

J. P. CONZE

Sur la convergence d'une série liée à une équation fonctionnelle

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3

« Séminaire de probabilités II », , p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__3_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA CONVERGENCE D'UNE SERIE
LIEE A UNE EQUATION FONCTIONNELLE

J.P. Conze

1 - Introduction

Soit α un nombre irrationnel. Soit T_α la rotation définie par $x \rightarrow x + \alpha$ sur le cercle $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons également T_α l'opérateur déduit de l'action de cette rotation sur les fonctions définies sur X .

Plusieurs questions de théorie ergodique, par exemple l'ergodicité de certains produits gauches, des propriétés d'équirépartition, sont liées à l'existence d'une solution mesurable non nulle ϕ de l'équation fonctionnelle

$$T_\alpha \phi = \phi f \quad (*)$$

où f est donnée.

Cette équation, pour des fonctions f assez régulières, met en jeu des propriétés arithmétiques de α . On sait montrer, dans des cas variés, que l'équation n'a pas de solution non nulle. Plus rarement, il est possible de construire des exemples non triviaux pour lesquels l'équation a une solution non nulle (cf. W. Veech [1]).

Les équations additives jouent également un rôle important. Il est clair que, si f est de la forme $f = \exp(2\pi i h)$, l'équation $(*)$ a une solution mesurable non nulle, dès que l'équation additive

$$T_\alpha \psi - \psi = h \quad (**)$$

a une solution mesurable ψ .

Nous nous proposons dans ce travail d'obtenir, dans un cas particulier, l'existence d'une solution pour l'équation additive (**), grâce à l'étude de la convergence d'une série de la forme

$\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^4}{n^2(n\alpha)^2}$. Ceci nous permet de retrouver partiellement le résultat de [1], et de répondre, négativement à une question formulée dans [2].

Notations.

On note μ la mesure de Lebesgue sur le cercle.

Dans toute la suite, α est un nombre irrationnel fixé, dont on note (a_k) la suite des quotients partiels, et (p_k/q_k) la suite des convergents.

Pour tout réel y , posons $((y)) = \inf_{p \in \mathbb{Z}} |y-p|$.

Rappelons (cf. [3]) qu'on a entre les (q_k) et les (a_k) les relations de récurrence.

$$q_{k+1} = a_k q_k + q_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

et que la suite (q_k) vérifie les inégalités :

$$((n\alpha)) \geq ((q_k\alpha)) \quad , \quad \text{pour } 0 < |n| < q_{k+1}, \quad k \geq 1,$$

$$\text{et } \frac{1}{q_k + q_{k+1}} \leq ((q_k\alpha)) \leq \frac{1}{q_{k+1}} \leq \frac{1}{a_k q_k}, \quad k \geq 1$$

Soit (b_k) une suite d'entiers telle que $|b_k| \leq a_k$, pour tout $k \geq 1$. Considérons, comme dans [1], les éléments $\beta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire sous la forme $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q_k \alpha$. Comme on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} ((b_k q_k \alpha)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| ((q_k \alpha)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < \infty,$$

cette série définit bien un élément du cercle.

2 - Convergence d'une sérieThéorème :

Soit $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q_k^\alpha$, vérifiant la condition

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^4 / a_k < \infty . \text{ Alors la série } \sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^4}{n^2 ((n\alpha))^2} \text{ converge.}$$

Remarque : La condition du théorème équivaut à $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^4 q_k / q_{k+1} < \infty$.
 Il est clair qu'il existe une infinité non dénombrable de valeurs β satisfaisant à la condition du théorème si et seulement si le nombre α n'est pas de type constant, c'est-à-dire si la suite des quotients partiels (a_k) est non bornée.

Nous montrons d'abord une série de lemmes élémentaires de majoration. Dans toute la suite, C désignera une constante "générique".

Lemme 1 :

Soit f une fonction positive intégrable au sens de Riemann sur X . On a, pour tout $N \geq 1$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \frac{1}{N} \int f d\mu$$

Preuve : Supposons d'abord f continue. Soit l un entier. On a :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+kl)^2} \left(\sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) \right) .$$

D'après l'unique ergodicité de la rotation d'angle α , on a, uniformément en k :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) = \int f d\mu .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour l assez grand, on a, pour tout k :

$$\frac{1}{l} \sum_{p=0}^{l-1} f((N+kl+p)\alpha) \leq \int f d\mu + \varepsilon ,$$

d'où : $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(n\alpha) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+kl)^2} l(\int f d\mu + \varepsilon) \leq \frac{1}{N} (\int f d\mu + \varepsilon) .$

Le résultat s'étend immédiatement par majoration aux fonctions intégrables au sens de Riemann positives.

Lemme 2 : (Koksma)

Soit f une fonction intégrable sur le cercle de variation $\text{Var}(f)$ finie. Soit $q \geq 1$ un entier tel que $q((q\alpha)) \rightarrow 1$. Alors on a, pour tout x :

$$\left| \sum_{k=0}^{q-1} f(x+k\alpha) - q \int f d\mu \right| \leq \text{Var}(f) .$$

$|q\alpha - p| < 1/q$
pour un entier p premier
avec q .

Lemme 3 : Soient p et N des entiers > 0 .

$$\sum_{\{n \geq N, n: ((n\alpha)) \leq 1/p\}} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{NP} ;$$

$$\sum_{\{n \geq N, n: ((n\alpha)) > 1/p\}} \frac{1}{n^2 ((n\alpha))^2} \leq \frac{Cp}{N} .$$

Preuve : La première somme s'écrit :

$$\sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right]}(n\alpha) . \text{ L'inégalité résulte du lemme 1 appliqué à }$$

$$\mathbf{1}_{\left[-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right]} .$$

De même, la deuxième somme peut s'écrire :

$$\sum_{n \geq N} \sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{n^2} \frac{1}{((n\alpha))^2} \mathbf{1}_{\left[\frac{l}{p}, \frac{l+1}{p}\right]}(n\alpha) .$$

D'après le lemme 1, cette somme est majorée par :

$$\sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{N} \left(\frac{p}{l}\right)^2 \frac{1}{p} \leq \frac{p}{N} \left(\sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{l^2} \right) = C \frac{p}{N} .$$

Lemme 4 :

$$\sum_{\{0 < n < q_k; n: ((n\alpha)) \geq \frac{1}{p}\}} \frac{1}{((n\alpha))^2} < Cp(q_k + p)$$

Preuve : La somme étudiée s'écrit :

$$\sum_{0 < n < q_k} \frac{1}{((n\alpha))^2} \sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{\left[\frac{1}{p}, \frac{l+1}{p}\right]} (n\alpha) \\ \leq p^2 \sum_{l=1}^{p-2} \frac{1}{l^2} \left(\sum_{0 < n < q_k} \frac{1}{\left[\frac{1}{p}, \frac{l+1}{p}\right]} (n\alpha) \right) \leq p^2 (q_k/p + 2) \left(\sum_{l=1}^{p-2} 1/l^2 \right),$$

d'après le lemme 2. D'où, la majoration cherchée.

Tout entier n tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$, qui n'est pas de la forme sq_k , pour $1 \leq s \leq a_k$, s'écrit $n = sq_k + r$, avec $1 \leq r < q_k$.

Lemme 5 :

Pour chaque valeur de s , $1 \leq s \leq a_k$, il y a au plus une valeur de n , de la forme $sq_k + r$, $1 \leq r < q_k$, telle que $((n\alpha)) < \frac{1}{4} \frac{1}{q_k}$.

Preuve : S'il existait deux valeurs distinctes de la forme $sq_k + r_i$, $i=1,2$, avec $(((sq_k + r_i)\alpha)) < \frac{1}{4} \frac{1}{q_k}$, $i=1,2$, on aurait $((r_0\alpha)) < \frac{1}{2} \frac{1}{q_k}$, pour un r_0 tel que $1 \leq r_0 < q_k$. Mais ceci contredit les inégalités

$$((r_0\alpha)) \geq ((q_{k-1}\alpha)) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{q_k + q_{k+1}} > \frac{1}{2q_k}$$

Il existe donc au plus a_k valeurs de n , tel que $q_k \leq n < q_{k+1}$, de la forme $sq_k + r$, $1 \leq r < q_k$, vérifiant $((n\alpha)) < \frac{1}{4} \frac{1}{q_k}$. Nous allons montrer que ces valeurs sont nécessairement grandes.

Lemme 6 :

Soit $n = sq_k + r$, avec $1 \leq r < q_k$, $1 \leq s \leq a_k$. Alors la condition $((n\alpha)) < \frac{1}{4q_k}$ implique $s \geq \frac{1}{4} \frac{1}{q_{k+1}}$.

Preuve : Posons $s = \frac{\lambda}{a_k}$. La condition $((n\alpha)) < \frac{1}{4q_k}$ entraîne :

$$((r\alpha)) < \frac{1}{4q_k} + \frac{s}{q_{k+1}} \leq \left(\lambda + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{q_k}$$

D'autre part, on a, pour $1 \leq r < q_{k-1}$:

$$((r\alpha)) \geq ((q_{k-2}^\alpha)) \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_{k-2}} \geq \frac{1}{q_k}$$

6)

et, pour $q_{k-1} \leq r < q_k$: $((r\alpha)) \geq ((q_{k-1}^\alpha)) \geq \frac{1}{q_k + q_{k-2}} \geq \frac{1}{2q_k}$.

Dans le premier cas, on obtient : $\lambda > 3/4$, d'où $sq_k + r \geq \frac{3}{4} a_k q_k \geq \frac{1}{4} q_{k+1}$; dans le deuxième cas, on obtient : $\lambda \geq \frac{1}{4}$, d'où $sq_k + r \geq \frac{1}{4} a_k q_k + r \geq \frac{1}{4} (a_k q_k + q_{k+1}) = \frac{1}{4} q_{k+1}$.

Proposition : Soit $\beta = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q_k^\alpha$ vérifiant la condition $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 / a_k < \infty$. Alors on a : $\sum_{n \neq 0, n \notin J} \frac{((n\beta))^2}{n^2 ((n\alpha))^2} < \infty$, où

$$J = \{n = sq_k, s=1, \dots, a_k; k=1, 2, \dots, \}.$$

Preuve : Dans ce qui suit, il est commode de supposer les $b_i \geq 0$, les calculs n'opérant que sur les valeurs absolues. Remarquons que, si $\beta = \beta_1 + \beta_2$, on a : $((n\beta)) \leq ((n\beta_1)) + ((n\beta_2))$; d'où il résulte :

$$((n\beta)) \leq 2 \sup_{i=1}^{k-1} ((\sum_{i=1}^{k-1} b_i q_i)) ((n\alpha)), \quad n \sum_{i=k}^{\infty} b_i ((q_i^\alpha)).$$

Notons $l(k)$ le plus grand indice $i \leq k-1$ tel que $b_i \neq 0$, et $m(k)$ le plus petit indice $i \geq k$, tel que $b_i \neq 0$.

Soit j un indice tel que $b_j \neq 0$. La condition de la proposition vérifiée par β implique qu'on a : $\sum_{i=1}^{\infty} b_i / a_i = c_1 < \infty$ d'où $\sum_{i=1}^j b_i q_i \leq q_j (b_j + b_{j-1}/a_{j-1} + b_{j-2}/a_{j-2} + \dots + b_1/a_1) \leq q_j (b_j + c_1)$.

Comme $b_j \geq 1$, on a donc : $\sum_{i=1}^j b_i q_i \leq c b_j q_j$, où c est une constante indépendante de j .

De même, si l'on considère la somme $\sum_{i=j}^{\infty} b_i ((q_i^\alpha))$, avec $b_j \neq 0$, on a les majorations :

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^{\infty} b_i ((q_i^\alpha)) &\leq b_j / q_{j+1} + b_{j+1} / q_{j+2} + \dots \leq \\ &\leq \frac{1}{q_{j+1}} [b_j + b_{j+1}/a_{j+1} + b_{j+2}/a_{j+2} + \dots] \leq c b_j / q_{j+1}. \end{aligned}$$

Ces inégalités, compte-tenu de l'inégalité obtenue plus haut, permettent d'écrire :

$((n\beta)) \leq C \sup (b_{1(k)} q_{1(k)} ((n\alpha))) , b_{m(k)} \frac{1}{q_{m(k)+1}} n) ,$ pour tout entier k .

De plus, il est clair que l'on peut remplacer dans la majoration l'un ou l'autre des termes de la parenthèse par 1, ce que nous ferons à plusieurs reprises.

Ces remarques montrent que, pour prouver la proposition, il suffit d'établir les convergences suivantes :

$$(1) = : \sum_k \sum_{\substack{n \in J, q_k \leq n < q_{k+1} \\ \{n : ((n\alpha)) < \frac{1}{q_{1(k)}}\}}} b_{1(k)}^2 q_{1(k)}^2 \frac{1}{n^2} < \infty ;$$

$$(2) = : \sum_k \sum_{\substack{n \in J, q_k \leq n < q_{k+1} \\ \{n : ((n\alpha)) \geq \frac{1}{q_{1(k)}}\}}} b_{1(k)}^2 \frac{1}{n^2 ((n\alpha))^2} < \infty ,$$

$$(3) = : \sum_k \sum_{n \in J \cup J', q_k \leq n < q_{k+1}} b_{m(k)}^2 \frac{1}{q_{m(k)+1}^2} \frac{1}{((n\alpha))^2} < \infty ,$$

$$\text{où } J' = \bigcup_{k=1}^{\infty} ([q_k, q_{k+1} [\cap \{n : ((n\alpha)) < \frac{1}{4 q_k}\}) ;$$

$$(4) = : \sum_{n \in J'} \frac{((n\beta))^2}{n^2 ((n\alpha))^2} < \infty$$

On a, d'après le lemme 3 :

$$(1) \leq C \sum_k b_{1(k)}^2 q_{1(k)}^2 \frac{1}{q_k q_{1(k)}} ,$$

$$(2) \leq C \sum_k b_{1(k)}^2 q_{1(k)} / q_k ,$$

et d'après le lemme 4 :

$$(3) \leq C \sum_k b_{m(k)}^2 \frac{1}{q_{m(k)+1}^2} 4 q_k (q_{k+1} + q_k)$$

$$\leq C \sum_k b_{m(k)}^2 \frac{q_k}{q_{m(k)+1}}$$

La convergence de chacune des trois sommes résulte de l'hypothèse :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 / a_k < \infty$$

Il reste à montrer la convergence de (4) . Il suffit pour cela de prouver :

$$(5) = : \sum_k \sum_{n \in J', q_k \leq n < q_{k+1}} b_{1(k+1)}^2 q_{1(k+1)}^2 \frac{1}{n^2} < \infty ,$$

$$\text{et } (6) = : \sum_k \sum_{n \in J', q_k \leq n < q_{k+1}} b_{m(k+1)}^2 \frac{1}{q_{m(k+1)+1}^2} \frac{1}{((n\alpha))^2} < \infty$$

D'après les lemmes 5 et 6, on a :

$$\begin{aligned} (5) &\leq \sum_k b_{1(k+1)}^2 q_{1(k+1)}^2 \frac{4a_k}{q_{k+1}^2} \\ &\leq C \sum_k b_{1(k+1)}^2 q_{1(k+1)}^2 / q_{1(k+1)+1} \end{aligned}$$

Pour majorer (6), on observe qu'il y a au plus deux éléments $((n\alpha))$ pour $q_k \leq n < q_{k+1}$ dans un intervalle de la forme $[\frac{1}{q_{k+1}}, \frac{1+1}{q_{k+1}}[$,

où 1 est un entier . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} (6) &\leq C \sum_k b_{m(k+1)}^2 \frac{1}{q_{m(k+1)+1}^2} q_{k+1}^2 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} \right) \\ &\leq C \sum_k b_{m(k+1)}^2 q_{k+1}^2 / q_{m(k+1)+1}^2 = C \sum_k b_{m(k+1)}^2 \frac{q_{m(k+1)}^2}{q_{m(k+1)+1}^2} \end{aligned}$$

La convergence de (5) et (6) résulte alors de l'hypothèse.

Démonstration du Théorème.

D'après la proposition, il nous suffit de prouver la convergence :

$$\sum_{n \in J} \frac{((n\beta))^4}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$$

soit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{a_k} \frac{((sq_k\beta))^4}{s^2 q_k^2 ((sq_k\alpha))^2} < \infty$$

En utilisant le même type de majoration que dans la proposition, on se ramène à la convergence de :

$$(7) = : \sum_k b_{1(k)}^2 q_{1(k)}^2 \frac{1}{q_k^2} \left(\sum_{s=1}^{a_k} \frac{1}{s^2} \right),$$

et de (8) = : $\sum_k b_{m(k)}^4 \frac{1}{q_{m(k)+1}^4} \left(\sum_{s=1}^{a_k} \frac{s^2 q_k^2}{s^2} q_{k+1}^2 \right)$.

On a :

$$(7) \leq C \sum_k b_{1(k)}^2 q_{1(k)}^2 / q_k^2 \leq C \sum_k b_{1(k)}^2 q_{1(k)} / q_k,$$

et (8) $\leq C \sum_k b_{m(k)}^4 \frac{a_k q_k^2 q_{k+1}^2}{q_{m(k)+1}^4} \leq C \sum_k b_{m(k)}^4 q_k / q_{m(k)+1}$.

La convergence de (7) et (8) résulte alors de l'hypothèse $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^4 / a_j < \infty$.

Remarques : 1) Par des majorations analogues, on obtient facilement que la convergence de $\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^4}{n^2((n\alpha))^2}$ résulte de l'une des hypothèses suivantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{2+\varepsilon} / a_k^{\varepsilon} < \infty \quad \text{pour un } \varepsilon \text{ tel que } 0 < \varepsilon < 1 ;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^3 \log a_k}{a_k} < \infty ;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{3+\varepsilon} / a_k < \infty , \quad \text{pour un } \varepsilon > 0 .$$

De plus, la convergence de $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{2+\varepsilon} / a_k^{\varepsilon}$, pour un ε , $0 < \varepsilon < 1$ implique la convergence de

$$\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^{2+\varepsilon}}{n^2((n\alpha))^2} . \text{ Il existe donc, pour tout } \varepsilon > 0, \text{ et pour tout } \alpha \text{ de}$$

type non constant, une infinité de nombres β tels que la série

$$\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^{2+\varepsilon}}{n^2((n\alpha))^2} < \infty \text{ converge .}$$

2) Le cas $\varepsilon = 0$ est exceptionnel de ce point de vue . En effet, soit β tel que $\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^2}{n^2((n\alpha))^2} < \infty$. Montrons , suivant la méthode simple donnée dans [4] par Petersen, qu'on a nécessairement $\beta = p\alpha$, pour un entier p .

Considérons la fonction $h = 1_{[0, \beta[}^{-\beta}$. Ses coefficients de Fourier sont $\frac{1}{2\pi i n} (e^{2\pi i n \beta} - 1)$. L'existence d'une solution $\psi \in L^2$ de

l'équation fonctionnelle $T_{\alpha} \psi - \psi = h$ résulte immédiatement de la convergence de la série $\sum_{n \neq 0} \frac{|e^{2\pi i n \beta} - 1|^2}{n^2 |e^{2\pi i n \alpha} - 1|^2}$, soit encore de la convergence de

$$\sum_{n \neq 0} \frac{((n\beta))^2}{n^2((n\alpha))^2} < \infty . \text{ On est donc dans le cas de l'existence}$$

d'une solution mesurable ψ de l'équation $T_{\alpha} \psi - \psi = h$. Posons

$$\phi = \exp(2\pi i \psi) . \text{ On a } \exp(2\pi i h) = e^{-2\pi i \beta}, \text{ d'où } T_{\alpha} \phi = e^{-2\pi i \beta} \phi .$$

Ainsi $e^{2\pi i \beta}$ est une valeur propre de la rotation d'angle α et donc

$$\beta = p\alpha \text{ pour un entier } p .$$

Nous allons appliquer des raisonnements analogues à d'autres équations fonctionnelles.

3 - Equations fonctionnelles

Soient γ_1 et γ_2 deux nombres réels. Considérons la différence entre la fonction caractéristique de l'intervalle $]0, \gamma_1[$ et sa translatée par γ_2 sur le cercle, soit

$$h = \chi_{]0, \gamma_1[} - \chi_{] \gamma_2, \gamma_1 + \gamma_2[}$$

Les coefficients de Fourier de h sont donnés par

$$\hat{h}(n) = \frac{1}{2\pi i n} (e^{2\pi i n \gamma_1} - 1)(e^{2\pi i n \gamma_2} - 1).$$

Il est facile d'en déduire que l'équation fonctionnelle

$$T_\alpha \psi - \psi = h \quad (**)$$

possède une solution $\psi \in L^2$, si et seulement si la série

$$\sum_{n \neq 0} \frac{((n\gamma_1))^2 ((n\gamma_2))^2}{n^2 ((n\alpha))^2}$$

converge. D'après le théorème, cette série

converge si les nombres γ_1 et γ_2 sont de la forme $\sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i \alpha$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^4 / a_i < \infty$ (ou sous les conditions de la remarque 2). Si

α est de type non constant, il existe donc une infinité non dénombrable de valeurs de γ_1 et de valeurs de γ_2 telles que l'équation (**) ait une solution $\psi \in L^2(X)$.

Ceci répond, par la négative, à une question de [2] : l'existence d'une solution de (**) dans L^2 n'implique pas que γ_1 ou γ_2 est de la forme $p\alpha$, avec p entier (cf. remarque 2). Par contre, on sait, d'après [5], que l'existence d'une solution dans L^∞ de (**) implique que γ_1 ou γ_2 est un multiple entier de α .

L'équation (**) peut être utilisée pour résoudre l'équation multiplicative $T_\alpha \phi = \phi f$ (*),

$$\text{avec } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 2t \\ -1, & 2t \leq x < 1 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un réel fixé } 0 < t < 1.$$

On a $f = \exp \pi i (1_{[0,t[} - 1_{[t,2t[})$. Il résulte donc du théorème que, si $t = \sum_{i=1}^{\infty} b_i q_i \alpha$, avec $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^4 / a_i < \infty$, l'équation (*) a une solution mesurable non nulle. On retrouve ainsi, partiellement (par exemple si les b_i sont bornés), le résultat de W. Veech [1], qui établit l'existence d'une solution mesurable non nulle ϕ pour l'équation (*), sous la condition $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| / a_i < \infty$.

On peut demander si l'existence d'une solution mesurable de l'équation additive (**) résulte de la condition $\sum_{i=1}^{\infty} b_i / a_i < \infty$. Une réponse positive montrerait que la solution de l'équation multiplicative est l'exponentielle d'une solution de l'équation additive, sous l'hypothèse utilisée dans [1].

Remarque : Soit g définie par

$$g(x) = 1_{[0,s[} - 1_{[s,1[} + 1_{[0,t[}, \text{ avec } t = 1 - 2s \pmod{1}. \text{ On a encore :}$$

$\exp \pi i g = f$, et l'équation fonctionnelle $T_\alpha \psi - \psi = g$ a une solution ψ dans L^2 si et seulement si la série $\sum \frac{((ns))^4}{n^2 (n\alpha)^2} < \infty$,

compte-tenu de l'inégalité $|2e^{2\pi i ns} + e^{-4\pi i ns} - 3| \leq 16 \sin^2 \pi ns$.

Références :

- [1] W. Veech : Strict ergodicity and the Kronecker-Weyl Theorem mod 2, Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 1-33.
- [2] K. Petersen : The spectrum and commutant of a certain weighted translation operator, Math. Scand. 37 (1975), 297-306.

- [3] J.W. Cassels : An introduction to diophantine approximation,
Cambridge Univ. Press (1957) .
- [4] K. Petersen : On a series of cosecants related to a problem in
ergodic theory, Compositio Math. 26 (1973) 313-317 .
- [5] L. Shapiro : Irregularities of distribution in dynamical systems
Recent Advances in topological dynamics, Springer-Verlag,
(1973), 249-252 .

CONZE Jean-Pierre
Département de Mathématiques
Laboratoire de Probabilités
Avenue du Général Leclerc
35042 Rennes
France