ALBERT RAUGI

Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3
« Séminaire de probabilités II », , p. 1-67
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977___3_A9_0>

THEOREME DE LA LIMITE CENTRALE POUR UN PRODUIT SEMI-DIRECT D'UN GROUPE DE LIE RESOLUBLE SIMPLEMENT CONNEXE DE TYPE RIGIDE PAR UN GROUPE COMPACT

par Albert RAUGI

Soit R un groupe de Lie résoluble connexe . Nous désignons par Ad la représentation adjointe de R . Nous disons que R est de type rigide si les valeurs propres des éléments de $Ad\, R$ sont toutes de module égal à 1 .

Soit G un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact . Si λ est une mesure de probabilité sur les boréliens de G , nous savons que ([1]) , lorsque G n'est pas compact , la $n^{\text{ième}}$ convolée , λ^n , de λ converge vaguement vers zéro . Nous nous proposons de trouver une suite d'homéomorphismes $\{U_n\}_{n\geq 1}$ de G , tels que la suite de mesures de probabilité $\{U_n(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité sur G pas trop dégénérée .

Nous commençons (partie I) par étudier le cas d'un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe compact . Nous montrerons par la suite (partie II) que le cas général se ramène à ce cas particulier .

1 . Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe compact .

Soit $G = Nx_{\eta}K$ le produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N par un groupe compact K associé à un homomorphisme continu η de K dans le groupe des automorphismes de N . Le produit de deux éléments $g = (u,k)$ et $g' = (u',k')$ de G est défini par $gg' = (u\,[\eta(k)(u')],\ kk')$.

Soit λ une mesure de probabilité sur les boréliens de G. Nous savons ([1]) que la $n^{\text{ième}}$ convolée, λ^n , de λ converge vaguement vers zéro. Nous nous proposons de trouver une suite d'homéomorphismes(si possible d'automorphismes) $\{V_n\}_{n\geq 1}$ de G , tels que la suite de mesures de probabilité $\{V_n(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité sur G , non dégénérée, en un sens à préciser.

1. Analyse du Problème

Nous désignons par π_1 et π_2 les projections de G respectivement sur N et K ; nous notons λ_1 et λ_2 les images de λ respectivement par π_1 et π_2 .

(1.1) La projection $\pi_2(\lambda^n)$ de λ^n sur K est la $n^{\text{ième}}$ convolée de λ_2 . Désignons par $K(\lambda_2)$ (resp. $\tilde{K}(\lambda_2)$) le sous-groupe compact de K engendré par le support $S(\lambda_2)$ de λ_2 (resp. par $S(\lambda_2)\,[S(\lambda_2)]^{-1}$). $\tilde{K}(\lambda_2)$ est un sous-groupe distingué de $K(\lambda_2)$; nous disons que λ_2 est apériodique si $\tilde{K}(\lambda_2) = K(\lambda_2)$. Nous savons que, ([7]), pour tout élément k de $S(\lambda_2)$, la suite de mesures de probabilité $\{\varepsilon_{k^{-n}} * \lambda_2^n\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée $\tilde{m}$ de $\tilde{K}(\lambda_2)$. En particulier quand λ_2 est apériodique, la suite de mesures de probabilité $\{\lambda_2^n\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers la mesure de Haar normalisée m de $K(\lambda_2)$.

D'autre part, nous avons, avec les notations précédentes :

(1.2) Proposition.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes définies sur un espace probabilisé (Ω, a, P) , à valeurs dans G , et de loi commune λ . Soit $\{U_n\}_{n\geq 1}$ une suite d'homéomorphismes de N tels que : la suite de mesures de probabilité sur N $\{U_n \circ \pi_1(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers une mesure de probabilité ν ; et, pour tout entier naturel p , pour toute fonction f continue, à support compact sur N ,

$$\lim_n E[|f \circ U_n \circ \pi_1(X_1 \ldots X_n) - f \circ U_n \circ \pi_1(X_1 \ldots X_{n-p})|] = 0 .$$

Pour tout élément k de K, et tout entier naturel n , posons

$$V_n^k(g) = (U_n \circ \pi_1(g) \; , \; k^{-n}\pi_2(g)) .$$

Alors, pour tout élément k de $S(\lambda_2)$, la suite de mesure de probabilité sur G $\{V_n^k(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers la mesure de probabilité produit $\nu \otimes \tilde{m}$. En particulier lorsque λ_2 est apériodique, $V_n^e(\lambda^n)$, (e désignant l'élément neutre de K), converge vaguement vers la mesure produit $\nu \otimes m$.

De (1.1) et (1.2), il résulte que le problème considéré se ramène à trouver une suite d'homéomorphismes $\{U_n\}_{n\geq 1}$ de N possèdant les deux propriétés énoncées dans la proposition (1.2) et pour laquelle la limite vague ν de $U_n \circ \pi_1(\lambda^n)$ soit non dégénérée (i.e. non portée par une sous variété propre de N).

(1.3) Pour toute mesure de probabilité μ sur G, nous désignerons par Q_μ l'opérateur de transition sur N, identifié à $G/_K$, associé à μ ; nous avons

$$Q_\mu f(v) = \int_G f(g.x)\ \mu(dg)$$

$$= \int_{N\times K} f(u[n(k)(v)])\ \mu(du,dk) \qquad (v \in N)\ ,$$

pour toute fonction borélienne f sur N pour laquelle, le second membre est défini pour tout $u \in N$. Pour une mesure de Dirac ε_g, $g \in G$, nous notons Q_g au lieu de Q_{ε_g}. Si μ et μ' sont deux mesures de probabilité sur G, nous avons $Q_\mu Q_{\mu'} = Q_{\mu' * \mu}$. En particulier si μ est une mesure de probabilité sur G idempotente, c'est-à-dire est la mesure de Haar normalisée d'un sous-groupe compact de G, alors Q_μ est un projecteur.

Avec ces notations, nous avons, pour toute fonction borélienne bornée (ou positive) sur N,

$$\int_N f(u)\ \pi_1(\lambda^n * \varepsilon_v)(du) = Q_\lambda^n f(v) \quad , \qquad (v \in N)\ .$$

Pour étudier la suite de mesures de probabilité $\pi_1(\lambda^n)$, nous sommes ainsi amenés à étudier la suite d'opérateurs $\{Q_\lambda^n\}_{n\geq 1}$. Cette étude sera faite dans la section 2 dans une situation particulièrement favorable. Par la suite (section 5) nous montrerons que le cas général (moyennant des hypothèses de moment sur λ) se ramène toujours à cette situation particulière. Nous terminons cette section 1 en donnant une démonstration de la proposition (1.2)

Preuve de la proposition (1.2)

Nous commençons par établir un lemme.

(1.4) Lemme :

Soit $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un groupe compact K, convergeant vaguement vers une mesure de probabilité μ. Alors pour toute fonction f continue sur K, nous avons

$$\lim_n \sup_{x\in K} \left|\int_K f(xk)\, \mu_n(dk) - \int_K f(xk)\, \mu(dk)\right| = 0 .$$

Preuve du lemme (1.4):

Si h est une fonction continue sur K, nous posons $||h||_\infty = \sup_{x\in K} |h(x)|$ et nous notons h^x, la translaté à gauche de h par l'élément x de K (i.e. $h^x(k) = h(xk)$, $\forall k \in K$).

Soit f une fonction continue sur K. Pour tout entier naturel non nul m, posons

$$f_m(x) = \sup_{n\geq m} \left|\int_K f(xk)\, \mu_n(dk) - \int_K f(xk)\, \mu(dk)\right| , \quad (x \in K).$$

On vérifie aisément que l'on a :

$$f_m(x) \leq f_m(y) + 2\, ||f^{xy^{-1}} - f||_\infty , \quad \forall (x,y) \in K\times K ;$$

d'où

$$|f_m(x) - f_m(y)| \leq 2 \sup\{||f^{xy^{-1}} - f||_\infty , ||f^{yx^{-1}} - f||_\infty\} , \quad \forall (x,y) \in K\times K ;$$

et par suite, pour tout entier $m \geq 1$, la fonction f_m est continue sur K.

Soit ε un réel > 0. $(\{f_m < \varepsilon\})_{m\geq 1}$ est une famille croissante d'ouverts de K. Comme la suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers μ, cette famille constitue un recouvrement ouvert de K. De la compacité de K , il résulte alors qu'il existe un entier $m(\varepsilon)$ pour lequel $K = \{f_{m(\varepsilon)} < \varepsilon\}$. Le lemme est prouvé.

La proposition (1.2) résulte alors du lemme suivant.

(1.5) <u>Lemme</u> :

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, a, \mathbb{P})$, à valeurs dans G , et de loi commune λ; pour tout entier naturel non nul n , nous posons $S_n = X_1 \dots X_n$.

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite d'homéomorphismes de N tels que, pour tout entier naturel p , pour toute fonction f continue, à support compact sur N,

$$\lim_n E[|f \circ U_n \circ \pi_1(S_n) - f \circ U_n \circ \pi_1(S_{n-p})|] = 0 \quad .$$

Alors les v.a. $U_n \circ \pi_1(S_n)$ et $\pi_2(S_n)$ sont asymptotiquement indépendantes ; c'est-à-dire que pour toute fonction continue f , à support compact, sur N et pour toute fonction h continue sur K , nous avons

$$\lim_n \left|\mathbb{E}[f \circ U_n \circ \pi_1(S_n)\, h \circ \pi_2(S_n)] - \mathbb{E}[f \circ U_n \circ \pi_1(S_n)]\mathbb{E}[h \circ \pi_2(S_n)]\right| = 0.$$

<u>Preuve du lemme</u> (1.5) :

Pour tout entier naturel p , nous avons

$$\left|\mathbb{E}[f \circ U_n \circ \pi_1(S_n)\, h \circ \pi_2(S_n)] - \mathbb{E}[f \circ U_n \circ \pi_1(S_n)]\, \mathbb{E}[h \circ \pi_2(S_n)]\right|$$

$$\leq \alpha(n,p) + \beta(n,p) .$$

avec,

$$\alpha(n,p) = \left|E[(f \circ U_n \circ \pi_1(S_n) - f \circ U_n \circ \pi_1(S_{n-p}))\ h \circ \pi_2(S_n)]\right|$$
$$\leq \|h\|_\infty\ E[|f \circ U_n \circ \pi_1(S_n) - f \circ U_n \circ \pi_1(S_{n-p})|]$$

$$\beta(n,p) = \left|\mathbb{E}[f \circ U_n \circ \pi_1(S_{n-p})(h \circ \pi_2(S_n) - \mathbb{E}[h \circ \pi_2(S_n)])]\right| .$$

Comme les v.a. $(X_i)_{i\geq 1}$ sont indépendantes et de loi λ, nous avons

$$\beta(n,p) \leq \|f\|_\infty \left|\mathbb{E}[\int_K h(\pi_2(S_{n-p})\ k)\lambda_2^p\ (dk)] - \int_K h(k)\ \lambda_2^n\ (dk)\right| .$$

Soit k_0 un élément de $S(\lambda_2)$. $k_0^{-n}\ S_{n-p}\ k_0^p$ s'écrit

$$[k_0^{-(n-1)}(k_0^{-1}\pi_2(X_1)k_0)k_0^{n-1}]\,[k_0^{-(n-2)}(k_0^{-1}\pi_2(X_2)k_0)k_0^{n-2}]\ldots[k_0^{-p}(k_0^{-1}\pi_2(X_{n-p})k_0)k_0^{p}],$$

et appartient donc, $\mathbb{P}$-p.s., à $\tilde{K}(\lambda_2)$. On en déduit que

$$\beta(n,p) \leq \|f\|_\infty \sup_{x\in\tilde{K}(\lambda_2)} \left|\int_K h(k_0^n\ xk)\ \mu_p(dk) - \int_K h(k_0^n k)\ \mu_n(dk)\right| ,$$

où $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ désigne la suite de mesure de probabilité $\{\varepsilon_{k_0^{-n}} * \lambda_2^n\}_{n\geq 1}$

Comme la suite $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers $\tilde{m}$, du lemme (1.4) il résulte que l'on a $\lim_p \sup_{n\geq p} \beta(n,p) = 0$.

D'autre part, l'hypothèse du lemme (1.5), nous assure que pour tout entier p fixé $\lim_n \alpha(n,p) = 0$.

Le lemme (1.5) est prouvé.

2. "Résolution" du Problème dans une situation particulière

(2.1) Nous pouvons toujours supposer, qu'en tant qu'espace topologique, N est un espace vectoriel réel de dimension finie et que pour tout élément k de K, $\eta(k)$ est un automorphisme d'espace vectoriel de N. [En effet, si ce n'est pas le cas, munissons l'algèbre de Lie $(\mathcal{L}(N), [\ ,\ ])$ du produit $\circ$ défini par la formule de Campbell-Hausdorff,

$$u \circ v = u + v + \frac{1}{2}[u,v] + \ldots \qquad (u,v \in N)\ ;$$

nous savons que l'application exponentielle de N est un isomorphisme de groupe analytique de $(\mathcal{L}(N),\circ)$ sur N ; le groupe G est alors isomorphe au produit semi-direct $(\mathcal{L}(N),\circ) \times_{\mathcal{L}(\eta)} K$, où pour tout $k \in K$, on désigne par $\mathcal{L}(\eta)(k)$ l'automorphisme de $(\mathcal{L}(N),[\ ,\ ])$ et par suite de $(\mathcal{L}(N),\circ)$, tangent à l'automorphisme $\eta(k)$ de N].

D'autre part, quitte à remplacer $G = N \times_\eta K$ par $N \times_\eta K(\lambda_2)$, nous pouvons supposer que $K(\lambda_2) = K$.

Nous faisons alors sur le couple (G,λ) l'hypothèse suivante :

Il existe sur l'algèbre $\mathbb{C}[N]$ des fonctions polynomes sur N, à coefficients complexes, une notion de degré pour laquelle

i) $\forall T \in \mathbb{C}[N]$, $T(uv) = T(u) + T(v) + P_T(u,v)$, $(u,v \in N)$,

où P_T est une fonction polynome sur $N \times N$ dont le degré global, dg P_T, est inférieur ou égal à celui, dg$T$, de T ; et les valuations partielles de P, val P/u et val P/v, sont supérieures ou égales à 1

ii) $\forall T \in \mathbb{C}[N]$, $dgT \circ \eta(k) = dgT$, $\forall k \in K$.

iii) Pour toute forme linéaire A sur N de degré 1 ,

$$\int_N \sup_{k\in K} |A(\eta(k)(u))| \lambda_1(du) < +\infty$$

et $$\int_N \int_K A(\eta(k)(u)) \, m(dk) \, \lambda_1(du) = 0$$

(2.2) Remarque. Une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, s'obtient obligatoirement en choisissant une base $\{f_i\}_{1\leq i\leq p}$ de l'espace vectoriel N, en attribuant un degré à chaque fonction coordonnée y_i , $1\leq i\leq p$, associée à cette base et en convenant que le degré (resp. la valuation) du polynome nul est $(-\infty)$ (resp. $(+\infty)$). Nous disons alors que $\{f_i\}_{1\leq i\leq p}$ est une base de référence pour cette notion de degré.

Pour qu'une notion de degré vérifie l'hypothèse i) resp ii)) de (2.1) il faut et il suffit que les relations de i) (resp. ii)) soient vérifiées par les fonctions coordonnées $(y_i)_{1\leq i\leq p}$ d'une de ses bases de référence. Dans ce cas, on remarquera que l'élément neutre et l'inverse d'un élément u du groupe N coïncident respectivement avec l'élément nul et l'opposé de u dans le groupe additif de l'espace vectoriel N . En outre, pour toute forme linéaire A de degré 1 sur N (i.e. pour toute combinaison linéaire des fonctions coordonnées y_i de degré 1), nous avons
$A(uv) = A(u) + A(v) = A(u+v)$.

(2.3) Pour tout élément u de N , désignons par L_u(resp. R_u) la multiplication à gauche (resp. à droite) par u sur N . Pour tous éléments $g = (u,k)$ de G et T de $\mathbb{C}[N]$, nous avons, (voir (1.4)),

$$Q_g T = T \circ I_u \circ \eta(k)) .$$

D'après les hypothèses ii) et iii) de (2.1), on voit qu'ainsi G opère à droite sur $\mathbb{C}[N]$ et les sous-espaces

$\mathbb{C}_\ell[N] = \{T \in \mathbb{C}[N] : dgT \leq \ell\}$, $\ell \in \mathbb{N}$; en outre, nous avons

$$(Q_g - Q_k)T(\cdot) = P_T(u, n(k)(\cdot)) + T(u) ,$$

qui montre que

$$dg(Q_g - Q_k)T \leq dgT - 1 \quad , \quad \forall g = (u,k) \in G \ , \ \forall T \in \mathbb{C}[N]$$

Soit μ une mesure de probabilité sur G . Posons

$$\ell(\mu) = \sup\{\ell \in \mathbb{N} : \int_N \sup_{k \in K} |T \circ n(k)(u)| \ \pi_1(\mu)(du) < +\infty \ , \ \forall T \in \mathbb{C}_\ell[N]\} .$$

De ce qui précède, il résulte que Q_μ opère sur $\mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N]$, (on convient que $\mathbb{C}_{+\infty}[N] = \mathbb{C}[N]$!) , et nous avons :

(2.4) <u>Lemme</u>

Soit μ une mesure de probabilité sur G . Alors pour tout $T \in \mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N]$,

$$dg(Q_\mu - Q_{\pi_2(\mu)}) \ T \leq dgT - 1 .$$

Si de plus, μ vérifie $\int_N A(u) \pi_1(\mu)(du) = 0$, pour toute forme linéaire A de degré 1 sur N , alors

$$dg(Q_\mu - Q_{\pi_2(\mu)})T \leq dgT - 2$$

(2.5) L'opérateur $Q_{\lambda_2}(I - Q_m) = (I - Q_m)Q_{\lambda_2}$ de $\mathbb{C}[N]$ ne possède pas la valeur propre 1. En effet, si $T \in \mathbb{C}[N]$ vérifie $Q_{\lambda_2}(I - Q_m)T = T$, nous avons

$$T = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} Q_{\lambda_2^{n}} \right) (I - Q_m) T \ ;$$

et par suite, puisque la suite de mesures de probabilité $\left\{ \frac{\lambda_2 + \ldots + \lambda_2^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$ converge vaguement vers m, $T = Q_m(I - Q_m)T = 0$.

Il s'ensuit que $(I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m))$ est un opérateur bijectif de $\mathbb{C}[N]$.

Désignons par $\bar{\lambda}$ la mesure de probabilité sur N définie par $\int_N \eta(k)(\lambda_1)\, m(dk)$. Appelons $\hat{\lambda}$ la mesure de probabilité sur N définie par

$$\hat{\lambda}(f) = \int_{N \times K} f(\eta(k^{-1})(u))\, \lambda(du, dk) \quad ,$$

pour toute fonction borélienne bornée f sur N.

Posons

$$\begin{aligned} L_\lambda &= Q_m(Q_\lambda - I)Q_m + Q_m(Q_\lambda - I)\left[I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m)\right]^{-1}(Q_\lambda - I)Q_m \\ &= Q_m(Q_{\bar{\lambda}} - I)Q_m + Q_m(Q_{\lambda_1} - I)\left[I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m)\right]^{-1}(Q_{\hat{\lambda}} - I) \ . \end{aligned}$$

D'après le lemme (2.4), l'opérateur L_λ baisse le degré de tout élément de $\mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$ d'au moins deux unités.

Nous avons alors :

(2.6) <u>Proposition</u> :

Soient $G = N \times_\eta K$ un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe compact K et λ une mesure de probabilité sur G. Supposons que le couple (G, λ) vérifie les hypothèses de (2.1).

Alors, (avec les notations de (2.5)), pour toute fonction polynome T sur N de degré $\leq \ell(\lambda)$, la suite de fonctions polynomes $\{\frac{1}{n^{dgT/2}} Q_\lambda^n T\}_{n\geq 1}$ converge, uniformément sur tout compact de N, vers zéro si dgT est impair, vers la constante $\frac{1}{(dgT/2)!} L_\lambda^{dgT/2} T$ si dgT est pair.

Une démonstration de la proposition (2.6) sera donnée dans la section 3. On remarquera que cette proposition améliore un résultat de Guivarc'h ([2] corollaire de la proposition 2).

Nous allons à présent donner deux corollaires.

(2.7) Corollaire.

Soit (G,λ) comme dans la proposition (2.6). Supposons que λ vérifie, en outre, l'une des deux propriétés :

$\lambda = \lambda_1 \otimes \lambda_2$ ou $\int A(u)\ \lambda_1(du) = 0$, pour toute forme linéaire A de degré 1 sur N .

Alors, pour tout élément T de $\mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$ de degré pair, nous avons

$$L_\lambda^{dgT/2}\ T = (Q_{\bar{\lambda}} - I)^{dgT/2}\ T$$

Preuve.

Si $\lambda = \lambda_1 \otimes \lambda_2$, nous avons $(Q_\lambda - I)Q_m = Q_{\lambda_2}(Q_{\bar{\lambda}} - I)Q_m$. Par suite, dans les deux cas envisagés dans le corollaire, l'opérateur

$$Q_m(Q_{\lambda_1} - I)[I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m)]^{-1}(Q_{\hat{\lambda}} - I)Q_m$$

baisse le degré de toute fonction polynome de degré $\leq \ell(\lambda)$ d'au moins trois unités. Nous avons alors

$$L_\lambda^{dgT/2}\ T = [Q_m(Q_{\overline{\lambda}} - I)Q_m]^{dgT/2}\ T = (Q_{\overline{\lambda}} - I)^{dgT/2}\ T \quad .$$

(2.8) Corollaire.

Soit (G,λ) comme dans la proposition (2.6). Soit a un élément de N vérifiant

$$(*) \qquad A(a) = ([I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m)]^{-1}A)(\int_N u\ \lambda_1(du)) \quad ,$$

pour toute forme linéaire A sur N de degré 1 .

Alors, pour tout élément T de $\mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$ de degré pair, nous avons

$$L_\lambda^{dgT/2}\ T = (Q_{\overline{\lambda(a)}} - I)^{dgT/2}\ T \quad ,$$

où $\lambda(a) = \varepsilon_{(-a,e)} * \lambda * \varepsilon_{(a,e)}$ et $\overline{\lambda(a)} = \int_K \eta(k) \circ \pi_1(\lambda(a))\ m(dk)$.

Preuve.

Pour tout élément a de N vérifiant la relation (*), on voit facilement que l'on a

$$\int_N A(u)\ \pi_1(\varepsilon_{(-a,e)} * \lambda * \varepsilon_{(a,e)})(du) = 0 \quad , \text{ pour}$$

toute forme linéaire A de degré 1 sur N . Autrement dit la mesure de probabilité sur G , $\lambda(a)$, vérifie l'hypothèse du corollaire (2.7).

Or pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous avons

$$Q_\lambda^n = Q_{(a,e)}^{-1}\ Q_{\lambda(a)}^n\ Q_{(a,e)}$$

On en déduit que

$$\lim_n \frac{1}{n^{dgT/2}} Q_\lambda^n T = \frac{1}{(\frac{dgT}{2})!} (Q_{\overline{\lambda(a)}} - I)^{dgT/2} Q_{(a,e)} T = \frac{1}{(\frac{dgT}{2})!} (Q_{\overline{\lambda(a)}} - I)^{dgT/2} T$$

car $dg(Q_{(a,e)} - I)T \leq dgT - 1$; d'où le corollaire .

(2.9) Choisissons une base $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ de l'espace vectoriel N qui soit une base de référence pour la notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ considérée en (2.1), (voir remarque (2.2)). Notons $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base. Pour tout réel $t > 0$, nous posons

$$U_t^b(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i(u)}{t^{dgx_i/2}} e_i \qquad (u \in N) \qquad ;$$

puis

$$U_t^b(u,k) = (U_t^b(u) \ , \ k) \quad , \quad ((u,k) \in N \times K) \quad .$$

(2.10) Soient u et v deux éléments de N . Pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, écrivons, (hypothèse ii) de (2.1)),

$$x_i(uv) = x_i(u) + x_i(v) + P_i(u,v) \qquad ,$$

où $P_i \in \mathbb{C}[N \times N]$ tel que $dg\, P_i \leq dg\, x_i$, $valP_i/u$ et $valP_i/v \geq 1$.

Alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, nous avons

$$x_i(U_t(U_{1/t}(u)\ U_{1/t}(v))) = x_i(u) + x_i(v) + \frac{1}{t^{dgx_i/2}} P_i(U_{1/t}(u) \ , \ U_{1/t}(v))$$

et par suite,

$$\lim_{t\to+\infty} x_i(U_t(U_{1/t}(u)\ U_{1/t}(v))) = x_i(u) + x_i(v) + \overline{P_i}(u,v) \quad ,$$

où $\overline{P_i}$ est le polynome sur $N \times N$ qui se déduit de P_i en conservant uniquement les monomes de degré $dg\ x_i$.

En posant

$$u \cdot v = \lim_{t\to+\infty} U_t(U_{1/t}(u)\ U_{1/t}(v)) \quad ,$$

on vérifie facilement que l'on définit un produit nilpotent sur l'espace vectoriel N ; nous notons N^b le groupe de Lie nilpotent simplement connexe $(N,\cdot)$. Pour tout $t > 0$, U_t^b est un automorphisme de N^b .

(2.11) Pour tout élément $g = (u,k)$ de G , nous posons

$$\phi_b(g) = \phi_b(u) = \sup_{1\leq i\leq p}\ \sup_{k\in K} |x_i(n(k)(u))|^{1/dg\ x_i}$$

La condition (*) $\int_G \phi_b^2(g)\ \lambda(dg) < +\infty$,

est équivalente à

$$\int_N \sup_{k\in K} |T(n(k)(u))|^{2/dgT}\ \lambda_1(du) < +\infty \quad , \forall T \in \mathbb{C}[N]$$

et est par conséquent indépendante du choix de b .

Nous avons alors :

(2.12) Théorème :

Soit (G,λ) vérifiant les hypothèses de (2.1). Supposons qu'en outre λ vérifie la condition (*) de (2.11). Désignons par $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de référence pour la notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ considérée en (2.1) et par $\{x_i\}_{1\leq i\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base.

Alors, (avec les notations de (2.9) et (2.10)), la suite de mesures de probabilité $\{U_n^b \circ \pi_1(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$ converge vaguement vers la loi au temps 1 du semi-groupe de convolution $\{\nu_t^b\}_{t>0}$ sur N^b de générateur infinitésimal

$$A = \sum_{\{i:dg\, x_i=2\}} (L_\lambda\, x_i)D_i + \frac{1}{2} \sum_{\{i,j:dg\, x_i=dg\, x_j=1\}} (L_\lambda\, x_i\, x_j)\, D_i\, D_j\ ,$$

où, pour toute fonction f de classe C^1 sur N,

$$D_i f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u\cdot te_i) - f(u)}{t}\ , \quad u \in N\ , \quad i \in \{1,\ldots,p\}\ .$$

En outre la suite d'homéomorphismes $\{U_n^b\}_{n\geq 1}$ vérifie les hypothèses de la proposition (1.2) ; les conclusions de cette proposition s'appliquent donc.

Une démonstration du théorème (2.12) sera donnée dans la section 4 . Nous terminons cette section en faisant quelques commentaires.

(2.13) Remarque. Pour savoir dans quels cas nous avons effectivement résolu le problème posé, nous devons étudier le semi-groupe $\{\nu_t\}_{t>0}$ de g.i. A .

Chaque D_i , $1\leq i\leq p$, est un champ analytique de vecteurs tangents, invariant à gauche sur N^b ; c'est-à-dire un élément de l'algèbre de Lie, $\mathcal{L}(N^b)$, de N^b .

Si pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, $dg\ x_i \geq 2$, A est un élément de $\mathcal{L}(N^b)$. Nous avons alors $\nu_t = \varepsilon_{tf_0}$, où $f_0 = \sum_{\{i:dg\ x_i=2\}} (L_\lambda\ x_i)\ e_i \in N$; et par suite $U_n^b \circ \pi_1(\lambda^n)$ converge vaguement vers la mesure de Dirac ε_{f_0}.

S'il existe des coordonnées x_i de degré 1, alors A s'écrit sous la forme

$$A = Z_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{1} Z_i^2 \qquad \text{avec} \qquad s \in \mathbb{N}^*$$

où Z_i, $0 \leq i \leq s$, sont des éléments de $\mathcal{L}(N^b)$.

Désignons par $\mathcal{L}_1(A)$ la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(N^b)$ engendrée par les éléments $Z_0,\dots,Z_s$; et par $\mathcal{L}_2(A)$ l'idéal de $\mathcal{L}_1(A)$ formé par les éléments de $\mathcal{L}_1(A)$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\ Z_i + Y$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r$ et $Y \in [\mathcal{L}_1(A), \mathcal{L}_1(A)]$.

En omettant l'indice A, désignons par L_1 et L_2 les sous-groupes de Lie connexes de N^b possèdant respectivement $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ pour algèbre de Lie. L_2 est un sous-groupe distingué de L_1.

Nous avons alors (voir [4]) :

1) si $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ (i.e. $L_1 = L_2$), le semi-groupe de convolution ν_t de g.i. A est absolument continu par rapport à la mesure de Haar de L_1, avec une densité de classe C^∞.

2) si $\mathcal{L}_1 \neq \mathcal{L}_2$, nous avons $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \oplus \mathbb{R}\ Z_0$ et par suite, puisque N^b est nilpotent simplement connexe, L_1 est un produit

semi-direct de L_2 par $(\mathbb{R},+)$. Le semi-groupe de convolution ν_t de g.i. A s'écrit alors $\nu_t = \mu_t \otimes \epsilon_t$, où μ_t est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de L_2 avec une densité de classe C^∞.

Posons $I = \{i \in \{1,\ldots,p\} : dg\, x_i = 1\}$. Dans le cas où la matrice carrée $((L_\lambda\, x_i\, x_j))_{i,j\in I}$ est définie positive, la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{L}(N^b)$ engendrée par $Z_1,\ldots,Z_s$ est égale à celle engendrée par les D_i, $i \in I$. $\mathcal{L}_1(A)$ est alors la sous-algèbre de $\mathcal{L}(N^b)$ engendrée par Z_0 et les D_i, $i \in I$; $\mathcal{L}_2(A)$ est l'idéal de $\mathcal{L}_1(A)$ formé par les éléments de $\mathcal{L}_1$ de la forme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i D_i + Y \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad Y \in [\mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_1] \ .$$

(2.14) <u>Lemme</u>.

Soit (G,λ) vérifiant les hypothèses de (2.1). Supposons en outre que $\ell(\lambda) \geq 2$. Désignons par G_λ le sous-groupe fermé de G engendré par le support de λ et par a un élément de N vérifiant la relation (*) du corollaire (2.8).

Alors si la matrice $((L_\lambda\, x_i\, x_j))_{i,j\in I}$ n'est pas définie positive, nous avons, (en identifiant N et K à des sous-groupes de G)

$$G_\lambda \subset N_0(aka^{-1})$$

où N_0 est d'une part un sous-groupe fermé propre de N, distingué dans G, contenant le groupe dérivé de N, et d'autre part un sous-espace vectoriel propre de N.

<u>Preuve</u> : D'après le corollaire (2.8), la matrice considérée n'est

pas définie positive si et seulement s'il existe une forme linéaire non nulle A sur N, de degré 1, telle que :

(1) pour $\lambda(a)$ -presque tout élément g de G, $A \circ \pi_1(kg) = 0$ $\forall k \in K$

Soit $N_0 = \{u \in N : A \circ \pi_1(ku) = 0 \quad \forall k \in K\}$. N_0 est un sous-groupe propre de N, distingué dans G et contenant le groupe dérivé de N ; en outre N_0 est un sous-espace vectoriel propre de N.

De (1), il résulte alors que $a^{-1}G_\lambda\, a \subset N_0K$; c'est-à-dire $G_\lambda \subset N_0\,(a\,K\,a^{-1})$.

(2.14) Pour $k \in K$ et $u \in N$, définissons

$$\eta^b(k)(u) = \lim_{t\to+\infty} U_t(\eta(k)(U_{1/t}(u))) ,$$

On voit facilement que cette limite existe et que l'on a,

$$\eta^b(k)(e_i) = \sum_{\{j;\mathrm{dg}\, x_j=\mathrm{dg}\, x_i\}} x_j(\eta(k)(e_i))e_j \quad , \quad \forall i \in \{1,\dots,p\} .$$

D'où l'on déduit que η^b est un homomorphisme continu de K dans le groupe des automorphismes de N^b.

Nous notons $G^b = N^b \times_{\eta^b} K$ le produit semi-direct du groupe de Lie nilpotent simplement connexe N^b par le groupe compact K associé à η^b. Le produit $\cdot$ de deux éléments (u,k) et (v,h) de G^b est défini par

$$(u,k)\cdot(v,h) = \lim_{t\to+\infty} U_t(U_{1/t}\,(u,k)\; U_{1/t}(v,h)) .$$

Pour tout $t > 0$, U_t^b est un automorphisme de G^b.

Pour toute mesure de probabilité μ sur $N \times K$, désignons par Q_μ^b l'opérateur de transition sur N^b, identifié à G^b/K, associé à μ (voir (1.3)).

Alors, nous avons :

(2.15) <u>Lemme</u> :

Soit $(G = N \times_\eta K\ ,\ \lambda)$ vérifiant les hypothèses de (2.1). Choisissons une base b de N et notons $G^b = N^b \times_{\eta^b} K$ le groupe associé à cette base par le procédé ci-dessus.

Alors, pour toute fonction polynome T sur N de degré $\leq \ell(\lambda)$, les limites des fonctions polynomes $\frac{1}{n^{dgT/2}} Q_\lambda^n\, T$ et $\frac{1}{n^{dgT/2}} (Q_\lambda^b)^n\, T$ sont les mêmes .

<u>Preuve</u> : Soit μ une mesure de probabilité sur N . D'après (2.10), on voit facilement que, pour tout élément T de $\mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N]$,

$$dg(Q_\mu^b - Q_\mu)T \leq dgT - 2$$

et même

$$dg(Q_\mu^b - Q_\mu)T \leq dgT - 3\ ,$$

si $\int_N A(u)\ \mu(du) = 0$, pour toute forme linéaire A sur N de degré 1 .

D'autre part, pour tout $k \in K$, nous avons $dg(T \circ \eta(k) - T \circ \eta^b(k)) \leq dgT - 1 \quad \forall T \in C[N]$, d'où pour toute mesure de probabilité μ sur K ,

$$dg(Q_\mu^b - Q_\mu)T \leq dgT - 1 \quad ;$$

et par suite

$$dg([I - Q_{\lambda_2}(I - Q_m)]^{-1} - [I - Q_{\lambda_2}^b(I - Q_m^b)]^{-1})T \leq dgT - 1\ .$$

On en déduit alors que,

$$dg(L_\lambda^b - L_\lambda)T \leq dgT - 3 \quad , \quad \forall T \in \mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]\ .$$

Le lemme s'en déduit immédiatement.

(2.16) <u>Remarque</u>.

Désignons par $\lambda^{n\cdot}$ la $n^{\text{ième}}$ convolée de λ dans G^b. Du lemme (2.15), du corollaire (2.8) et du théorème (2.12), il résulte alors que les suites de mesures de probabilités,
$U_n^b \circ \pi_1(\lambda^n) = \pi_1 \circ U_n^b(\lambda^n)$, $U_n^b \circ \pi_1(\lambda^{n\cdot}) = \pi_1([U_n^b(\lambda)]^{n\cdot})$,
$U_n^b(\overline{\lambda(a)}^n)$ et $U_n^b(\overline{\lambda(a)}^{n\cdot}) = [U_n^b(\overline{\lambda(a)})]^{n\cdot}$, convergent vaguement vers la même mesure de probabilité, pour tout élément a de N vérifiant la condition (*) du corollaire (2.8).

En particulier, lorsque $\lambda = \lambda_1 \otimes \lambda_2$ ou $\int_N A(u)\lambda_1(du) = 0$, pour toute forme linéaire sur N de degré 1 ,

$U_n^b \circ \pi_1(\lambda^n)$, $\pi_1([U_n^b(\lambda)]^{n\cdot})$, $U_n^b(\overline{\lambda}^n)$ et $[U_n^b(\overline{\lambda})]^{n\cdot}$,

convergent vaguement vers la même mesure de probabilité.

3. Démonstration de la proposition (2.6)

Soit μ une mesure de probabilité sur G . Q_μ opère sur $\mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N]$; nous notons $\Delta(\mu)$ l'ensemble des valeurs propres de Q_μ et pour $\alpha \in \Delta(\mu)$, nous posons

$$F_\alpha(\mu) = \{T \in \mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N] : \exists\ k \in \mathbb{N}\ ,\ (Q_\mu - \alpha I)^k T = 0\}\ ,$$

$$E_\alpha(\mu) = \{T \in \mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N] : Q_\mu T = \alpha T\}\ ;$$

nous avons

$$\mathbb{C}_{\ell(\mu)}[N] = \bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mu)} F_\alpha(\mu)$$

(3.1) Lemme :

Soit μ une mesure de probabilité sur G , portée par K . Alors

a) Tout élément de $\Delta(\mu)$ est de module ≤ 1

b) Si $\alpha \in \Delta(\mu)$ avec $|\alpha| = 1$, nous avons

$$T \in F_\alpha(\mu) \iff T \in E_\alpha(\mu) \iff Q_k T = \alpha T\ ,\quad \forall k \in S(\mu)\ .$$

c) $$\bigoplus_{\alpha \in \Delta(\mu) - \{1\}} F_\alpha(\mu) = E_0(m)\ ,\quad F_1(\mu) = E_1(m)$$

$$\bigoplus_{\{\alpha \in \Delta(\mu) : |\alpha| < 1\}} F_\alpha(\mu) = E_0(\tilde{m})\ ,\quad \bigoplus_{\{\alpha \in \Delta(\mu) : |\alpha| = 1\}} F_\alpha(\mu) = E_1(\tilde{m})$$

où $S(\mu)$ désigne le support de μ , m(resp $\tilde{m}$) la mesure de Haar normalisée du sous-groupe fermé $K(\mu)$ (resp. $\tilde{K}(\mu)$) engendré par $S(\mu)$ (resp. par $S(\mu)[S(\mu)]^{-1}$).

Preuve du lemme (3.1) :

Soit $(\, , \,)$ un produit scalaire quelconque sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[N]$; en posant

$<T,T'> = \int_K (Q_k T, Q_k T')dk \quad (T,T' \in \mathbb{C}[N])$, nous obtenons un produit scalaire sur $\mathbb{C}[N]$, pour lequel les opérateurs Q_k , $k \in K$, sont unitaires (i.e. $||Q_kT||^2 = <Q_kT,Q_kT> = <T,T> = ||T||^2$,

$\forall T \in \mathbb{C}[N]$).

Soit T un élément de $\mathbb{C}[N]$, nous avons

$$Q_\mu T = \int_K Q_k T \, \mu(dk) \; ;$$

comme dans l'espace de Hilbert de dimension finie $(\mathbb{C}_{dgT}[N], < \, , \, >)$ toute sphère de centre 0 est strictement convexe, il s'ensuit que

$$||Q_\nu T|| < ||T||,$$

à moins que $Q_k T = T_0$, $\forall k \in S(\mu)$, avec $||T_0|| = ||T||$.

L'affirmation a) du lemme s'en déduit immédiatement.

Soit $T \in F_\alpha(\mu)$. Des relations

$$Q_{\tilde{m}} Q_\mu = Q_\mu Q_{\tilde{m}} = Q_{\tilde{m}} Q_k = Q_k Q_{\tilde{m}} \quad ,$$

vérifiées pour tout élément k de $S(\mu)$, il résulte que les fonctions polynômes $Q_{\tilde{m}}T$ et $(I - Q_{\tilde{m}})T$ appartiennent respectivement à $F_\alpha(\varepsilon_k) = E_\alpha(\varepsilon_k)$ et $F_\alpha(\mu)$. Si $|\alpha| < 1$, nous avons $E_\alpha(\varepsilon_k) = 0$ car Q_k est unitaire ; par suite $Q_{\tilde{m}}T = 0$. Supposons que $|\alpha| = 1$ et désignons par ℓ le plus petit entier tel que $(Q_\mu - \alpha I)^\ell (I - Q_{\tilde{m}})T = 0$. Si $\ell \geq 1$, le polynôme $T' = (Q_\mu - \alpha I)^{\ell-1}(I - Q_{\tilde{m}})T$ appartient à $E_\alpha(\mu)$, d'après ce qui précède nous avons alors $Q_k T' = \alpha T' \quad \forall k \in S(\mu)$; d'où $(I - Q_{\tilde{m}})T' = T' = 0$. Il s'ensuit donc que $\ell = 0$; c'est-à-dire $Q_k T = T \quad \forall k \in \tilde{K}(\mu)$. Comme nous savons en outre que $Q_{\tilde{m}} T$ (qui est égal à T) appartient à $E_\alpha(\varepsilon_k)$, l'affirmation b) ainsi que les deux dernières égalités de c) sont prouvées .

Enfin si $T \in F_\alpha(\mu)$, nous avons $(Q_\mu - \alpha I)^\ell T = 0$, pour un certain entier ℓ . D'où $(1-\alpha)^\ell Q_m T = 0$ et $Q_m T = 0$ si $\alpha \neq 1$. Si $T \in F_1(\mu)$, d'après b) nous avons $Q_k T = T$, $\forall k \in S(\mu)$, et par suite $Q_m T = T$. Le lemme est ainsi démontré .

Pour simplifier l'écriture , nous notons Q (resp. P) l'opérateur Q_λ (resp. Q_{λ_2}) . Si $r \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^r$, nous notons $\alpha_1, \ldots,$ α_r les composantes de α et nous posons $||\alpha|| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$. D'autre part , si $t \in \mathbb{R}_+$, nous désignons par $[t]$ la partie entière de t .

D'après le lemme (2.4) , nous avons $dg(Q - P)T \leq dgT - 1$ $\forall\, T \in \mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$; par suite en écrivant $Q = (Q - P) + P$, nous avons

$$\frac{1}{n^{dgT/2}} Q^n T = \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{j=0}^{dgT} \sum_{\{\alpha \in \{0,\ldots,n-j\}^{j+1} : ||\alpha|| = n-j\}} P^{\alpha_1}(Q-P)P^{\alpha_2}\ldots(Q-P)P^{\alpha_{j+1}}T$$

Posons

$$R_0^0 = I - Q_m \quad , \quad R_0 = (I - Q_m)\, P\, (I - Q_m) \ ,$$
$$R_1^0 = R_1 = Q_m \quad \text{et} \quad P^0 = Q^0 = I \ ;$$

pour tout entier naturel p , nous avons

$$Q^p = R_0^p + R_1^p \quad , \quad R_0^p = (I - Q_m)\, P^p\, (I - Q_m) \quad \text{et} \quad R_1^p = Q_m \ .$$

$\frac{1}{n^{dgT/2}} Q^n T$ s'écrit alors $\displaystyle\sum_{j=0}^{dgT} \sum_{i \in \{0,1\}^{j+1}} \gamma_n(j,i)$,

où $\displaystyle\gamma_n(j,i) = \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{\{\alpha \in \{0,\ldots,n-j\}^{j+1} : ||\alpha|| = n-j\}} \phi(j,i,\alpha)$

avec $\phi(j,i,\alpha) = R_{i_1}^{\alpha_1}(Q - P)R_{i_2}^{\alpha_2}\ldots(Q - P)R_{i_{j+1}}^{\alpha_{j+1}}T$.

3.2 Lemme.

Soient $j \in \{0,\dots,dgT\}$ et $i \in \{0,1\}^{j+1}$ avec $||i|| \leq [(dgT + 1) / 2]$. Alors la suite de fonctions polynomes $\gamma_n(j,i)$ converge vers zéro, uniformément sur tout compact.

Preuve. Notons $\sigma(1),\dots,\sigma(s)$, (resp. $\sigma(s+1),\dots,\sigma(j+1)$), avec $s \leq [(dgT + 1)/2]$, les entiers ℓ de $\{1,\dots,j+1\}$ tels que $i_\ell = 1$ (resp. $i_\ell = 0$). Nous avons

$$\gamma_n(j,i) = \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{0\leq\alpha_{\sigma(s+1)},\dots,\alpha_{\sigma(j+1)}\leq n-j} \xi^{(s)}_{n-j-(\alpha_{\sigma(s+1)}+\dots+\alpha_{\sigma(j+1)})} \phi(j,i,\hat{\alpha})$$

où, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{N}^*$, $\xi_\ell(s) = \text{card}\,\{\beta \in \mathbb{N}^s : ||\beta|| = \ell\}$ et $\hat{\alpha}$ est l'élément de $\mathbb{N}^{j+1}$ qui se déduit de α en remplaçant les composantes $\alpha_{\sigma(i)}$, $i \in \{1,\dots,s\}$, par zéro.

D'après le lemme (3.1), les valeurs propres de l'opérateur R_0 sont de module ≤ 1 et différentes de 1 ; il s'ensuit que la suite d'opérateurs de $\mathbb{C}[N]$, $\{\sum_{p=0}^{n} R_0^p\}_{n\geq 1}$, est bornée. D'autre part pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ et tout $s \in \mathbb{N}^*$, $\xi_\ell(s)$ est un polynome de degré $(s-1)$ en ℓ dont le terme de plus haut degré est $\ell^{s-1}/(s-1)!$. Le lemme (3.2) est alors clair.

3.3 Lemme

Soient $j \in \{0,\dots,dgT\}$ et $i \in \{0,1\}^{j+1}$ avec $||i|| \geq [(dgT + 1) / 2] + 1$. Alors $\gamma_n(j,i)$ est une constante qui est non nulle seulement si dgT est pair, $||i|| = dgT/2 + 1$, $i_1 = i_{j+1} = 1$ et i ne possède pas deux composantes nulles consécutives.

Preuve. Désignons par $N(i)$ le nombre de couples (i_k,i_{k+1}), $0\leq k\leq j$, égaux à $(1,1)$; nous avons

$$N(i) = \sum_{1\leq k\leq j} [(i_k+i_{k+1})/2] \geq 2\,||i|| - j - 2 .$$

Comme l'opérateur $R_1(Q - P)R_1 = Q_m(Q_{\bar{\lambda}} - I)Q_m$ baisse le degré de tout polynome de $\mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$ de deux unités, nous avons, pour tout

$\alpha \in \{0,\dots,n-j\}^{j+1}$,

$$dg\ \phi(j,i,\alpha) \le dgT - (j+N(i))$$
$$\le dgT - 2||i|| + 2$$

qui montre que $\phi(j,i,\alpha)$ est une constante qui est non nulle seulement si dgT est pair , $||i|| = dgT/2 + 1$ et $N(i) = 2||i|| - j - 2$
Le lemme (3.3) s'en déduit immédiatement .

Des lemmes (3.2) et (3.3) , il résulte que si dgT est impair la suite de fonctions polynomes $\{\frac{1}{n^{dgT/2}} Q^n T\}_{n\ge 1}$ converge , uniformément sur tout compact , vers zéro.

Supposons que dgT soit pair . Pour tout entier k , notons S^k (resp. V , V^0) l'opérateur $Q_m(Q - I)R_0^k(Q - I)Q_m$ (resp. $Q_m(Q - I)Q_m$, I) . Des lemmes (3.2) et (3.3) , il résulte que $\frac{1}{n^{dgT/2}} Q^n T$ s'écrit $\delta_1(n) + \delta_2(n)$, où $\delta_1(n)$ est une suite de fonctions polynomes convergeant , uniformément sur tout compact , vers zéro et

$$\delta_2(n) = \sum_{s=1}^{dgT/2} \sum_{\{\beta\in\mathbb{N}^{s+1} : ||\beta|| = dgT/2 - s\}} \psi_n(s,\beta)$$

avec

$$\psi_n(s,\beta) = \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{\{\alpha\in\mathbb{N}^s : ||\alpha|| \le n-(s+dgT/2)\}} \xi_{n-||\ell||}(dgT/2)$$
$$V^{\beta_1}S^{\alpha_1}V^{\beta_2}\dots V^{\beta_s}S^{\alpha_s}V^{\beta_{s+1}}T .$$

Désignons par $a_1,\dots,a_q$ les différentes valeurs propres de P de module 1 et distinctes de 1 . Nous avons (lemme (3.1))

$$R_0 = (I - Q_m)P(I - Q_m) = (I - Q_{\tilde{m}})P(I - Q_{\tilde{m}}) + \sum_{i=1}^{q} a_i \Pi_i$$

où Π_i désigne la projection de $C[N]$ sur $F_{a_i}(\lambda_2) = E_{a_i}(\lambda_2)$; et par suite , pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$,

$$R_0^k = (I - Q_{\tilde{m}})P^k(I - Q_{\tilde{m}}) + \sum_{i=1}^{q} a_i^k \Pi_i \quad .$$

Pour tout entier naturel k , nous posons

$$S_0^k = Q_m(Q - I)(I - Q_{\tilde{m}})P^k(I - Q_{\tilde{m}})(Q - I)Q_m$$

$$S_i^k = a_i^k \, Q_m(Q - I)\Pi_i(Q - I)Q_m \ , \quad 1 \le i \le q \ .$$

Soient $s \in \{0,\ldots,dgT/2\}$ et $\beta \in \mathbb{N}^{s+1}$ avec $||\beta|| = dgT/2 - s$. Nous avons

$$\psi_n(s,\beta) = \sum_{j \in \{0,\ldots,q\}^s} \zeta_n(s,\beta,j) \ ,$$

avec

$$\zeta_n(s,\beta,j) = \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{\{\alpha \in \mathbb{N}^s : ||\alpha|| \le n-(s+dgT/2)\}} \xi_{n-||\alpha||}(dgT/2) \; V^{\beta_1} S_{j_1}^{\alpha_1} \ldots V^{\beta_s} S_{j_s}^{\alpha_s} V^{\beta_{s+1}} T$$

$$= \frac{1}{n^{dgT/2}} \sum_{k=0}^{n-(s+dgT/2)} \zeta_{n-k}(dgT/2) \ \eta_k(s,\beta,j)$$

où $\eta_k(s,\beta,j) = \displaystyle\sum_{\{\alpha \in \mathbb{N}^s : ||\alpha|| = k\}} V^{\beta_1} S_{j_1}^{\alpha_1} \ldots V^{\beta_s} S_{j_s}^{\alpha_s} V^{\beta_{s+1}} T$.

En notant que

$$(I - P(I - Q_m))^{-1} = Q_m + \sum_{l \ge 0} (I - Q_{\underset{\sim}{m}}) P^l (I - Q_{\underset{\sim}{m}}) + \sum_{i=1}^{q} \Pi_i \ / \ (1-a_i) \ ,$$

la proposition (2.6) résulte alors du lemme suivant :

3.4 Lemme

Soient p et q deux entiers ≥ 1 ; $x_1,\ldots,x_q$ des nombres complexes différents de 1 et de modules 1 ; u une fonction réelle de N^p telle que $\sum_{l \in \mathbb{N}^p} u(l) < +\infty$. Alors , pour tout entier $r \ge 1$,

$$\lim_n \frac{1}{n^r} \sum_{k=0} \xi_{n-k}(r) \sum_{\{l \in \mathbb{N}^{p+q} : ||l|| = k\}} x_1^{l_1} \ldots x_q^{l_q} \ u(l_{q+1},\ldots,l_{p+q})$$

$$= \frac{1}{1-x_1} \ldots \frac{1}{1-x_q} \frac{1}{r!} \sum_{l \in \mathbb{N}^p} u(l) \ ;$$

$$\lim_n \frac{1}{n^r} \sum_{k=0} \xi_{n-k}(r) \sum_{\{l \in \mathbb{N}^p : ||l|| = k\}} x_1^{l_1} \ldots x_q^{l_q} = \frac{1}{r!} \frac{1}{1-x_1} \ldots \frac{1}{1-x_q}$$

$$\lim_n \frac{1}{n^r} \sum_{k=0} \xi_{n-k}(r) \sum_{\{l \in \mathbb{N}^p : ||l|| = k\}} u(l_1,\ldots,l_p) = \frac{1}{r!} \sum_{l \in \mathbb{N}^p} u(l) \ .$$

Preuve. Posons

$$\beta(k) = \sum_{\{l \in \mathbb{N}^{p+q} : ||l|| = k\}} x_1^{l_1} \ldots x_q^{l_q} \ u(l_{q+1},\ldots,l_{p+q}) \ ;$$

nous avons $\beta(k) = \sum_{s=0}^{k} \sigma(s)\,\tau(k-s)$, en posant , pour tout entier s ,

$$\sigma(s) = \sum_{\{l \in \mathbb{N}^p : ||l|| = s\}} u(l) \quad \text{et} \quad \tau(s) = \sum_{\{l \in \mathbb{N}^q : ||l|| = s\}} x_1^{l_1} \cdots x_q^{l_q} \; .$$

Considérons le polynome $Q(x) = \prod_{i=1}^{q} (1 - xx_i)$; il est facile de voir que

$$\tau(s) = \sum_{i=1}^{q} x_i^{s+1}/Q'(1/x_i) \quad \text{et par suite}$$

$$\beta(k) = \sum_{i=1}^{q} (x_i/Q'(1/x_i)) \sum_{s=0}^{k} \sigma(s)\, x_i^{k-s} \; .$$

D'où

$$\sum_{k>0} \beta(k) = \sum_{i=1}^{q} (x_i/(1-x_i)Q'(1/x_i)) \sum_{s\geq 0} \sigma(s)$$

$$= (1/Q(1)) \sum_{s\geq 0} \sigma(s) \; .$$

Le lemme (3.4) résulte alors du lemme élémentaire suivant.

3.5 <u>Lemme</u>

Soient x un nombre complexe différent de 1 , de module 1 et $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ une série convergente . Alors , pour tout entier $r > 0$,

$$\lim_n \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (n-k)^r x^k = \frac{1}{r!} \frac{1}{1-x}$$

$$\lim_n \frac{1}{n^r} \sum_{k=0}^{n} (n-k)^r \beta_k = \frac{1}{r!} \sum_{k\geq 0} \beta_k \; .$$

4. Démonstration du théorème (2.12)

Nous posons $r = \sup\{dg\ x_i\ ,\ 1 \leq i \leq p\}$; r est indépendant du choix du système de fonctions coordonnées $\{x_i\}_{1 \leq i \leq p}$ de l'e.v. N Pour faciliter la lecture, nous distinguons deux cas.

1er cas

Nous supposons que λ vérifie, outre l'hypothèse iii) de (2.1), la condition $m(\lambda) \geq 2 \sup(r,2)$. [On notera que d'après l'inégalité de Hölder, cette dernière hypothèse entraîne la condition (*) de (2.11)] .

La démonstration du théorème se fait en trois étapes.

1ère étape . Elle est suggérée par la remarque (2.14).

Pour prouver le théorème (2.12), nous pouvons supposer que pour tout $t > 0$, U_t^b est un automorphisme de G (i.e. $G = G^b$, voir (2.14)). En effet, nous avons :

(4.1) Proposition :

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, à valeurs dans $N \times K$, et de loi commune λ . Alors la suite de v.a.

$$\Delta_n = U_n^b \circ \pi_1(X_1 \ldots X_n) - U_n^b \circ \pi_1(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)$$

converge vers zéro dans L^2 .

Preuve de la proposition (4.1) :

Désignons par M le produit direct des groupes de Lie nilpotent simplement connexe N et N^b ; par $\eta \otimes \eta^b$ l'homomorphisme de K dans le groupe des automorphismes de M défini par

$[\eta \otimes \eta^b(k)](u,v) = (\eta(k)(u) \ , \ \eta^b(k)(v)) \quad , \quad (u,v) \in N \times N^b \quad ;$

et par $H = M \times_{\eta\otimes\eta^b} K$ le produit semi-direct de M par K associé à $\eta \otimes \eta^b$.

Si μ est une mesure de probabilité sur $N \times N \times K$, nous notons $\underset{\sim}{Q}_\mu$ l'opérateur de transition sur M , identifié à $H/_K$, associé à μ (voir (1.3)). Soit $X = (Y,U)$ une v.a., à valeurs dans dans $N \times K$, de loi λ; nous notons λ' la loi de la v.a. (Y,Y,U), à valeurs dans $N \times N \times K$.

Avec ces notations, nous avons, pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$,

$$\mathbb{E}[x_i^2(\Delta_n)] = \frac{1}{n^{dg\ xi}} \underset{\sim}{Q}^n_{\lambda'} \ T_i(0) \quad ,$$

où T_i désigne la fonction polynome sur $N \times N$ définie par $T_i(u,v) = (x_i(u) - x_i(v))^2 \quad , \quad u \text{ et } v \in N$.

Nous définissons une notion de degré sur $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[N \times N]$, en attribuant un degré à toute fonction polynome T de $\mathbb{C}[N \times N]$ de la forme $T_1 \otimes T_2$, où T_1 et T_2 sont des éléments de $\mathbb{C}[N]$, (i.e. $T_1 \otimes T_2(u,v) = T_1(u)\ T_2(v)$, $\forall (u,v) \in N \times N)$; le degré de T , noté dgT , est par définition égal à $dgT_1 + dgT_2$. Le couple (H,λ') vérifie alors les hypothèses de (2.1) .

Considérons la base $b \otimes b = \{(e_i,0),(0,e_j),\ 1 \leq i,j \leq p\}$ de $N \times N$. Avec les notations de la remarque (2.14), $M^{b\otimes b}$ est le produit direct de N^b par lui-même et $H^{b\otimes b}$ est le produit semi-direct de $M^{b\otimes b}$ par K associé à $\eta^b \otimes \eta^b$.

Le lemme (2.15), appliqué au couple (H,λ'), nous dit que

$$\lim_n \frac{1}{n^{dgx_i}} \underset{\sim}{Q}^n_{\lambda'} \ T_i = \lim_n \frac{1}{n^{dgx_i}} (\underset{\sim}{Q}^{b\otimes b}_{\lambda'})^n \ T_i \quad , \quad \forall i \in \{1,\dots,p\} ,$$

où $\underset{\sim}{Q}^{b\otimes b}_{\lambda'}$ désigne l'opérateur de transition sur $M^{b\otimes b}$, identifié à

$H^{b\otimes b}/K$, associé à λ' . Or nous avons, pour $u \in N$ et $i \in \{1,\ldots,p\}$

$$(Q^{b\otimes b}_{\lambda'})^n \; T_i(u) = \mathbf{E}\left[[x_i \circ \pi_1(X_1\cdot\ldots\cdot X_n\cdot(u,e)) - x_i \circ \pi_1(X_1\cdot\ldots\cdot X_n\cdot(u,e))]^2\right] = 0$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_n \frac{1}{n^{dgx_i}} Q^n_{\lambda'} \, T_i = 0$ et la proposition (4.1) est prouvée.

<u>2è étape</u>. Nous supposons donc que $\forall t > 0$, U^b_t est un automorphisme de G .

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes, à valeurs dans $N \times K$, de loi commune λ . Nous posons, pour tout entier naturel $n\geq 1$,

$$S_n(0) = 0$$

$$S_n(\tfrac{k}{n}) = \pi_1 \circ U_n(X_1\ldots X_k) = \pi_1(U_n(X_1)\ldots U_n(X_n)) \quad , \; \forall k \in \{1,\ldots,n\};$$

puis

$$S_n(t) = (1-\{nt\}) \, S_n(\tfrac{[nt]}{n}) + \{nt\} \, S_n(\tfrac{[nt]+1}{n}) \quad , \; \forall t \in [0,1] \; ,$$

où $[nt]$ désigne la partie entière de nt et $\{nt\} = nt - [nt]$.

Pour tout $u \in N$, nous posons $||u||^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2(u)$.

(4.2) <u>Proposition</u>.

Pour tous réels s et t de $[0,1]$,

$$\mathbf{E}\left[||S_n(t) - S_n(s)||^2\right] \leq C \, |t - s| \quad ,$$

où C est une constante > 0 indépendante de n , t et s .

<u>Preuve de la proposition</u> (4.2) -

Nous commençons par prouver qu'il suffit de montrer la proposition pour des réels s et t de la forme $\frac{k}{n}$ avec $k \in \{0,\dots,n\}$.

Admettons donc un instant que la proposition soit vraie pour les réels de cette forme et considérons deux réels s et t de $[0,1]$ vérifiant $s < t$.

Nous avons

$$S_n(t) - S_n(s) = \{nt\}u + v + (1 - \{ns\})\, w ,$$

avec

$$u = S_n\left(\frac{[nt]+1}{n}\right) - S_n\left(\frac{[nt]}{n}\right) ,$$

$$v = S_n\left(\frac{[nt]}{n}\right) - S_n\left(\frac{[ns]+1}{n}\right) ,$$

et

$$w = S_n\left(\frac{[ns]+1}{n}\right) - S_n\left(\frac{[ns]}{n}\right) .$$

De la relation

$$||ax + by + cz||^2 \leq (a + b + c)(a||x||^2 + b||y||^2 + c||z||^2) , \quad a,b,c>0 , \quad x,y,z\in N ,$$

il résulte que l'on a

$$\mathbf{E}\left[||S_n(t) - S_n(s)||^2\right] \leq \frac{3C}{n}(\{nt\} + \left|[nt] - [ns] - 1\right| + 1 - \{ns\}) .$$

D'où

$$\mathbf{E}\left[||S_n(t) - S_n(s)||^2\right] \leq 3C(t - s) , \quad \text{si} \quad [nt] - [ns] \geq 1 .$$

Si $[nt] = [ns]$, nous avons

$$S_n(t) - S_n(s) = n(t-s)\left(S_n\left(\frac{[nt]+1}{n}\right) - S_n\left(\frac{[nt]}{n}\right)\right)$$

et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[||S_n(t) - S_n(s)||^2\right] &\leq C\, n(t-s)^2 \\ &\leq C\, (t-s)\end{aligned}$$

car $[nt] = [ns]$ implique que $n(t-s) \leq 1$.

Ceci dit soient k et ℓ deux entiers de $\{0,\dots,n\}$ tels que $\ell < k$. Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$, posons

$$T_i(u,v) = x_i(uv) - x_i(u) \quad , \quad (u,v \in N) \quad ;$$

nous avons

$$T_i(u,v) = x_i(v) + P_i(u,v) \quad ,$$

avec $dg\, P_i \leq dg\, x_i$, $\mathrm{val}\, P_i/u$ et $\mathrm{val}\, P_i/v \geq 1$.

Par suite

$$\mathbb{E}\left[[x_i(S_n(\tfrac{k}{n}) - S_n(\tfrac{\ell}{n}))]^2\right] = \mathbb{E}\Big[[x_i([S_n(\tfrac{\ell}{n})]^{-1}\, S_n(\tfrac{k}{n})) +$$
$$+ P_i(S_n(\tfrac{\ell}{n}), [S_n(\tfrac{\ell}{n})]^{-1}\, S_n(\tfrac{k}{n}))]^2\Big] .$$

Or $[S_n(\frac{\ell}{n})]^{-1}\, S_n(\frac{k}{n})$ s'écrit $\eta \circ \pi_2(X_1 \dots X_\ell)(\Sigma_{\ell,k}(n))$,

où $\Sigma_{\ell,k}(n)$ est une v.a. indépendante de $S_n(\frac{\ell}{n})$ et ayant la même loi que $S_n(\frac{k-\ell}{n})$. La proposition (4.2) résulte alors du lemme suivant.

(4.3) Lemme.

Pour tout élément T de $\mathbb{C}_{\ell(\lambda)}[N]$ de la forme $x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p}$, où $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{N}$, et pour tout élément k de $\{0,\dots,n\}$, nous avons

$$\left|\mathbb{E}[T(S_n(\tfrac{k}{n}))]\right| \leq C(T)\ (\tfrac{k}{n})^{dgT/2}$$

où $C(T)$ est une constante > 0 indépendante de k et n .

Preuve du lemme (4.3).

Nous avons

$$E[T(S_n(\tfrac{k}{n}))] = \frac{1}{n^{dgT/2}} Q_\lambda^k\, T\ (0)$$

$$= (\tfrac{k}{n})^{dgT/2} \left(\frac{1}{k^{dgT/2}} Q_\lambda^k\, T\ (0)\right) .$$

D'après la proposition (2.6), la suite $\frac{1}{k^{dgT/2}} Q_\lambda^k\, T\ (0)$ est convergente. Le lemme est ainsi prouvé.

(4.4) De la proposition (4.2), il résulte que le processus $S_n(t)$ vérifie les hypothèses du corollaire 1 du chapitre I, sec. 6 de [8] Désignons par $\mathcal{B}([0,1])$ la tribu des boréliens de $[0,1]$ et par ρ la mesure de Lebesgue de $[0,1]$. Nous savons alors que pour toute suite d'entiers, on peut extraire une sous-suite $\{n_k\}_{k\geq 1}$ pour laquelle il est possible de construire des processus $x_{n_k}(t,\omega')$ et $x_\infty(t,\omega')$ sur l'espace probabilisé $(\Omega' = [0,1], \mathcal{B}([0,1])\ , \rho)$ tels que

i) pour tout entier ℓ et tous réels $t_1,\ldots,t_\ell$, $(x_{n_k}(t_1),\ldots,x_{n_k}(t_\ell))$ et $(S_{n_k}(t_1),\ldots,S_{n_k}(t_\ell))$ ont même loi, pour tout entier k .

ii) pour tout $t \in [0,1]$, $x_{n_k}(t)$ converge en probabilité vers $x_\infty(t)$, quand k tend vers l'infini .

<u>3ème étape</u>. Désignons par $\{n_k\}_{k\geq 1}$ une suite d'entiers pour laquelle il est possible de construire des processus $x_{n_t}(t)$ et $x_\infty(t)$ ayant les propriétés i) et ii) de (4.4). Alors le processus $x_\infty(t)$ vérifie la proposition suivante :

(4.5) <u>Proposition</u>.

Pour toute fonction sur N , de classe C^2 , à support compact,

$\mathbb{E}_\rho[f(x_\infty(t))] = f(0) + \int_0^t \mathbb{E}_\rho[Af(x_\infty(s))]ds$, $\forall t \in [0,1]$, où $\mathbb{E}_\rho$ désigne l'espérance associée à la mesure ρ.

Preuve de la proposition (4.5).

En posant $S'_k(t) = S_{n_k}(t)$ et $x'_k(t) = x_{n_k}(t)$, on se ramène au cas où $\{n_k\}_{k\geq 1}$ est la suite des entiers naturels. Pour alléger l'écriture, nous nous plaçons donc dans cette situation.

Pour toute fonction f sur N , de classe C^1, à support compact, et pour tout élément v de N , nous posons

$$D_v f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u(tv)) - f(u)}{t} \quad , \quad (u \in N)$$

Nous avons

$$D_v f = \sum_{i=1}^{p} x_i(v)\, D_i f \quad , \quad \text{où} \quad D_i = D_{e_i} \; , \quad i \in \{1,\dots,p\} \; ;$$

et (formule de Taylor), pour tous $u,v \in N$, il existe $\theta \in \,]0,1[$ tel que

$$f(u\,v) = f(u) + D_v f(u) + \frac{1}{2} D_v^2 f(u(\theta v)) \; .$$

Choisissons une partition $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_q = t$ de $[0,t]$ et écrivons, pour tout entier naturel n ,

$$f(S_n(t)) - f(0) = f(S_n(t)) - f(S_n(\tfrac{[nt]}{n})) + \sum_{j=1}^{q} \{ f(S_n(\tfrac{[nt_j]}{n})) - f(S_n(\tfrac{[nt_{j-1}]}{n})) \}.$$

D'après la proposition (4.2), il est clair que

$$\lim_n \left| \mathbb{E}[f(S_n(t)) - f(S_n(\tfrac{[nt]}{n}))] \right| = 0 \; .$$

Posons $\sum_j(n) = [S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})]^{-1} S_n(\frac{[nt_j]}{n})$, $j \in \{1,\dots q\}$;

$\sum_j(n)$ s'écrit $\eta \circ \pi_2(X_1 \dots X_{[nt_{j-1}]})(\sum'_j(n))$ où $\sum'_j(n)$ est une v.a.

indépendante de $S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})$ et de même loi que $S_n(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n})$

D'après la formule de Taylor, nous avons

$$f(S_n(\frac{[nt_j]}{n})) - f(S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})) = \alpha_j(n) + \frac{1}{2}\beta_j(n) \quad ,$$

avec

$$\alpha_j(n) = \sum_{i=1}^{p} x_i(\Sigma_j(n))\, D_i f(S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})) + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,\ell\leq p} x_i(\Sigma_j(n)), x_\ell(\Sigma_j(n))\, D_i D_\ell f(S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n}))$$

et

$$\beta_j(n) = \sum_{1\leq i,\ell\leq p} x_i(\Sigma_j(n)) x_\ell(\Sigma_j(n)) \Big[D_i D_\ell f[S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})(\theta\Sigma_j(n))] - D_i D_\ell f[S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})] \Big]$$

D'après le lemme (1.5), via la proposition (4.2), les v.a. $\Sigma_j(n)$ et $S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})$ sont asymptotiquement indépendantes. Compte tenu de la proposition (2.6), nous avons alors

$$(1) \quad \lim_n \mathbb{E}[\alpha_j(n)] = \sum_{\{i\in\{1,\dots,p\}:dgx_i \text{ pair}\}} \gamma_i (t_j - t_{j-1})^{dgx_i/2}\, \mathbb{E}_\rho[D_i f(x_\infty(t_{j-1}))]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\{1\leq i,\ell\leq p: dgx_i x_\ell \text{ pair}\}} \sigma_{i,\ell}\, (t_j - t_{j-1})^{dgx_i x_\ell/2}\, \mathbb{E}_\rho[D_i D_\ell f(x_\infty(t_{j-1}))] \quad ,$$

où $\gamma_i = \frac{1}{(dgx_i/2)!} L_\lambda^{dgx_i/2} x_i$ et $\sigma_{i,\ell} = \frac{1}{(dgx_i x_\ell/2)!} L_\lambda^{dgx_i x_\ell/2} x_i x_\ell$

D'autre part, pour $i,\ell \in \{1,\dots,p\}$, $j \in \{1,\dots,q\}$, posons,

$$\delta^j_{i,\ell}(n) = \mathbb{E}\Big[x_i(\textstyle\sum_j(n))x_\ell(\sum_j(n)) \ \big[D_iD_\ell f[S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n})(\theta\sum_j(n))] - D_i \ D_\ell f(S_n(\frac{[nt_{j-1}]}{n}))\big]\Big]$$

Pour $dgx_i + dgx_\ell \geq 3$, nous avons, en appliquant l'inégalité de schwartz et le lemme (4.3),

$$|\delta^j_{i,\ell}(n)| \leq \Big[2 \ C_{i,\ell}||D_iD_\ell f||_\infty \sup_{1\leq j\leq q} \Big(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}\Big)^{1/2}\Big]\Big(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}\Big),$$

où $C_{i,\ell}$ est une constante > 0 indépendante de n et de la partition $(t_j)_{1\leq j\leq q}$ de $[0,t]$.

Soient $i,\ell \in \{1,\ldots,p\}$ avec $dgx_i = dgx_\ell = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in N$ vérifiant $||u|| < \alpha$, on ait

$$\sup_{u\in N} |D_i \ D_\ell \ f(u \ v) - D_i \ D_\ell \ f(u)| < \varepsilon$$

Nous avons alors

$$|\delta^j_{i,\ell}(n)| \leq \varepsilon\mathbf{E}\Big[|x_i(\Sigma_j(n))x_\ell(\Sigma_j(n))|\Big] + 2||D_i \ D_\ell \ f||_\infty \ \mathbf{E}\Big[|x_i(\Sigma_j(n)) \ x_\ell(\Sigma_j(n))|1_{\{||\Sigma_j(n)||>\alpha\}}\Big]$$

$$\leq \varepsilon C_{i,\ell} \Big(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}\Big) + 2||D_iD_\ell f||_\infty \sqrt{\mathbb{E}[x_i^2(\Sigma_j(n))x_\ell^2(\Sigma_j(n))]} \ \Big(\frac{\sqrt{\mathbb{E}[||\Sigma_j(n)||^2]}}{\alpha}\Big)$$

$$\leq \Big[\varepsilon C_{i,\ell} + \frac{2||D_iD_\ell f||_\infty}{\alpha} C'_{i,\ell} \sup_{1\leq j\leq q} \Big(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}\Big)^{1/2}\Big]\Big(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n}\Big) ,$$

où $C_{i,\ell}$ et $C'_{i,\ell}$ sont des constantes > 0 indépendantes de n et de la partition $(t_j)_{1\leq j\leq q}$ de $[0,t]$.

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left|\sum_{j=1}^{q} \beta_j(n)\right| \leq \sum_{j=1}^{q} \sum_{1\leq i,\ell\leq p} |\delta^j_{i,\ell}(n)| \leq (C_1+\frac{C_2}{\alpha}) \sup_{1\leq j\leq q} (\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n})^{1/2} + \varepsilon C_3$$

où C_1 , C_2 et C_3 sont des constantes > 0 indépendantes de n et de la partition $(t_j)_{1\leq j\leq q}$ de $[0,t]$.

De l'inégalité

$$(\frac{[nt_j]-[nt_{j-1}]}{n})^{1/2} \leq [(t_j-t_{j-1})+\frac{1}{n}]^{1/2} \leq (t_j-t_{j-1})^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ,$$

il résulte que,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad , \quad \exists\alpha > 0 \ , \ |\sum_{j=1}^{q}\beta_j(n)| \leq \varepsilon C_3 + (C_1 + \frac{C_2}{\alpha})(\sup_{1\leq j\leq q} (t_j- t_{j-1})^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{n}}) .$$

On en déduit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout entier naturel n ,

$$\left|\mathbb{E}[f(S_n(t)) - f(0) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(n)]\right| \leq \left|\mathbb{E}[f(S_n(t)) - f(S_n(\frac{[nt]}{n}))]\right| + \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{p} \beta_i(n)\right|$$

$$\leq \varepsilon C_3 + (C_1+\frac{C_2}{\alpha}) \sup_{1\leq j\leq q} (t_j-t_{j-1})^{1/2} +\delta(n),$$

où $\delta(n)$ est une suite de réels positifs, indépendante de la partition $(t_j)_{1\leq j\leq q}$, convergeant vers zéro et C_1 , C_2 , C_3 sont des réels > 0 indépendants de n et de la partition $(t_j)_{1\leq j\leq q}$ de $[0,t]$.

En faisant tendre n vers l'infini, nous voyons que :

(2) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left|\mathbb{E}[f(x_\infty(t))] - f(0) - \sum_{i=1}^{q} \lim_n \mathbb{E}[\alpha_j(n)]\right| \leq \varepsilon C_3 + (C_1 + \frac{C_2}{\alpha}) \sup_{1\leq j\leq q} (t_j - t_{j-1})^{1/2}$$

D'après la proposition (4.2), pour toute fonction continue h sur N , à support compact, la fonction, $t \to \mathbb{E}[h(x_\infty(t))]$, est continue. De (1) il s'ensuit que, lorsque $\sup_{1\leq j\leq q} (t_j - t_{j-1})$ tend vers zéro, $\lim \sum_{j=1}^{q} E|\alpha_j(n)|$ tend vers $\int_0^t E_\rho[Af(x_\infty(s))]ds$. La proposition (4.5) résulte alors de (2).

Fin de la preuve du théorème.

D'après la proposition(4.2), pour tout $t \in [0,1]$, la suite $\{\mathbb{E}\left[||S_n(t)||^2\right]\}_{n\geq 1}$ est bornée ; l'ensemble des lois des v.a. $\{S_n(t)\}_{n\geq 1}$ est donc relativement compact pour la topologie de la convergence étroite. De (4.4) et de la proposition (4.5), il résulte que la seule valeur d'adhérence de cette famille de probabilité est la loi au temps t du semi-groupe $(\nu_t)_{t>0}$ sur N^b de g.i. A. Il s'ensuit que, pour tout $t \in [0,1]$, $S_n(t)$ converge en loi vers ν_t et la première assertion du théorème est démontrée.

D'autre part, des propositions (4.1) et (4.2) il résulte que pour tout entier naturel p , la v.a.

$$U_n^b \circ \pi_1(X_1 \ldots X_n) - U_n^b \circ \pi_1(X_1 \ldots X_{n-p})$$

converge vers zéro dans L^2 .

On en déduit que la suite d'homéomorphismes $\{U_n^b\}_{n\geq 1}$ de N vérifie les hypothèses de la proposition (1.2). La démonstration du théorème, dans ce premier cas, est donc achevée.

Cas Général

Le passage du cas précédent au cas général se fait par un procédé de troncature analogue à celui utilisé dans [5]. Nous indiquons la marche à suivre, sans entrer dans les détails.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, désignons par α_n l'élément de N défini par :

$$\forall i \in \{1,\dots,p\} \ , \quad x_i(\alpha_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } \deg x_i \geq 2 \\ \dfrac{\int_N x_i(u) \, 1_{\{\phi_b(u) \geq \sqrt{n}\}} \, \overline{\lambda}(du)}{\lambda_1(\{\phi_b > \sqrt{n}\})} & \text{si } \deg x_i = 1 \end{cases}$$

Nous posons alors, pour $g = (u,k) \in N \times K$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$

$$T_n^b(g) = \begin{cases} (u,k) & \text{si } \phi_b(u) \leq \sqrt{n} \\ (\alpha_n,k) & \text{si } \phi_b(u) > \sqrt{n} \end{cases}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la mesure de probabilité $T_n^b(\lambda)$ sur G vérifie l'hypothèse iii) de (2.1) et $\ell(T_n^b(\lambda)) = +\infty$.

Nous avons :

(4.6) Lemme

Avec les notations précédentes,

$$\lim_n \| \lambda^n - [T_n^b(\lambda)]^n \| = 0$$

Preuve : On voit facilement que

$$\| \lambda^n - [T_n^b(\lambda)]^n \| \leq n\lambda(\{\phi_b > \sqrt{n}\}) \leq \int_G \phi_b^2(g) 1_{\{\phi_b > \sqrt{n}\}}(g) \, \lambda(dg) ,$$

qui tend vers zéro, quand n tend vers l'infini.

(4.7) Lemme

Pour toute fonction polynome T sur N, nous avons

$$\lim_n \frac{1}{n^{dgT/2-1}} Q_{T_n^b(\lambda)} T = 0 \quad \text{si} \quad dgT \geq 3$$

$$\lim_n Q_{T_n^b(\lambda)} T = Q_\lambda T \quad \text{si} \quad dgT \leq 2$$

Preuve : voir lemme (4.11) de [5] .

Soit T une fonction polynome sur N . Soit λ une mesure de probabilité sur G vérifiant l'hypothèse iii) de (2.1) et $\ell(\lambda) \geq dgT$. L'expresssion $L_\lambda^{dgT/2} T$ (voir (2.5)), ne dépend de λ que par λ_2 et les moments :

$$\int_N P(u) \, \lambda_1(du) \; , \; \int_N P(u) \, \hat{\lambda}(du) \quad , \quad P \in \mathbb{C}_1[N] \; ;$$

$$\int_N P(u)\ \bar{\lambda}(du) \quad , \quad P \in \mathbb{C}_2[N] \ .$$

Pour toute mesure de probabilité λ sur G vérifiant l'hypothèse iii) de (2.1) et $\ell(\lambda) \geq 2$, nous pouvons donc donner un sens à l'expression $L_\lambda^{dgT/2}T$, pour toute fonction polynome T sur N .

En tenant compte du lemme (4.6) et en procèdant comme pour la preuve de la proposition (2.6), on montre alors la proposition :

(4.8) Proposition.

Soit (G,λ) vérifiant les hypothèses du théorème (2.12) . Alors pour toute fonction polynome T sur N , la suite de fonctions polynomes $\{\frac{1}{n^{dgT/2}} [Q_{T_n^b(\lambda)}]^n T\}_{n\geq 1}$ converge, uniformément sur tout compact de N , vers zéro si dgT est impair, vers la constante $\frac{1}{(dgT/2)!} L_\lambda^{dgT/2}T$ si dgT est pair.

D'après le lemme (4.6), nous sommes amenés, pour prouver le théorème (2.12), à étudier la suite de mesures de probabilité. $\{U_n \circ \pi_1([T_n^b(\lambda^n)]^n)\}_{n\geq 1}$. A l'aide du lemme (4.6) et de la proposition (4.8) on procède alors comme dans le cas étudié précédemment en remplaçant les v.a. $(X_i)_{i\geq 1}$ par les v.a. $(T_n^b(X_i))_{i\geq 1}$.

5. Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe compact

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats de la section 2 pour établir un théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe par un groupe compact.

Définitions et Notations

(5.0) Soit $G = N \times_\eta K$ un produit semi-direct d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N par un groupe compact K.

Pour simplifier l'écriture, nous identifions N et K à des sous-groupes de G ; tout élément g de G s'écrit donc de façon unique $g = uk$ avec $u \in N$ et $k \in K$; N est un sous-groupe distingué de G et, pour tout couple $(u,k) \in N \times K$, $\eta(k)(u)$ s'écrit kuk^{-1}.

D'autre part, nous identifions N à son algèbre de Lie $(N,[\ ,\ ])$ munie du produit $\circ$ défini par la formule de Campbell-Hausdorff (voir (2.1)) ; le produit de deux éléments $g = uk$ et $g' = u'k'$ de G s'écrit donc $gg' = [u(ku'k^{-1})]kk' = [u \circ Adk(u')]kk'$, où pour tout $k \in K$, Adk désigne l'automorphisme d'algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ])$ (et par suite l'automorphisme de groupe de $(N,\circ)$) tangent à l'automorphisme $u \to kuk^{-1}$ de N.

(5.1) Moments d'une mesure de probabilité sur un groupe L.C.D. compactement engendré ([2])

Soit H un groupe localement compact à base dénombrable, compactement engendré. Une application borélienne δ de H dans $\mathbb{R}_+$ est appelé jauge (resp. fonction sous-additive) si elle vérifie.

$\forall g_1, g_2 \in H \quad \delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2) + C \quad (\text{resp } \delta(g_1 g_2) \leq \delta(g_1) + \delta(g_2)),$

où C est une constante > 0 indépendante de g_1 et g_2.

Une jauge δ de H est dite principale s'il existe un voisinage compact V de l'unité engendrant H tel que
$\{x : \delta(x) \leq n\} \subset V^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Sur un groupe L.C.D. compactement engendré, il existe des jauges principales et si δ_0 est l'une d'elles, pour toute autre jauge δ nous avons : $\forall g \in H \quad \delta(g) \leq C_1 \ \delta_0(g) + C_2$
où C_1 et C_2 sont des constantes > 0 indépendantes de $g \in H$.
Il s'ensuit que si μ est une mesure de probabilité sur H, l'expression $\int [\delta_0(g)]^\alpha \ \mu(dg) < +\infty$, pour $\alpha > 0$, est indépendante du choix de δ_0 ; dans ce cas nous disons que μ possède un moment d'ordre α.

(5.2) Moments d'une mesure de probabilité sur G.

Appelons r la longueur de l'algèbre de Lie nilpotente $(N, [\ ,\ ])$ et désignons par
$N^1 = N \supset N^2 = [N,N] \supset \ldots \supset N^r = [N, N^{r-1}] \supset N^{r+1} = (0)$, la suite centrale descendante de N. Pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, désignons par m^i un supplémentaire de N^{i+1} dans N^i. Nous avons

$N = \bigoplus_{i=1}^{r} m^i$; si $u \in N$, nous notons $u^{(i)}$ sa composante sur m^i . Supposons les sous-espaces m^i , $i \in \{1,\ldots r\}$, de N normés par $|| \ ||$, on définit une fonction ϕ sur N par

$$\phi(u) = \sup_{1 \leq i \leq r} ||u^{(i)}||^{1/i} \qquad (u \in N) .$$

On sait ([3], lemme II.1) que, quitte à remplacer les normes données par des normes homothétiques, ϕ est une jauge principale sur N .

En posant, pour $g = (u,x) \in N \times K$,

$$\psi(g) = \sup_{k \in K} \phi(\mathrm{Ad}\,\mathbf{k}(u))$$

nous obtenons une jauge principale sur G . Nous disons donc qu'une mesure de probabilité μ sur G possède un moment d'ordre $\alpha > 0$ si

$$\int_G \psi^\alpha(g)\ \mu(dg) < +\infty$$

(5.3) <u>Définition</u>.

Soit $(\mathfrak{J}^i)_{i \geq 1}$ une suite décroissante d'idéaux de N telle que $\mathfrak{J}^1 = N$ et $\mathfrak{J}^i = (0)$ pour $i \geq s+1$, $s \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{0,\ldots,s\}$, notons q_i la dimension de l'espace vectoriel $N/_{\mathfrak{J}^{i+1}}$. Nous disons qu'une base ordonnée $\{e_k\}_{1 \leq k \leq p}$, $(p=q_s)$, de N est adaptée à la suite d'idéaux $(\mathfrak{J}^i)_{i \geq 1}$ si pour tout $i \in \{1,\ldots,s\}$, vérifiant $q_i \neq q_{i-1}$, $\{e_{q_{i-1}+1},\ldots, e_{q_i}\}$ est une base d'un supplémentaire de $\mathfrak{J}^{i+1}$ dans $\mathfrak{J}^i$.

(5.4) Soit λ une mesure de probabilité sur G . Nous désignons par π_1(resp. π_2) la projection de G sur N (resp. K) et nous écrivons $\lambda_i = \pi_i(\lambda)$, $i = 1,2$. Nous notons m(resp. $\tilde{m}$) la mesure de Haar normalisée du sous-groupe compact $K(\lambda_2)$(resp. $\tilde{K}(\lambda_2)$) de K engendré par le support, $S(\lambda_2)$, de λ_2 (resp. par $S(\lambda_2)[S(\lambda_2)]^{-1}$). Quitte à remplacer $G = NK$ par $G = NK(\lambda_2)$, nous pouvons supposer que $K(\lambda_2) = K$. Nous disons que λ_2 est apériodique si $\tilde{K}(\lambda_2) = K$. Nous posons $\overline{\lambda} = \int_K \mathrm{Ad}k(\lambda_1)\, m(dk)$; $\overline{\lambda}$ est une mesure de probabilité sur N .

(5.5) Soit μ une mesure de probabilité sur N possédant un moment d'ordre 1 (i.e. $\int_N \phi(u)\, \mu(du) < +\infty$, voir (5.2)). Appelons ζ l'application naturelle de N sur $N/[N,N]$. D'après (5.2) l'intégrale $\int_N \zeta(u)\, \mu(du)$ a un sens et défini un élément $e(\mu)$ de $N/[N,N]$. Nous disons qu'une mesure de probabilité μ sur N est <u>centrée</u> si μ possède un moment d'ordre 1 et si $e(\mu) = 0$.

<u>Théorème de la limite centrale dans le cas centré</u>

Nous supposons que la mesure de probabilité sur N , $\overline{\lambda}$, est centrée (voir (5.4) et (5.5)).

(5.6) <u>Notion de degré sur l'algèbre des fonctions polynomes sur N ([2])</u>.

Désignons par $\{e_k\}_{1\le k\le p}$ une base de N adaptée à la suite centrale descendante, $(N^i)_{i\ge 1}$ de N (voir (5.2) et définition (5.3)); et par $\{x_k\}_{1\le k\le p}$ le système de fonctions coordonnées associé à cette base. Nous définissons une notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$, en attribuant un degré à chaque générateur x_k , $1 \leq k \leq p$; le degré de x_k , noté dg x_k , est par définition égal au plus grand entier i tel que e_k appartienne à N^i . On convient que le degré (resp. la valuation) du polynome nul est $(-\infty)$ (resp. $(+\infty)$). Il est facile de voir que cette notion est indépendante du choix de la base adaptée.

(5.7) Crochet de Lie associé à une base de N adaptée à sa suite centrale descendante

Soit $b = \{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ une base de N adaptée à sa suite centrale descendante, $(N^i)_{1 \leq i \leq r}$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, $\{e_{p_{i-1}+1},\ldots,e_{p_i}\}$, où $p_i = \dim({}^N/_{N^{i+1}})$ et $P_0 = 0$, est une base d'un supplémentaire m^i de N^{i+1} dans N^i.

Pour tous i et j appartenant à $\{1,\ldots,r\}$, nous avons

$$[m^i,m^j] \subset N^{i+j} = \bigoplus_{\{\ell : \ell \geq i+j\}} m^\ell$$

Pour $u \in m^i$ et $v \in m^j$, nous notons $[u,v]_b$ la composante de $[u,v]$ sur m^{i+j} ; puis pour u et v appartenant à N , nous posons

$$[u,v]_b = \sum_{1 \leq i,j \leq r} [u_i,v_j]_b \quad ,$$

où $u = \sum_{i=1}^{r} u_i$ avec $u_i \in m^i$ et $v = \sum_{j=1}^{r} v_j$ avec $v_j \in m^j$.

Il est clair que l'application de N x N dans N qui au couple (u,v) associe $[u,v]_b$ est bilinéaire alternée. D'autre part, pour $u \in m^i$, $v \in m^j$, $w \in m^\ell$, avec $i,j,\ell \in \{1,\ldots,r\}$, $[u,[v,w]_b]_b$ n'est autre autre que la composante de $[u,[v,w]]$ sur $m^{i+j+\ell}$; il s'ensuit que $[\ ,\ ]_b$ vérifie l'identité de Jacobi. On en déduit donc que $[\ ,\ ]_b$ est un crochet de Lie sur N , vérifiant

$[m^{i_1},[m^{i_2},\dots[m^{i_{s-1}},m^{i_s}]_b\dots]_b]_b \subset m^{\sum_{j=1}^{s} i_j}$, pour $i_j \in \{1,\dots,r\}$,

$j \in \{1,\dots,s\}$; et $(N,[\ ,\ ]_b)$ est une algèbre de Lie nilpotente de longueur inférieure ou égale à r . Nous notons $\circ_b$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]_b$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

(5.8) Soit $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de N adaptée à sa suite centrale descendante. Si f est une fonction de classe C^1 sur N et v un élément de N , nous définissons

$$D_v f(u) = \lim_{t\to 0} \frac{f(u \circ_b tv) - f(u)}{t} .$$

Si λ possède un moment d'ordre 2, nous désignons par A^b le générateur infinitésimal,

$$A^b = \sum_{i=p_1+1}^{p_2} (L_\lambda\ x_i) D_i + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq p_1} (L_\lambda\ x_i\ x_j)\ D_i\ D_j ,$$

où L_λ est défini en (2.5) et $D_i = D_{e_i}$, $i \in \{1,\dots,p\}$.

Pour tout $v \in N$, le champ analytique de vecteurs tangents invariant à gauche, D_v , sur $(N,\circ_b)$, s'identifie à l'élément v de l'algèbre de Lie $(N,[\ ,\ ]_b)$ de $(N,\circ_b)$.

La sous-algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ])$ engendrée par les éléments e_i , $1\leq i\leq p_1$, est égale à $(N,[\ ,\ ])$. D'après la définition du crochet de Lie $[\ ,\ ]_b$ (voir (5.7)), il est alors clair, que la sous-algèbre de Lie de $(N,[\ ,\ ]_b)$ engendrée par ces éléments est égale à $(N,[\ ,\ ]_b)$.

Lorsque la matrice $((L_\lambda\ x_i\ x_j))_{i,j\in\{1,\dots,p_1\}}$, nous savons donc (remarque (2.13)) que le semi-groupe de convolution $(\nu_t^b)_{t>0}$ sur

$(N,\circ_b)$ de g.i. A^b est absolument continu par rapport à la mesure de Haar de $(N,\circ_b)$, avec une densité de classe C^∞.

L'adaptation du lemme (2.4) à la situation précédente, nous dit que la matrice $((L_\lambda x_i x_j))_{i,j\in\{1,\dots,p_1\}}$ est définie positive si et seulement si la mesure λ n'est pas portée par un sous-groupe fermé de G de la forme $N_0(a K^{-1}a)$ où : N_0 est un idéal propre de $(N,[\ ,\ ])$, K-invariant (i.e. $Adk(N_0)\subset N_0$, $\forall k\in K$), contenant $[N,N]$; et a est un élément de N vérifiant

$$(1)\quad x_i(a) = ([I - Q_{\lambda_2}(I-Q_m)]^{-1}x_i)(\int_N u\ \lambda_1(du)),\ \forall i\in\{1,\dots,p_1\}.$$

[On notera que des propriétés de N_0, il résulte que le groupe $N_0(a\ k^{-1}a)$ est le même pour tous les éléments a de N vérifiant (1)].

Si $\lambda=\lambda_1\otimes\lambda_2$ ou λ_1 est centrée, on peut prendre pour a l'élément neutre de G.

Nous avons alors :

(5.9) <u>Théorème</u>.

Soit λ une mesure de probabilité sur G possèdant un moment d'ordre 2 et telle que $\bar\lambda$ soit centrée. Soit $b=\{e_i\}_{1\le i\le p}$ une base de N, adaptée à sa suite centrale descendante. Pour tout $(u,k)\in N\times K$ et pour tout $k_0\in K$, posons

$$V_n^{b,k_0}(u,k) = \Big(\sum_{i=1}^{p}\frac{x_i(u)}{n^{dgx_i/2}}\,e_i\ ,\quad k_0^{-n}\,k\Big).$$

Alors, pour tout $k_0\in S(\lambda_2)$, la suite de mesure de probabilité sur $N\times K$, $\{V^{b,k_0}(\lambda^n)\}_{n\ge1}$ converge vaguement vers la mesure de probabilité produit $\nu_1^b\otimes\tilde m$. En particulier lorsque λ_2

est apériodique , $\{V_n^{b,e}(\lambda^n)\}_{n\geq 1}$, converge vaguement vers $\nu_1^b \otimes m$.

Preuve du théorème (5.9)

Pour la notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ définie en (5.6), le couple (G,λ) vérifie les hypothèses de (2.1) : compte tenu de la formule de Campbell-Hausdorff, l'hypothèse i) (resp. ii)) est une conséquence des relations $[N^i,N^j] \subset N^{i+j}$, $\forall i,j \geq 1$, (resp. du fait que les N^i , $i \geq 1$, sont stables par les éléments Adk , $k \in K$) ; enfin l'hypothèse iii) signifie que $\overline{\lambda}$ est centrée.

En remarquant d'une part que la condition (*) de (2.11) équivaut à l'existence d'un moment d'ordre 2 pour λ et d'autre part que les groupes $(N,\circ_b)$ et N^b associés à b respectivement en (5.7) et (2.9) coïncident, nous voyons que le théorème (5.9) résulte du théorème (2.12).

Théorème de la limite centrale dans le cas général

λ est une mesure de probabilité sur G possèdant un moment d'ordre 1 .

(5.10) Suite graduée d'idéaux de N associée à λ .

Considérons l'ensemble

$E = \{(\ell,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 0 \leq k < \ell\} \cup \{(1,1)\}$ muni de la relation d'ordre total $\geq$ définie par

$$(\ell,k) \geq (\ell',k') \iff \begin{cases} \ell > \ell' \\ \text{ou} \\ \ell = \ell' \text{ et } k \geq k' \end{cases} .$$

On vérifie aisément que l'ordre ainsi défini sur E est celui qui est induit par la bijection :

$$\sigma : E \to \mathbb{N}^*$$
$$(\ell,k) \to \sigma(\ell,k) = \begin{cases} \ell(\ell-1)/2 + k + 2 & \text{si } \ell \geq 2 \\ k + 1 & \text{si } \ell = 1 \end{cases}$$

Nous appelons suite graduée d'idéaux de N associée à λ, la suite décroissante d'idéaux de N définie de la façon suivante : $\mathfrak{J}^{1,0}(\lambda) = N$, $\mathfrak{J}^{1,1}(\lambda) = \zeta^{-1}(e(\overline{\lambda}))$ et $\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda)$, $(\ell,k) \in F$ avec $\ell \geq 2$, est l'idéal de N^{ℓ} formé des éléments de N^{ℓ} qui s'écrivent $[u_1,[u_2,\ldots,[u_{\ell-1},u_{\ell}]\ldots]$, $u_1,\ldots,u_{\ell} \in N$, où <u>au moins</u> k éléments parmi les u_i , $i \in \{1,\ldots,\ell\}$, appartiennent à $\zeta^{-1}(e(\overline{\lambda}))$. Nous avons $\mathfrak{J}^{\ell,0}(\lambda) = N^{\ell}$, $\forall \ell \geq 1$; $\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda) = 0$ si $\ell > r$ et $[\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda),\mathfrak{J}^{\ell',k'}(\lambda)] \subset \mathfrak{J}^{\ell+\ell',k+k'}(\lambda)$ pour (ℓ,k) et $(\ell',k') \in E$.

(5.11) <u>Notion de "degré suivant λ" sur $\mathbb{C}[N]$</u> .

Désignons par $\{e_k\}_{1\leq k\leq p}$ une base de N adaptée à la suite graduée d'idéaux de N associée à λ (voir définitions (5.3) et (5.10)) ; et par $\{x_k\}_{1\leq k\leq p}$ le système de fonctions coordonnées associée à cette base. Nous définissons une notion de dégré sur $\mathbb{C}[N]$ en attribuant un dégré à chaque générateur x_k , $1\leq k\leq p$; le <u>degré suivant λ</u> de x_k, noté $dg^{\lambda}\, x_k$, est par définition égal à 1 si e_k n'appartient pas à N^2, égal à $\sup\{s+\ell : (s,\ell) \in E , e_k \in \mathfrak{J}^{s,\ell}(\lambda)\}$ si e_k appartient à N^2. On convient que le degré (resp. la valuation) suivant λ du polynome nul est $(-\infty)$ (resp. $(+\infty)$). Il est facile de voir que cette notion de degré sur $\mathbb{C}[N]$ est indépendante du choix de la base de N adaptée à la suite graduée d'idéaux associée à λ.

Dans le cas où la mesure de probabilité $\overline{\lambda}$ est centrée, la suite graduée d'idéaux associée à λ n'est autre que la suite centrale descendante de N ; nous retrouvons alors la notion de degré définie en (5.6).

(5.12) <u>Crochets de Lie associés à une base de N adaptée à $\{\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda),(\ell,k)\epsilon E\}$.</u>

Soit $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ une base de N adaptée à la suite d'idéaux $\{\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda),(\ell,k)\in E\}$. Pour tout élément (ℓ,k) de E, posons

$$q_{\sigma(\ell,k)-1} = \dim N/\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda) \qquad \text{(voir la définition de } \sigma \text{ en (5.11))} ;$$

si $\overline{\lambda}$ est centrée $q_2 = q_1$, si $\overline{\lambda}$ n'est pas centrée $q_2 = q_1 + 1$.

Pour tout élément (ℓ,k) de E vérifiant $q_{\sigma(\ell,k)-1} \neq q_{\sigma(\ell,k)}$, $\{e_{q_{\sigma(\ell,k)-1}+1},\dots,e_{q_{\sigma(\ell,k)}}\}$ est une base d'un supplémentaire $m^{\ell,k}$ de $\mathfrak{J}^{\ell_0,k_0}(\lambda)$ dans $\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda)$, où $(\ell_0,k_0) = \sigma^{-1}(\sigma(\ell,k)+1)$.

Pour tous couples (ℓ,k) et (ℓ',k') de E, nous avons

$$[m^{\ell,k},m^{\ell',k'}] \subset \mathfrak{J}^{\ell+\ell',k+k'}(\lambda) = \bigoplus_{\{(s,j)\epsilon E:(s,j)\geq(\ell+\ell',k+k')\}} m^{s,j}$$

Pour $u \in m^{\ell,k}$ et $v \in m^{\ell',k'}$, nous notons $[u,v]_b$ la composante de $[u,v]$ sur $m^{\ell+\ell',k+k'}$. Si $u \in N$, pour tout couple (ℓ,k) de E, nous notons $u^{(\ell,k)}$ la composante de u sur $m^{\ell,k}$ nous avons

$$u = \sum_{(\ell,k)\epsilon E} u^{(\ell,k)} = \sum_{\{(\ell,k)\epsilon E:\ell\leq r\}} u^{(\ell,k)}$$

Pour u et v appartenant à N, posons alors

$$[u,v]_b = \sum_{\{(\ell,k),(\ell',k')\in E:\ell,\ell'\leq r\}} [u^{(\ell,k)},v^{(\ell',k')}]_b$$

Il est clair que l'application de $N \times N$ dans N qui au couple (u,v) associe $[u,v]_b$ est bilinéaire alternée. D'autre part, pour $u \in m^{\ell,k}$, $v \in m^{\ell',k'}$, $w \in m^{\ell'',k''}$, avec $(\ell,k),(\ell',k')$, $(\ell'',k'') \in E$, $[u,[v,w]_b]_b$ n'est autre que la composante de $[u,[v,w]]$ sur $m^{\ell+\ell'+\ell'',k+k'+k''}$; il s'ensuit que $[\ ,\ ]_b$ vérifie l'identité de Jacobi. On en déduit que $[\ ,\ ]_b$ est un crochet de Lie de N, vérifiant

$$[m^{\ell_1,k_1},[m^{\ell_2,k_2},\ldots,[m^{\ell_{s-1},k_{s-1}},m^{\ell_s,k_s}]_b\ldots]_b]_b \subset m^{\sum_{i=1}^{s}\ell_i,\sum_{i=1}^{s}k_i} ,$$

pour $(\ell_i,k_i) \in E$, $i \in \{1,\ldots,s\}$; et $(N,[\ ,\ ]_b)$ est une algèbre de Lie nilpotente de longueur inférieure ou égale à r. Nous notons $\circ_b$ le produit sur N associé au crochet de Lie $[\ ,\ ]_b$ par la formule de Campbell-Hausdorff.

D'autre part, nous définissons un nouveau crochet de Lie $[\ ,\ ]'_b$ sur N en posant, pour u et $v \in N$,

$$[u,v]'_b = [u-u^{(1,1)},v-v^{(1,1)}]_b .$$

Nous notons $\circ'_b$ le produit sur N associé à ce nouveau crochet de Lie par la formule de Campbell-Hausdorff. Nous avons

$$u \circ'_b v = (u-u^{(1,1)}) \circ_b (v-v^{(1,1)}) + u^{(1,1)} + v^{(1,1)} ,$$

pour $u,v \in N$.

Nous notons ad(resp. ad^b et ad'^b) la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $(N,[\ ,\ ])$(resp.$(N,[\ ,\ ]_b)$ et $(N,[\ ,\ ]'_b)$).

(5.13) Soit $b = \{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ la base de N considérée en (5.12). Dans le cas où $\overline{\lambda}$ n'est pas centrée, posons

$$f = \int_K \mathrm{Adk}(e_{q_2})\ m(dk) \ ;$$

f est un élément K-invariant de N et $f - e_{q_2} \in [N,N]$. Nous désignons par $\overline{b}$ la base de N qui se déduit de b en remplaçant e_{q_2} par f .

Désignons par τ_b l'lément de N défini par

$$\tau_b = \begin{cases} [\int_N x_{q_2}(u)\ \overline{\lambda}(du)]f & \text{si } \overline{\lambda} \text{ n'est pas centrée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

τ_b est un élément K-invariant de N .

Nous munissons l'espace $N \times \mathbb{R}$, (resp. $N \times K \times \mathbb{R}$), du produit, noté $\circ'_b$, (resp. noté multiplicativement), défini par

$(u,t) \circ'_b (v,s) = (u \circ'_b \mathrm{Exp}\, \mathrm{ad}^{\overline{b}}\ t\tau_b(v)\ ,\ t+s)$ pour $u,v \in N$ et $s,t \in \mathbb{R}$,

[resp. $(u,k,t)(v,k',s) = (u \circ'_b \mathrm{Expad}^{\overline{b}}\ t\tau_b(\mathrm{Adk}(v)), kk',\ t+s)$

$= (u \circ'_b \mathrm{Ad}\ k\ (\mathrm{Exp}\ \mathrm{ad}^{\overline{b}}\ t\tau_b(v))\ ,\ kk'\ ,\ t+s)$,

(car τ_b est K-invariant), pour $u,v \in N$, $k,k' \in K$ et $t,s \in \mathbb{R}$] .

Nous notons $M(b)$ (resp. $H(b)$) les groupes ainsi obtenus. $M(b)$ est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe qui est un produit semi-direct de $(N,\circ'_b)$ par $(\mathbb{R},+)$. $H(b)$ est un produit semi-direct de $(N,\circ'_b)$ par le produit direct des groupes K et $(\mathbb{R},+)$; c'est donc aussi le produit semi-direct du groupe de Lie nilpotent simplement connexe $M(b)$ par le groupe compact K .

(5.14) Soit $b = \{e_i\}_{1\leq i\leq p}$ la base de N considérée en (5.12) et (5.13). Si f est une fonction de classe C^1 sur $N \times \mathbb{R}$ et z est un élément de $N \times \mathbb{R}$ nous posons

$$D_z f(y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(y \circ_b' tz) - f(y)}{t}$$

pour $y \in N \times \mathbb{R}$.

Désignons par λ^b la mesure de probabilité produit $[\lambda * \varepsilon_{\tau_b^{-1}}] \otimes \varepsilon_1$ sur $G \times \mathbb{R}$. Lorsque λ possède un moment d'ordre 2 sur G , λ^b possède un moment d'ordre 2 sur $H(b)$. Nous considérons alors le générateur infinitésimal,

$$A^b = \sum_{i=q_2+1}^{q_3} (L_{\lambda^b}\, x_i)\, D_{(e_i,0)} + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i,j\leq q_2} (L_{\lambda^b}\, x_i x_j)\, D_{(e_i,0)} D_{(e_j,0)} + D_{(0,1)} ,$$

où L_{λ^b} est défini en (2.5).

Définissons sur $N \times \mathbb{R}$ le crochet de Lie suivant :

$[(u,t),(v,s)]_b = ([u,v]_b' + t[\tau_b,v]_{\bar{b}} - s[\tau_b,u]_{\bar{b}}\ , 0)$, pour $u,v \in N$ et $t,s \in \mathbb{R}$, où $\bar{b}$ désigne la base de N qui se déduit de b en remplaçant e_{q_2} par $f = \int_K \mathrm{Ad}k(e_{q_2})\, m(dk)$, dans le cas où $\bar{\lambda}$ n'est pas centrée et $\bar{b} = b$ si $\bar{\lambda}$ est centrée. L'algèbre de Lie du groupe $M(b)$ est alors $(N \times \mathbb{R}, [\ ,\ ]_b)$. Notons $\exp_{M(b)}$ l'application exponentielle du groupe $M(b)$; pour tout élément z de $N \times \mathbb{R}$, le champ analytique de vecteurs tangents invariant à gauche D_z sur $M(b)$ s'identifie à l'élément $\exp_{M(b)}^{-1} z$ de l'algèbre de Lie $(N \times \mathbb{R}, [\ ,\ ]_b)$ de $M(b)$; en particulier si z est de la forme $(u,0)$ avec $u \in N$ ou $(0,t)$ avec $t \in \mathbb{R}$, D_z s'identifie à z .

Dans le cas où la matrice $((L_{\lambda^b} x_i\ x_j))_{1\le i,j\le q_2}$ est définie positive, on voit alors que l'on a (avec les notations de la remarque (2.13)) ,

$$\mathcal{L}_1(A^b) = N \times \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_2(A^b) = N \ .$$

Si bien que le semi-groupe de convolution $(\nu_t^b)_{t>0}$ sur $M(b)$ de g.i. A^b , s'écrit $(\mu_t^b \otimes \varepsilon_t)_{t>0}$ où μ_t^b est absolument continue par rapport à la mesure de Haar de N avec une densité de classe C^∞ .

L'adaptation du lemme (2.14) à la situation présente, nous dit que la matrice précédente est définie positive si et seulement si la mesure λ n'est pas portée par la classe de τ_b modulo un sous-espace fermé de G de la forme $N_0(aKa^{-1})$, où : N_0 est un idéal propre de $(N,[\ ,\ ])$, K-invariant, contenant $[N,N]$; et a est un élément de N vérifiant

$$(1) \quad x_i(a) = (\ I - Q_2(I-Q_m)^{-1}x_i)(\textstyle\int_N u\ \lambda_1 * \varepsilon_{\tau_b^{-1}}(du)) \quad \forall i \in \{1,\dots,q_2\}$$

[On notera que des propriétés de N_0 , il résulte que, pour tous éléments b et c de N , $bN_0Kc = b'N_0Kc' = N_0b'Kc'$, où

$$x_i(b') = x_i(b) \quad \text{et} \quad x_i(c') = x_i(c) \qquad \forall i \in \{1,\dots,q_2\}$$

et

$$x_i(b') = x_i(c') = 0 \qquad\qquad \forall i \in \{q_2+1,\dots,p\} \ .$$

Si bien que d'une part le groupe $N_0(aKa^{-1})$ est le même pour tous les éléments a de N vérifiant (1) et d'autre part
$\tau_b\ N_0(aKa^{-1}) = N_0(aKa^{-1})\ \tau_b$].

Si $\lambda_1 * \varepsilon_{\tau_b^{-1}}$ est centrée ou si $\lambda = \lambda_1 \otimes \lambda_2'$, on peut prendre pour a l'élément neutre e de G .

(5.15) Théorème

Soit λ une mesure de probabilité sur G possèdant un moment d'ordre 2. Soit $b = \{e_i\}_{1 \leq i \leq p}$ une base de N adaptée à la suite graduée d'idéaux de N associée à λ (voir (5.10)). Pour tout $(u,k) \in N \times K$ et pour tout $k_0 \in K$, posons

$$V_n^{b,k_0}(u,k) = \Big(\sum_{i=1}^{p} \frac{x_i(uo(-n\tau_b))}{d_n g^\lambda x_i/2} e_i \ , \ k_0^{-n} k \Big) .$$

Alors, pour tout $k_0 \in S(\lambda_2)$, la suite de mesures de probabilité sur $N \times K$, $\{V_n^{b,k_0}(\lambda^n)\}_{n \geq 1}$ converge vaguement vers la mesure de probabilité produit $\mu_1^b \otimes \tilde{m}$. En particulier, lorsque λ_2 est apériodique, $\{V_n^{b,e}(\lambda^n)\}_{n \geq 1}$ converge vaguement vers $\mu_1^b \otimes m$.

Preuve :

Munissons l'espace $N \times \mathbb{R}$ (resp. $G \times \mathbb{R} = N \times K \times \mathbb{R}$) du produit, noté $\circ$ (resp. multiplicativement), défini par

$$(u,t) \circ (v,s) = (u \circ \operatorname{Exp} \operatorname{ad} t\tau_b\, (v) \ , \ t + s) ,$$

pour $u,v \in N$ et $s,t \in \mathbb{R}$.

$$\Big[\text{resp. } (u,k,t)(v,k',s) = (u \circ \operatorname{Exp} \operatorname{ad} t\tau_b\, (\operatorname{Ad}k(v)), kk', t + s)$$

$$= (u \circ \operatorname{Ad}k(\operatorname{Exp} \operatorname{ad} t\tau_b\, (v)), kk', t + s) ,$$

pour $u,v \in N$, $k,k' \in K$ et $s,t \in \mathbb{R}$).

Nous notons M et H les groupes ainsi obtenus. M est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe qui est un produit semi-direct de $(N,\circ)$ par $(\mathbb{R},+)$. H est un produit semi-direct de $(N,\circ)$ par le produit direct des groupes K et $(\mathbb{R},+)$; c'est donc aussi le produit semi-direct du groupe de Lie nilpotent simplement connexe M par le groupe compact K.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans G, indépendantes et de loi commune λ. Ecrivons $X_i = Y_i\, k_i$, $i \geq 1$, où Y_i et k_i sont des v.a. à valeurs respectivement dans N et K. En tenant compte que l'élément de N, τ_b, est K-invariant, le produit $X_1 \ldots X_n\, \tau_b^{-n} = X_1 \ldots X_n(-n\tau_b)$ s'écrit alors $N_n\, K_n$ avec

$$N_n = Z_1 \circ [\tau_b \circ \mathrm{Ad}k_1(Z_1) \circ (-\tau_b)] \circ \ldots \circ [(n-1)\tau_b \circ \mathrm{Ad}k_1 \ldots k_{n-1}(Z_n) \circ (-(n-1)\tau_b)]$$

$$= Z_1 \circ \mathrm{Exp}\, \mathrm{ad}\tau_b\, (\mathrm{A}k_1(Z_2)) \circ \ldots \circ \mathrm{Exp}\, \mathrm{ad}(n-1)\tau_b\, (\mathrm{Ad}k_1 \ldots k_{n-1}(Z_n)) ,$$

en posant $Z_i = Y_i \circ (-\tau_b)$, $i \geq 1$,

et $K_n = k_1 \ldots k_n$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, nous voyons donc que (N_n, K_n, n) est égal au produit dans H des v.a. $(Z_i, k_i, 1)$, $1 \leq i \leq n$, à valeurs dans $N \times K \times \mathbb{R}$, indépendantes et de loi commune λ^b.

Nous définissons une notion de degré sur $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[N\times\mathbb{R}]$, en attribuant un degré à tout élément T de $\mathbb{C}[N\times\mathbb{R}]$ de la forme $T_1 \otimes T_2$ où $T_1 \in \mathbb{C}[N]$ et $T_2 \in \mathbb{C}[\mathbb{R}]$; le degré de T est par définition égal à $dg^\lambda\, T_1 + 2\, dg\, T_2$, où $dg^\lambda\, T_1$ est défini en (5.11) et $dg\, T_2$ est le degré habituel d'un élément T_2 de $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$.

Pour cette notion de degré sur $\mathbb{C}[M]$, le couple (H, λ^b) vérifie les hypothèses de (2.1) : l'hypothèse i) est une conséquence des relations $[\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda)\, ,\, \mathfrak{J}^{\ell',k'}(\lambda)] \subset \mathfrak{J}^{\ell+\ell',k+k'}(\lambda)$, $\forall(\ell,k)$ et $(\ell',k') \in E$; l'hypothèse ii) résulte du fait que les idéaux $\mathfrak{J}^{\ell,k}(\lambda)$ de N, $(\ell,k) \in E$, sont stables par les éléments $\mathrm{Ad}k$, $k \in K$; enfin l'hypothèse iii) signifie que $\bar{\lambda} * \varepsilon_{\tau_b^{-1}}$ est centrée sur N.

Puisque la mesure de probabilité λ possède un moment d'ordre 2 sur G, il en est de même de la mesure λ^b sur H ; λ^b vérifie alors la condition (*) de (2.11). En remarquant alors que le groupe $M^{b'}$ associée à la base $b' = \{(e_i,0) : 1 \leq i \leq p\} \cup \{(0,1)\}$ de l'espace vectoriel $N \times \mathbb{R}$ (voir (2.9)) coïncide avec le groupe $M(b)$ construit en (5.13), le théorème (5.15) résulte du théorème (2.12).

II . Théorème de la limite centrale pour un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide par un groupe compact

Soit R un groupe de Lie résoluble connexe ayant $(\mathcal{R},[\ ,\ ])$ pour algèbre de Lie. Désignons par Ad la représentation adjointe de R ; d'après le théorème de Lie nous savons qu'il existe une base de $\mathcal{R}$ qui triangularise simultanément tous les éléments de AdR. Nous disons que R est de type rigide si les valeurs propres des éléments de AdR sont toutes de module égal à 1 .

Nous avons :

(6.1) Théorème

Soit R un groupe de Lie résoluble connexe. Désignons par D(R) l'ensemble des parties semi-simples des éléments de AdR ; D(R) est un groupe de Lie connexe abélien qui est en outre compact si R est de type rigide. On munit alors l'espace produit R x D(R) d'un produit $\cdot$ explicitement décrit tel que :

i) $(R,\cdot)$ est un groupe de Lie nilpotent connexe et $(R \times D(R),\cdot)$ est le produit semi-direct du groupe $(R,\cdot)$ et du groupe de Lie abélien connexe D(R) .

ii) l'application $\begin{array}{l} R \to (R \times D(R),\cdot) \\ r \to (r,D(r)) \end{array}$, où D(r) désigne la partie semi-simple de Adr , est un isomorphisme de groupes de Lie de R sur son image.

Preuve du théorème.

Choisissons une sous-algèbre de Cartan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{R}$ (i.e. une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{R}$ qui est son propre normalisateur).

Désignons par ad la représentation adjointe de $\mathcal{R}$. Pour toute forme linéaire complexe α sur $\mathcal{P}$, posons

$$\mathcal{R}_\alpha = \{X \in \mathcal{R}^{\mathbb{C}} : \exists\ \ell \in \mathbb{N} \ /\ (\mathrm{ad}P - \alpha(P)I)^\ell(X) = 0 \qquad \forall P \in \mathcal{P}\}$$

Notons Δ l'ensemble des formes linéaires α telles que $\mathcal{R}_\alpha \neq (0)$.

Nous avons

$$\mathcal{P} = \mathcal{R}_0 \quad , \quad \mathcal{R}^{\mathbb{C}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathcal{R}_\alpha$$

et
$$[\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\beta] \subset \mathcal{R}_{\alpha+\beta} \quad , \qquad \forall \alpha, \beta \in \Delta$$

Si $u \in \mathcal{R}$, nous notons u_α sa composante sur $\mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$; nous avons $u = \sum_{\alpha\in\Delta} u_\alpha$. Posons

$$\alpha(u) = \alpha(u_0) \ , \ u \in \mathcal{R} \ , \ \alpha \in \Delta \qquad ;$$

nous savons ([6]) que :

1) α est une forme linéaire sur $\mathcal{R}$ nulle sur le nilradical $\mathcal{N}$ de $\mathcal{R}$ (i.e. le plus grand idéal nilpotent de $\mathcal{R}$) ; et tout élément u de $\mathcal{R}$ tel que $\alpha(u) = 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$, appartient à $\mathcal{N}$.

2) Tout élément α de Δ est la différentielle en e d'un homomorphisme ϕ_α de R dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. Pour tout $\alpha \in \Delta$, ϕ_α prend la valeur 1 sur le nilradical N de R (i.e. le plus grand sous-groupe distingué nilpotent de R) ; et tout élément r de R pour lequel $\phi_\alpha(r) = 1 \quad \forall \alpha \in \Delta$, appartient à N.

[D'après le théorème de Lie, nous pouvons trouver une base de $\mathcal{R}$ qui triangularise simultanément les éléments de AdR ; alors la famille $\{\phi_\alpha, \alpha\epsilon\Delta\}$ n'est autre que la famille d'homomorphismes définie par les éléments diagonaux].

Pour tout $\alpha \in \Delta - \{0\}$, $\mathcal{R}_\alpha \subset [\mathcal{R},\mathcal{R}]^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{N}^{\mathbb{C}}$,
Par suite,

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} + \mathcal{N} \qquad \text{(somme non nécessairement directe).}$$

Désignons par P le groupe de Lie connexe de R ayant $\mathcal{P}$ pour algèbre de Lie ; nous avons $R = NP$ (décomposition non nécessairement unique).

(6.2) Lemme

Pour tous éléments r de R et A de $D(R)$, posons

$$\eta(A)(r) = (\exp A\, u)\, p \quad ,$$

où r s'écrit $(\exp u)p$ avec $u \in \mathcal{N}$ et $p \in P$.

On définit ainsi, sans ambiguité, un élément $\eta(A)(r)$ de R ; η est un homomorphisme continu de $D(R)$ dans le groupe des automorphismes de R .

Preuve :

Pour tout $r \in R$, désignons par $D(r)$ la partie semi-simple de Adr ; nous avons

$$D(r)\, u = \sum_{\alpha\in\Delta} \phi_\alpha(r)\, u_\alpha \quad , \qquad (u \in \mathcal{R})$$

$D(r)$ possède les propriétés suivantes :

i) $D(r) = D(p)$, pour tout $p \in P$ tel que $rp^{-1} \in N$ [car $\phi_\alpha(N) = \{1\}$ $\forall\alpha \in \Delta$].

ii) $D(r)\ u = u$, $\forall u \in \mathcal{N} \cap \mathcal{G}$ [car $\phi_0 \equiv 1$]

iii) $D(r)$ est un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathcal{R}$ [car $\phi_{\alpha+\beta} = \phi_\alpha\ \phi_\beta$ et $[\mathcal{R}_\alpha, \mathcal{R}_\beta] \subset \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, pour $\alpha, \beta \in \Delta$ avec $\alpha + \beta \in \Delta$]

iv) $D(r)$ commute avec tous les éléments de AdP [car les sous-espaces $\mathcal{R}_\alpha$, $\alpha \in \Delta$, sont stables pour les éléments de AdP].

A l'aide de ces quatre propriétés, on vérifie aisément : tout d'abord que :

$$(\exp A\ u)\ p = (\exp A\ u')\ p'$$

pour $A \in D(R)$ et pour $u, u' \in \mathcal{N}$, $p, p' \in P$ avec $(\exp u)p = (\exp u')p'$; et ensuite que η est un homomorphisme continu de $D(R)$ dans le groupe des automorphismes de R .

Le lemme est prouvé.

Posons alors

$r_1 \cdot r_2 = r_1[\eta(D(r_1^{-1}))(r_2)]$, pour tout r_1 , $r_2 \in R$.

On voit facilement que l'on définit ainsi un produit nilpotent sur R ; η est un homorphisme continu de $D(R)$ dans le groupe des automorphismes de $(R, \cdot)$; et l'application

$R \to (R,\cdot) \times_\eta D(R)$ est un isomorphisme de groupes analytiques

$r \mapsto (r, D(r))$

de R sur son image .

Désignons par $D(\mathcal{G})$ l'ensemble des parties semi-simples des éléments de $\mathrm{ad}\mathfrak{R}$; nous avons

$$D(u)\, v = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha(u)\, v_\alpha \quad , \quad (u,v \in \mathfrak{R}) .$$

Posons alors

$$[u,v]' = [u,v] - (D(u)\, v - D(v)\, u) \;,\; (u,v \in \mathfrak{R}) \;;$$

puis

$$[(u,A),(v,B)]' = ([u,v]' + Av - Bu \;,\; 0) \;,\; (u,v \in \mathfrak{R} \;;\; A,B \in D(\mathfrak{R})) .$$

$[\ ,\ ]'$ est un crochet de Lie sur $\mathfrak{R} \oplus D(\mathfrak{R})$ et le groupe de Lie $(R,\cdot) \times_\eta D(R)$ possède $(\mathfrak{R} \oplus D(\mathfrak{R}), [\ ,\ ]')$ pour algèbre de Lie.

Le théorème (6.1) est ainsi démontré.

(6.2) Soit $G = R \times_\xi K$ un produit semi-direct d'un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type rigide R par un groupe compact K.

Munissons l'espace produit $R \times D(R) \times K$ du produit $\cdot$ défini par (voir lemme (6.2))

$$(r,D(s),k) \cdot (r',D(s'),k') = (r[\eta(D(r^{-1}s))(\xi(k)(r'))] \;, \quad D(s)\, D(\xi(k)(s')),kk')$$

pour $r,r',s,s' \in R$ et $k,k' \in K$; nous notons H le groupe ainsi obtenu. H est un produit semi-direct du groupe nilpotent simplement connexe $(R,\cdot)$ par un groupe compact. L'application ψ de G dans H qui au couple (r,k) associe le triplet $(r,D(r),k)$ est un isomorphisme de G sur son image.

Nous sommes ainsi ramené à la situation de la section 5 ;

les résultats de cette section nous donnent donc un théorème de la limite centrale pour G .

(6.3) Exemple

Soit G le groupe constitué par l'espace produit $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ muni du produit

$$(z,t)(z',t') = (z + e^{it}z', t + t').$$

G est le revêtement simplement connexe du groupe des déplacements du plan.

Le plongement qui résulte du théorème (6.1) est le suivant :

$$\psi : G \to H$$
$$(z,t) \mapsto ((z,t),e^{it})$$

où H est le groupe constitué par l'espace produit $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times T$ muni du produit

$$(z,t,e^{is})(z',t',e^{is'}) = (z + e^{is}z' \ , \ t + t' \ , \ e^{i(s+s')}) \quad ;$$

H est donc un produit semi-direct de $(\mathbb{R}^3,+)$ par le tore T .

Désignons par λ une mesure de probabilité possédant un moment d'ordre 2 sur G ; et par $\{(z_i,t_i)\}_{i\geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, indépendantes et de loi commune λ. Si g est un élément de G , nous notons $z(g) = x_1(g) + ix_2(g)$ et $t(g)$ ses composantes respectivement sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

D'après la section 5 , nous avons :

1er cas : Nous supposons que $\int_G t(g)\, \lambda(dg) = 0$ (i.e. que la mesure $\overline{\psi(\lambda)}$ est centrée dans R^3 (notations de la section 5)).

Supposons que λ ne soit pas portée par le sous-groupe $\mathbb{C} \times \{0\}$ de G . Désignons par a l'élément de G défini par

$$z(a) = \frac{\int_G z(g)\ \lambda(dg)}{1-\int_G e^{it(g)}\ \lambda(dg)} \quad \text{et} \quad t(a) = 0 \ .$$

La mesure de probabilité $\varepsilon_{a^{-1}} * \lambda * \varepsilon_a$ est centrée dans $\mathbb{R}^3$.

Alors, d'après le théorème (5.9), la suite de v.a.

$$S_n = \left(\frac{z_1 + e^{it_1} z_2 + \ldots + e^{i(t_1+\ldots+t_{n-1})} z_n}{\sqrt{n}} \ , \ \frac{t_1 + \ldots + t_n}{\sqrt{n}}\right)$$

converge en loi vers la loi gaussienne centrée de matrice de covarian-covariance $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, où

$$\sigma_1^2 = \int_G |z(g)|^2\ \varepsilon_{a^{-1}} * \lambda * \varepsilon_a(dg)$$

$$= \int_G \left| z(g) - \frac{1 - e^{it(g)}}{1-\int_G e^{it(g)}\ \lambda(dg)} \int_G z(g)\ \lambda(dg)\right|^2 \lambda(dg)$$

et

$$\sigma_2^2 = \text{var } t_1 = \int_G t^2(g)\ \lambda(dg)$$

Cette loi limite est non dégénérée si et seulement si λ n'est portée ni par $\mathbb{C} \times \{0\}$, ni par $a(\{0\} \times \mathbb{R})a^{-1}$.

2ème cas : (cas général)

Désignons par τ l'élément de G défini par

$z(\tau) = 0$ et $t(\tau) = \int_G t(g)\ \lambda(dg)$.

Supposons que la mesure $\lambda * \varepsilon_{\tau^{-1}}$ ne soit pas portée par le sous-groupe $\mathbb{C} \times \{0\}$ de G et notons a l'élément de G défini par

$$z(a) = \frac{\int_G z(g)\, \lambda * \varepsilon_{\tau^{-1}}(dg)}{1-\int_G e^{it(g)}\, \lambda * \varepsilon_{\tau^{-1}}(dg)} \quad , \quad t(a) = 0 \ .$$

La mesure de probabilité $\varepsilon_{a^{-1}} * \lambda * \varepsilon_{\tau^{-1}a}$ est centrée dans $\mathbb{R}^3$.

Alors, d'après le théorème (5.15), la suite de v.a.

$$S_n = \left(\frac{z_1 + e^{it_1} z_2 + \ldots + e^{i(t_1+\ldots+t_{n-1})} z_n}{\sqrt{n}} \ , \ \frac{t_1 + \ldots + t_n - n \int_G t(g)\lambda(dg)}{\sqrt{n}}\right)$$

converge en loi vers la loi gaussienne centrée de matrice de covariance $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$, où

$$\sigma_1^2 = \int_G |z(g)|^2\, \varepsilon_{a^{-1}} * \lambda * \varepsilon_{\tau^{-1}a}(dg)$$

$$= \int_G \left| z(g) - \frac{1-e^{i[t(g)-\int_G t(g)\lambda(dg)]}}{1-\int_G e^{i[t(g)-\int_G t(g)\lambda(dg)]}\lambda(dg)} \int_G z(g)\lambda(dg) \right|^2 \lambda(dg)$$

et

$$\sigma_2^2 = \operatorname{var} t_1 = \int_G t^2(g)\, \lambda(dg) - \left(\int_G t(g)\, \lambda(dg)\right)^2 \ .$$

Cette loi limite est non dégénérée si et seulement si λ n'est portée ni par $\mathbb{C} \times \{\tau\}$, ni par $a(\{0\} \times \mathbb{R})\, a^{-1}\, \tau$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DERRIENNIC Y. : "Lois "zéro ou deux" pour les processus de Markov. Applications aux marches aléatoires". Ann. Inst. Henri Poincarré, vol XII, n°2, 1976, p.111-129.

[2] GUIVARC'H Y. : "Loi des grands nombres et rayon spectral pour une marche aléatoire sur un groupe de Lie". Bull. Soc. math. France, (à paraître).

[3] GUIVARC'H Y. : "Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques". Bull. Soc. Math. France, 101, 1973, 333-379.

[4] ICHIHARA K., KUNITA H. : "A classification of the second order degenerate elliptic operators and its probabilistic characterization". Zeit. für Wahr. 30, 1974, p.235.

[5] RAUGI A. : "Théorème de la limite centrale pour les groupes de Lie nilpotents simplement connexes". Zeit. für Wahr. (à paraître).

[6] RAUGI A. : "Fonctions harmoniques et théorèmes limites pour les marches aléatoires sur les groupes". Bull. Soc. Math. France, Mémoire 54, 1977, 127 p.

[7] SAZONOV V.V. and TUTUBALIN V.N. "Probability distributions on topological groups". Theory Prob. Applications, 11(1966), pp. 3-55.

[8] SKOROKHOD A.V. : "Studies in the theory of Random Process", Addison-Wesley publishing company, Inc. Massachussets, 1965.