_h$
- (C₀)

Il s'introduit deux erreurs en relation de comportement, intrinsèques de l'approximation par éléments finis :

$$e_1 \equiv \left[\inf_{(u, q) \in \hat{V} \times \hat{W}} \frac{\Psi(q - q(u))}{\Psi(\bar{q}_0)} \right]^{1/2} \quad e_2 \equiv \left[\inf_{(u, q) \in \hat{V} \times \hat{W}} \frac{\Psi(q - q(u))}{\Psi(q(u))} \right]^{1/2}$$

l'élément représentatif de Θ_h est naturellement le prolongement admissible optimal. Par définition, ce sera la solution du problème de minimisation associé à e_1 . Soit $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$ cette solution.

On pose :

$$\hat{e} \equiv \left[\frac{\Psi(\hat{q}_0 - q(\hat{u}_0))}{\Psi(q(\hat{u}_0))} \right]^{1/2}$$

et on a : $e_1 \leq \frac{\hat{e}}{1 - \hat{e}} \quad e_2 \leq \hat{e}$

$$\frac{\|\hat{u}_0 - \tilde{u}_0\|_u}{\|\hat{u}_0\|_u} \leq \hat{e} \quad \frac{\|\hat{q}_0 - \tilde{q}_0\|_y}{\|\hat{q}_0\|_y} \leq \frac{\hat{e}}{1 - \hat{e}}$$

Le modèle approché sera satisfaisant pour l'utilisateur si

$$\hat{e} \leq e^*$$

où e^* est la précision imposée, précision qui ne peut être inférieure à l'erreur relative physique sur les coefficients de la relation de comportement, erreur qui est de l'ordre de $5/100$ à $10/100$ dans les problèmes concrets.

2. Etude du cas monodimensionnel

Le domaine Ω est un rectangle ; les données sont telles que le champ de température ne dépend que de la coordonnée x . On se ramène donc à des problèmes définis sur un domaine $\mathcal{A}$ qui est un segment ouvert.

La composante de q sur l'axe x est encore notée q . Le milieu est supposé isotrope homogène : $K_0 = k_0 I_d$. La densité de charge thermique sur $\mathcal{A}$ est notée f ; f est affine sur chaque élément. Cette dernière schématisation peut être considérée comme suffisante pour la plupart des problèmes concrets.

2.1. Construction du prolongement admissible optimal $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$

Cette construction est ici considérablement simplifiée, car les frontières des éléments et les noeuds coïncident.

Soit E_k un élément arbitraire défini par $[M_i, M_{i+1}]$. η_k est la fonction définie sur les sommets de E_k telle que

$$\eta_k(M_i) = -1 \quad \eta_k(M_{i+1}) = 1$$

Considérons deux éléments adjacents $E_k, E_{k'}$ de sommet commun M_i .

Des conditions

on tire
$$\int_{E_k} (\hat{q}_0 - q_h) \cdot \varphi_i|_{E_k, z} = 0 \quad \int_{E_{k'}} (\hat{q}_0 - q_h) \cdot \varphi_i|_{E_{k'}, z} = 0$$

$$(\hat{q}_0 \in q_0 + J^0)$$

$$\cdot \int_{E_k} F \varphi_i + \gamma_k(M_i) [\hat{q}_0(M_i) - q_h|_{E_k}(M_i)] = 0$$

$$\cdot \int_{E_{k'}} F \varphi_i + \gamma_{k'}(M_i) [\hat{q}_0(M_i) - q_h|_{E_{k'}}(M_i)] = 0$$

Compte tenu des équations d'équilibre du modèle "éléments finis", on obtient que $\hat{q}_0(M_i)$ est égal à d_i où

$$d_i \equiv - \gamma_k(M_i) \int_{E_k} F \varphi_i + q_h|_{E_k} = - \gamma_{k'}(M_i) \int_{E_{k'}} F \varphi_i + q_h|_{E_{k'}}$$

Dans le cas des éléments bords, on obtient des expressions semblables. $\hat{V} \times \hat{W}$ est alors défini par :

$$\hat{V} = \{ \mu \mid \mu \in \mu_0 + \mathcal{U}, \forall i \mu(M_i) = \theta_i \}$$

$$\hat{W} = \{ q \mid q \in q_0 + J^0, \forall i \ q(M_i) = d_i \}$$

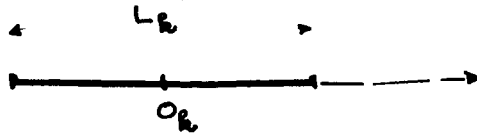
Le prolongement admissible optimal, c'est-à-dire le couple $(\hat{\mu}_0, \hat{q}_0)$ qui minimise

$$\begin{array}{ccc} (\mu, q) & \xrightarrow{\quad} & \int_{\mathcal{R}} (q - k_0 \mu, z)^2 \frac{1}{k_0} \\ \hat{V} \times \hat{W} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \end{array}, \text{ est a priori}$$

défini par des problèmes aux limites sur le domaine $\mathcal{R}$ tout entier. Un point remarquable est qu'en fait, ces problèmes aux limites se découpent : la restriction $(\hat{\mu}_{0k}, \hat{q}_{0k})$ de $(\hat{\mu}_0, \hat{q}_0)$ à l'élément E_k est solution de problèmes aux limites définis sur E_k . Ces problèmes ont même structure ; on est donc conduit à la résolution de problèmes types définis sur l'élément type.

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \ k_0 \hat{\mu}_{0k, zz} = -F_k \\ \cdot \ \hat{\mu}_{0k}(M_i) = \theta_i \\ \cdot \ \hat{\mu}_{0k}(M_{i+1}) = \theta_{i+1} \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{l} \cdot \ \hat{q}_{0k} = k_0 \varphi_{k, z} \\ \cdot \ k_0 \varphi_{k, zz} = -F_k \\ \cdot \ [k_0 \varphi_{k, z}](M_i) = d_i \\ \cdot \ [k_0 \varphi_{k, z}](M_{i+1}) = d_{i+1} \end{array} \right]$$

En utilisant un système de coordonnées locales de E_k ,



et en posant $F_k = a_k x + b_k$, on obtient :

$$\hat{u}_{O_k} = -\frac{1}{k_0} \left[a_k \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x \frac{L_k^2}{4}}{24} \right) + b_k \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L_k^2}{8} \right) \right] + u_h|_{E_k}$$

$$\hat{q}_{O_k} = - \left(J_2 \frac{x^2}{2} + b_k x \right) + a_k \frac{L_k^2}{8} + q_h|_{E_k}$$

2.2. Erreur en relation de comportement

$$\Psi_k(\hat{q}_{O_k} - k_0 \hat{u}_{O_k}, x) = F_1(L_k, F_k, k_0)$$

$$\Psi_k(k_0 \hat{u}_{O_k}, x) = F_2(L_k, F_k, k_0, 4h_k)$$

avec

$$F_1(L_k, F_k, k_0) = \frac{a_k^2}{144 k_0} [L_k]^5$$

$$F_2(L_k, F_k, k_0, 4h_k) = \frac{1}{k_0} \left[L_k 4h_k^2 + \frac{J_k^2}{16 \times 45} [L_k]^5 + \frac{b_k^2}{12} [L_k]^3 \right]$$

$$a_k = \left[\frac{F_k(M_{i+1}) - F_k(M_i)}{L_k} \right]^2 \quad b_k = \frac{1}{2} [F_k(M_{i+1}) + F_k(M_i)]$$

Sur le plan opérationnel, notre méthode consiste à introduire en mémoire au niveau de l'élément, les fonctionnelles explicites F_1, F_2 . La solution "éléments finis" étant calculée, on détermine

$$\hat{e} = \left[\frac{\sum_k F_1(L_k, F_k, k_0)}{\sum_k F_2(L_k, F_k, k_0, 4h_k)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'approximation par éléments finis sera satisfaisante si $\hat{e} \leq e^*$.

2.3. Essais numériques

On suppose que la température est nulle sur le bord de $\mathcal{R}$.

1er cas : $F_k = \text{constante}$

L'erreur $\hat{e}$ est nulle. Cette propriété remarquable et bien connue signifie que θ_h est égal aux valeurs aux noeuds de la solution exacte.

2ème cas : F linéaire ; $F=0$ sur l'axe des extrémités de $\mathcal{R}$

Pour des éléments égaux, on obtient :

nombre d'éléments	$\hat{e}$
2	0,095
3	0,043
5	0,016
10	0,004

2.4. Commentaires sur $\hat{e}$

L'erreur $\hat{e}$ est $O(h^2)$ ce qui est bien meilleur que l'erreur $O(h)$ associée au couple (u_h, q_h) . La conception de la méthode des éléments finis que nous proposons permet donc de diminuer assez fortement le nombre d'éléments réalisant une précision donnée. Sur le plan mathématique, elle repose sur le fait que les grandeurs extraites de θ_h sont bien meilleures que le couple (u_h, q_h) . En effet, on a :

$$\sum_I L_i^* [\tilde{u}_0(m_i) - \theta_i]^2 \leq \hat{e}^2 \frac{\psi(q(\hat{u}_0))}{k_0} \times \frac{L}{\pi k_0} \left[\sup_k L_k + \frac{L}{\pi} \right] = O(h^4)$$

$$\sum_k \frac{L_k}{k_0} \left[\frac{1}{L_k} \int_{E_k} (\tilde{q}_0 - q_h)^2 \right] \leq \hat{e}^2 \psi(q(\hat{u}_0)) = O(h^4)$$

où $L_i^* = L_k + L_{k'}$ avec m_i noeud commun à $E_k, E_{k'}$.

2.5. Procédure de maillage automatique

Supposons qu'un premier calcul ait été effectué. L'erreur $\hat{e}_1$ est supérieure à la précision imposée.

L'idée de base dans la procédure de maillage automatique est d'utiliser les valeurs de

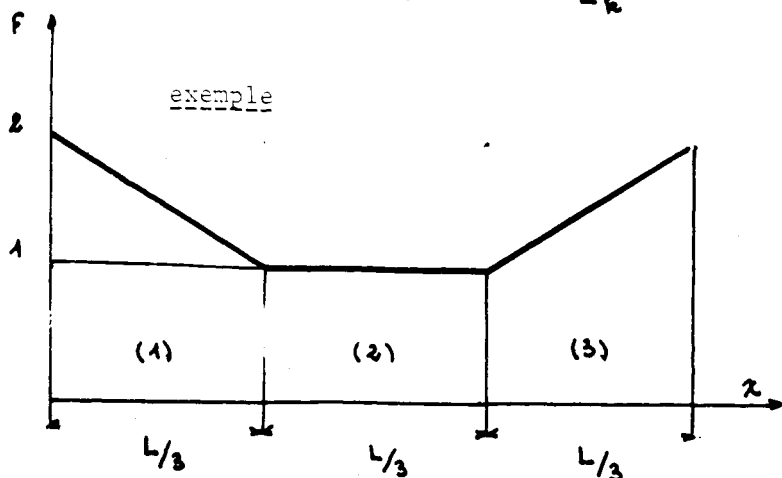
$$\varepsilon_k^2 = \frac{F_1(L_k, F_k, k_0)}{\sum_k F_2(L_k, F_k, k_0, q_h k)}$$

Supposons que l'élément E_k soit divisé en éléments E_{ke} . En première approximation, la contribution à la nouvelle erreur des E_{ke} est

$$\varepsilon_k^2 \cdot \sum_e \left[\frac{L_{ke}}{L_k} \right]^5 \quad \text{avec} \quad \sum_e L_{ke} = L_k$$

D'autre part, on imposera une condition d'uniformité de l'erreur, à savoir que la quantité précédente soit inférieure ou égale à $e^{*2} \cdot \frac{L_k}{\sum_k L_k}$. En résumé, le critère s'écrit

$$\forall e \quad \sum_k \varepsilon_k^2 \cdot \left[\frac{L_{ke}}{L_k} \right]^5 \leq \frac{e^{*2} \cdot L_k}{\sum_k L_k}$$

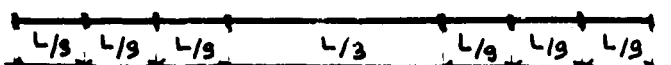


La précision imposée est $2/100$. Un premier calcul (3 éléments égaux) a été effectué ; l'erreur $\hat{e}_1$ est $8/100$.

$$\varepsilon^2(1) = \varepsilon^2(3) = 32 \cdot 10^{-4} \quad \varepsilon^2(2) = 0$$

Le critère s'écrit :

- élément (1) $\sum_k \left[\frac{L_{1e}}{L_1} \right]^5 \leq 1/48 \implies e = 3$
- élément (2) pas de conditions
- élément (3) $\sum_k \left[\frac{L_{3e}}{L_3} \right]^5 \leq 1/48 \implies e = 3$

La solution est :  (7 éléments)

Remarque : Le critère s'étend au cas où le nouveau maillage n'est pas une subdivision du premier.

3. Etude des approximations par éléments finis triangulaires

3.1. Notations - hypothèses

$$\Gamma \equiv \bigcup_k \partial E_k$$

$n|_{\partial E_k}$: normale unitaire extérieur à ∂E_k

γ_k est une famille de fonctions indexée par k ; $\gamma_k : \Gamma \longrightarrow \{-1, 0, 1\}$.

γ_k est constant sur chaque côté appartenant à Γ ; elle est nulle sur le complémentaire de ∂E_k . En outre, $\gamma_k|_{\Gamma_{kk'}} \cdot \gamma_{k'}|_{\Gamma_{kk'}} = -1$ avec

$$\Gamma_{kk'} \equiv \partial E_k \cap \partial E_{k'} \neq \emptyset$$

- $V_k \equiv H_0^1(E_k)$
- J_k° est l'orthogonal de $J_k \equiv \{ \text{grad } u \mid u \in H^1(E_k) \}$
- $\forall u \in \mathcal{U} \quad f(u) = \int_{\Omega} F u + \int_{\partial_2 \Omega} H u$

Cette étude sera menée dans le cas où

- $\text{grad } u_0|_{E_k}, K_0|_{E_k}, F|_{E_k}$ sont des fonctions constantes
- $H|_{\partial_2 \Omega \cap \partial E_k}$ est une fonction affine

Ces hypothèses de schématisation des données sont peu restrictives vis-à-vis des problèmes concrets.

3.2. Schéma de la méthode de construction de $(\hat{u}_0, \hat{q}_0)$

Définitions :

- Une Γ - densité de température g est admissible si

$$\begin{aligned} g|_{\partial_1 \Omega} &= u_0|_{\partial_1 \Omega} \\ g &\in H^{1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

- Une Γ - densité de flux de chaleur F est admissible si

$$\begin{aligned} F &\in H^{-1/2}(\Gamma) \\ F|_{\partial_2 \Omega} &= H \end{aligned}$$

$$\forall k, \forall u \in V_k^h \quad \int_{E_k} \bar{q}_k \text{grad } u = \int_{E_k} F u + \int_{\partial E_k} F \eta_k u$$

Les ensembles correspondants sont notés $g_0 + \mathcal{G}$ et $F_0 + \mathcal{F}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $(u, q) \in \hat{V} \times \hat{W}$ est : il existe $(g, F) \in (g_0 + \mathcal{G}) \times (F_0 + \mathcal{F})$ tel que :

- $u_k \in H^1(E_k), (\mu_k - g)|_{\partial E_k} = 0$
- $q_k \in L^2(E_k), \bar{m} q_k|_{\partial E_k} = \eta_k F|_{\partial E_k}$
 $\text{div } q_k + F_k = 0$

où $(\mu_h, q_h) \equiv (\mu, q)|_{E_h}$

Au couple (g, F) , on associe l'ensemble des solutions des équations précédentes : $(\mu_{g,h}^0 + u_h) \times (q_{F,h}^0 + \mathcal{I}_h^0)$, ce qui détermine un sous espace noté $\hat{V}_g \times \hat{W}_F$ de $\hat{V} \times \hat{W}$.

La minimisation sur $\hat{V}_g \times \hat{W}_F$ de l'erreur quadratique en relation de comportement conduit à associer à (g, F) le couple (μ_g, q_F) solution de ce problème. Un point important est que ce problème se découple : les restrictions $(\mu_{g,h}, q_{F,h})$ sont solutions de problèmes définis sur E_h ayant même structure. On est donc ramené à la résolution de problèmes types définis sur l'élément type.

Le problème fondamental est donc de trouver $(\hat{g}_0, \hat{F}_0) \in (g_0 + \mathcal{G}) \times (F_0 + \mathcal{F})$ tel que $(\hat{\mu}_0, \hat{q}_0) = (\mu_{\hat{g}_0}, q_{\hat{F}_0})$.

3.3. Explicitation de $g_0 + \mathcal{G}$ et $F_0 + \mathcal{F}$

Pour g_0 , nous prendrons $\mu_h|_\Gamma$

Au contraire, la détermination de F_0 n'est pas du tout triviale. C'est certainement l'une des difficultés essentielles. Dans [41], on démontre que

$$F_0 = \lambda \quad (\text{données, } \theta_h)$$

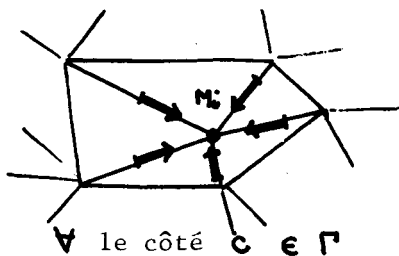
où λ est une fonction explicite.

3.4. Propriétés du prolongement admissible optimal

La difficulté des problèmes déterminant $(\hat{g}_0, \hat{F}_0)$ dépend du choix de $\hat{V} \times \hat{W}$ et donc de $g_0 + \mathcal{G}$ et $F_0 + \mathcal{F}$. Sous les seules conditions (C_0) , ces problèmes sont globaux.

Plusieurs possibilités sont en présence. Celle que nous suivrons ici consiste à introduire dans $\hat{V} \times \hat{W}$ des conditions supplémentaires (C_1) (C_2) telles que $(\hat{g}_0, \hat{F}_0)$ soit égal à (g_0, F_0) .

- (C₁) • $\sum_h \int_{\cap E_h} [\bar{n}_{\lambda_2} z \cdot \bar{n} q \varphi_i]_{E_h} = \sum_h \int_{\cap E_h} [\bar{n}_{\lambda_2} z \cdot \bar{n} q_h \varphi_i]_{E_h}$
 où z est le champ de vecteurs unitaires défini sur les côtés d'extrémités m_i tel que



(λ_2 : opérateur de rotation de $+\frac{\pi}{2}$)

- (C₂) • $\forall$ le côté $c \in \Gamma$, $\mu|_c, F|_c$ sont affines

La condition (C_2) n'a pas de sens physique : c'est une hypothèse d'approximation.

Remarque : Les quantités (g_0, F_0) sont duales sur le plan mécanique. Un point intéressant est de noter que (g_0, F_0) est solution approchée d'une formulation hybride-primale du modèle de référence [12].

3.5. Construction de (u_{g_0}, q_{F_0})

Cette construction se ramène à la résolution de deux problèmes types définis sur l'élément type.

Soit E l'élément type ; M_1, M_2, M_3 désignent les sommets. G est le centre d'inertie.

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } u_E \in H^1(E) \text{ tel que} \\
 & - (u - g)|_{\partial E} = 0 \\
 (P_1(E)) \quad & - \operatorname{div} (K_0 \operatorname{grad} u_E) = -F \\
 & \text{Trouver } w_E \in H^1(E) \quad (q_E = K_0 \cdot \operatorname{grad} w_E) \\
 (P_2(E)) \quad & - \operatorname{div} (K_0 \operatorname{grad} w_E) = -F \\
 & - [\bar{n} \cdot K_0 \operatorname{grad} w_E - \eta_E F]_{\partial E} = 0
 \end{aligned}$$

Les données sont telles que :

$$\begin{aligned}
 (Q_E) \quad & - K_0, F, \operatorname{grad} g : \text{constant sur } E \\
 & - \eta_E F : \text{linéaire sur les côtés de } \partial E \\
 & - \int_{\partial E} \eta_E F \cdot \bar{n} \, d\Gamma + \int_E F \cdot \bar{n} \, d\Gamma = \int_E K_0 \cdot \operatorname{grad} g \quad (C_2)
 \end{aligned}$$

$$u_E = g + \frac{F}{T_v[K_0]} \cdot \delta$$

$$q_E = K_0 \cdot \operatorname{grad} g - F \frac{\bar{n}}{2} + \sum_{i=1}^3 \tau_i \cdot \operatorname{grad} \psi_i^* + i_2 \operatorname{grad} \delta \cdot \sum_{i=1}^3 \tau_i d_i^*$$

(i_2 : opérateur de rotation de $\frac{\pi}{2}$)

Toutes les quantités intervenant dans (μ_E, q_E) sont explicites en fonction des données $\mathcal{D}_E$ et de la géométrie de E , excepté δ et δ' . Ces deux fonctions, qui sont des caractéristiques de la géométrie de E et de κ_0 , appartiennent à $H_0^1(E)$ et vérifient

$$\operatorname{div}(\kappa_0 \operatorname{grad} \delta) = -\operatorname{Tr}[\kappa_0] \quad \operatorname{div}(\bar{\mu}_2 \kappa_0^{-1} \bar{\mu}_2 \operatorname{grad} \delta') = -\operatorname{Tr}[\kappa_0^{-1}]$$

Dans le cas isotrope, elles sont égales à la fonction des contraintes du problème de torsion d'une poutre de section triangulaire.

3.6. Applications δ^-, δ'^-

Dans l'expression de l'erreur, interviennent les quantités $\int_E \delta$, $\int_E \delta'$. Pour réaliser notre objectif, de bonnes minoration de ces quantités sont seulement nécessaires. En outre, elles doivent être explicites en fonction de caractéristiques élémentaires de la géométrie et de κ_0 .

Soit $\mathcal{L}_E$ les caractéristiques choisies. Les applications δ^-, δ'^- sont telles que :

$$\forall \mathcal{L}_E \in \{\mathcal{L}_E\} \quad \begin{aligned} \delta^-(\mathcal{L}_E) &\leq \int_E \delta \\ \delta'^-(\mathcal{L}_E) &\leq \int_E \delta' \end{aligned}$$

Il est à noter que l'ensemble $\{\mathcal{L}_E\}$ est relativement restreint : dans les problèmes concrets, les éléments et κ_0 ne sont pas complètement arbitraires. Cette étape peut être résolue numériquement en tenant ^{compte} des estimations connues [13].

3.7. Expression de l'erreur

On montre que :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \Psi_E(q_E - \kappa_0 \operatorname{grad} \mu_E) &\leq [\hat{e}_E^*]^2 \equiv [\pi_1 \ \pi_2 \ \pi_3 \ F]_E H_E \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ F \end{bmatrix}_E \\ \bullet \quad \Psi_E(\kappa_0 \operatorname{grad} \mu_E) &\geq F_2(\mathcal{L}_E, F_E, q_E) \end{aligned}$$

H_E est la matrice élémentaire d'erreur ; elle est définie explicitement en fonction de caractéristiques élémentaires de la géométrie et de κ_0 . F_2 est également une fonction explicite. $[\pi_1, \pi_2, \pi_3]_E$ ne dépendent que de $\eta_E F|_{\partial E}$ (explicitement).

3.8. Procédure d'évaluation numérique de l'erreur

1ère étape :

- . Calcul de $[r_1, r_2, r_3]_{\epsilon_h}$ (quantités définies explicitement en fonction des données et de θ_h)

- . calcul de H_h

2ème étape :

- . calcul de $[\hat{e}_h^*]^2$, $F_2(\Lambda_h, F_h, \mu_{h,h})$

L'erreur $\hat{e}$ est alors majorée par :

$$\hat{e} \leq \hat{e}^* \equiv \left[\frac{\sum_h \hat{e}_h^{*2}}{\sum_h F_2(\Lambda_h, F_h, \mu_{h,h})} \right]^{1/2}$$

L'approximation sera satisfaisante si $\hat{e}^* \leq e^*$.

3.9. Commentaires

La procédure du maillage automatique, décrite dans le cas mono-dimensionnel se transpose aisément dans ce cas. Le champ $\hat{q}_0$ (ou une approximation de celui-ci) est une bonne solution approchée de $\tilde{q}_0$ si $\hat{e}^* \leq e^*$; la méthode présentée propose donc en particulier une procédure de lissage de q_h .

On peut démontrer que $\hat{e}^* = O(h)$. [12]

La méthode d'estimation d'erreur décrite dans ce travail est très générale. Dans le cas particulier des approximations par éléments finis de type primal, elle est basée sur la résolution de deux problèmes techniques :

- détermination de « F_0 »
- " des applications du type de « δ, δ' »

Le premier problème est résolu dans [11] pour tous les éléments de plaque. Dans tous les cas, les expressions de « F_0 » sont formellement identiques à celles obtenues dans le cas traité ici.

Les fonctions du type « δ, δ' » qui s'introduisent dans la résolution des problèmes types, dépendent du modèle de référence et du choix des éléments. La détermination d'applications qui majorent ou mineurent certaines normes de ces fonctions ne pose pas de sérieuses difficultés. Elle peut être faite numériquement en tenant compte des travaux portant sur la majoration des constantes qui s'introduisent dans l'étude des problèmes aux limites [13] [14] .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. "General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element method" ARMA 4.6. (1972)
- [2] CIARLET P.G. et RAVIART P.A. "A mixed finite element method for the biharmonic equation"
: Mathematical aspects of finite element in Partial Differential Equations, pp.125-145. Academic press, New York, 1974
- [3] PIAN Th.H. et TONG P. "Basis of finite element methods for solid continua"
Int. J. Num. Meth. in Eng., vol 1, n°1 (pp. 3-28), 1969
- [4] ODEN J.T. et REDDY J.N. "An introduction to the mathematical theory of finite elements"
Wiley interscience, New York
- [5] BABUSKA I. et AZIG A.K. "Survey lectures on the mathematical theory of finite elements"
"The mathematical foundations of the finite elements method with applications to differential equations"
Edited by AK A212, Academic press, N.Y. (pp. 3-395), 1972
- [6] STRANG G. et FIX G. "An analysis of the finite element method"
Prentice Hall, 1972
- [7] AUBIN J.P. "Approximation of elliptic boundary-value problems"
Wiley. Interscience, New York, 1972
- [8] FRAEJS de VEUBEKE B. "Displacement and equilibrium models in the finite element method. Chapitre 9. Stesss Analysis
Ed. Zienkiewicz O.C. (John Wiley, 1965)
- [9] SANDER G. "Application of the dual analysis principles"
Paper presented at the I.U.T.A.M. Colloquium on "High speed computing of elastic structures"
Liège, 23-28 août, 1970

- [10] LADEVEZE P. "Comparaison de modèles de milieux continus"
Thèse Paris VI, 1975
- [11] LADEVEZE P. "New error estimates procedure in finite element
methods and applications"
(à paraître)
- [12] DESTUYNDER P. - LADEVEZE P. "Utilisation d'un principe hybride-primal
pour obtenir une estimation explicite de l'erreur en
éléments finis"
(à paraître)
- [13] PAYNE L.E. "Isoperimetric inequalities and their applica-
tions"
S.I.A.M. Review vol 9, n°3, 1967, pp. 453-488
- [14] LADEVEZE J.- LADEVEZE P." "Estimations des constantes de Poincaré et de
Steklov pour les problèmes de Neumann"
(à paraître)