

JON AARONSON

Sur le jeu de Saint-Pétersbourg

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3

« Séminaire de probabilités II », , p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__3_A3_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE JEU DE SAINT-PETERSBOURG

Jon Aaronson

Abstract : We prove a result on the asymptotic behaviour of the partial sums of N -valued i.i.d.r.v.s. On the basis of this result, we discuss the "fairness" of the Saint-Petersburg game.

Résumé : Nous démontrons un résultat sur le comportement asymptotique des sommes partielles variables aléatoires, indépendantes, de même loi, à valeurs dans N . A partir de ce résultat, nous discutons le caractère équitable du jeu de Saint-Pétersbourg.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité et soit $x_n : \Omega \rightarrow N(n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires, indépendantes, de loi :

$$P(x_n = k) = f_k, \quad n, k \geq 1.$$

Nous utilisons les notations suivantes :

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad c_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n, \quad L(t) = \int_0^t c[s] ds, \quad a(t) = \frac{t}{L(t)} \quad \text{et} \\ b(t) = a^{-1}(t).$$

Cette dernière est bien définie pour t grand, parce que $a(t)$ est une fonction strictement croissante continue.

La loi faible de grands nombres pour de telles variables aléatoires (non nécessairement intégrables) a été démontrée par W. Feller (cf. [2]) :

Théorème de Feller :

$$\exists b_n \text{ telle que } \frac{s_n}{b_n} \xrightarrow{p} 1$$

ssi $L(t)$ est une fonction à croissance lente.

Dans ce cas : $b_n \sim b(n)$.

On dit que $h(t)$ est (une fonction) à croissance régulière d'indice α si

$$\frac{h(\lambda t)}{h(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \lambda^\alpha \quad \forall \lambda > 0,$$

c'est que $h(t)$ est à croissance lente si on a la condition précédente avec $\alpha = 0$.

Il n'est pas difficile de voir que si $L(t)$ est à croissance lente, alors $b(t)$ est à croissance régulière d'indice 1. Il résulte donc, facilement du lemme de Borel-Cantelli que (résultat bien connu) :

Proposition

$$\text{Si } \frac{s_n}{b_n} \xrightarrow{p} 1 \text{ et } E(x_1) = \infty$$

$$\text{alors } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{b_n} = \infty \text{ p.s.}$$

Il est démontré dans [2] que $L(t)$ est à croissance lente ssi

$$\log L(t) = x(t) + \int_0^t \varepsilon(s) ds \text{ ou } x(t) \rightarrow x \text{ et } \varepsilon(t) = o(1/t) \text{ que } t \rightarrow \infty$$

Nous considérons la propriété plus forte :

$$(*) \text{ Log } L(t) = x(t) + \int_0^t \varepsilon(s) ds \quad \text{ou} \quad x(t) \rightarrow x \quad \text{et} \quad \varepsilon(t) = o(1/t \log \log t) \\ \text{que } t \rightarrow \infty.$$

Nous démontrons le :

Théorème :

Si $L(t)$ a la propriété (*), alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{b(n)} \geq e^{-1} \quad \text{p.s.}$$

mais avant cela, nous discutons :

Le Jeu de Saint-Petersbourg

Un tour du jeu consiste en la procédure suivante :

Le joueur A jette une pièce jusqu'à la première apparition de "face" et paye au joueur B :

2^{nombre de jets} pièces .

Si x_n est la somme que A paye au n^{ième} tour, alors les $\{x_n\}$ sont des variables aléatoires, indépendantes, de loi

$$p(x_n = 2^k) = 2^{-k}, \quad \text{et donc, } L(t) \sim \text{Log}_2 t \quad \text{que } t \rightarrow \infty$$

Grâce au théorème de Feller :

$$\frac{1}{n \text{Log}_2 n} s_n \xrightarrow{P} 1$$

Une interprétation de ce résultat a été donnée dans [1] (où on peut trouver une autre démonstration) : le jeu de St Pétersbourg est "équitable au sens classique" si B paye à A des "droits d'entrée cumulés" s'élevant à $b_n \sim n \text{Log}_2 n$ pièces pour sa participation aux n premiers tours.

Notre résultat remet ce concept d'"équitable" en question, parce que la proposition et le théorème ($\text{Log}_2 t$ a la propriété (*)) donnent :

$$\frac{1}{e} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n \log_2 n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n \log_2 n} = \infty \quad \text{p.s.}$$

C'est-à-dire, avec le règlement ci-dessus, le joueur B est, p.s., avantageé.

Démonstration du Théorème

Pour commencer, nous réduisons le problème à la forme intégrable (iv).

Soit :

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{[s_k=n]} \quad (n \geq 1), \quad u_n = E(\varepsilon_n), \quad \psi_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \quad \text{et} \quad \phi_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varepsilon_n.$$

D'abord, si

$$(i) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{a(n)} \leq e \quad \text{p.s.}$$

nous avons, grâce à la croissance régulière de $a(t)$ que $\forall \varepsilon > 0$:

$$\psi_n(\omega) \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) e \quad a(n) \leq a((1 + \varepsilon)n) \quad \forall n \geq N(\omega, \varepsilon) \quad \text{p.s.}$$

et, parce que : $s_n \geq n$, $\psi_{s_n} \equiv n$, et $b = a^{-1}$:

$$s_n(\omega) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{b(n)}{e} \quad \forall n \geq N(\omega, \varepsilon) \quad \text{p.s.}$$

Il est donc suffisant d'établir (i).

$$\text{Ensuite, soit } u(\lambda) = E(\phi_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \quad c(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$$

$$\text{et } \lambda_n = 1 - \frac{1}{n}.$$

Grâce à l'indépendance de $\{x_n\}$:

$$(ii) \quad u(\lambda) = ((1 - \lambda) c(\lambda))^{-1}$$

et, en raison de la croissance lente de $L(t)$:

$$(iii) \quad c(\lambda) \sim L\left(\frac{1}{1 - \lambda}\right) \quad \text{que } \lambda \rightarrow 1^- \quad (\text{le théorème de Karamata, cf. [2]}) /$$

Il est maintenant suffisant d'établir :

$$(iv) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_{\lambda_n}}{u(\lambda_n)} \leq 1 \quad \text{p.s.}$$

parce que : $u(\lambda_n) \sim a(n)$ et $\phi_{\lambda_n} \geq (1 - \frac{1}{n})^n \psi_n$.

Le reste de cette note est une démonstration de (iv) en utilisant la propriété (*), et l'inégalité de Tchebycheff.

Soit, pour $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (0,1)$: $A(p, \lambda) = E((\phi_{\lambda}/u(\lambda))^p)$, et, pour $M > 1$: $p_n(M) = [M \log n] + 1$, $A_n(M) = A(p_n(M), \lambda_n)$.

Lemme : Si, pour tout $M > 1$: $\log A_n(M) = o(\log n)$ que $n \rightarrow \infty$ alors (iv) est vrai.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'inégalité de Tchebycheff :

$$\begin{aligned} P(\phi_{\lambda_n} \geq e^{\varepsilon} u(\lambda_n)) &\leq e^{-\varepsilon p_n(\frac{2}{\varepsilon})} A_n(\frac{2}{\varepsilon}) \\ &\leq A_n(\frac{2}{\varepsilon}) / n^2 \\ &\leq n^{-3/2} \quad \text{pour grand } n. \end{aligned}$$

Donc, p.s., $\phi_{\lambda_n} \geq e^{\varepsilon} u(\lambda_n)$ seulement pour un nombre fini de n . $\square$

Nous estimons maintenant le : $A_n(M)$.

En raison de l'indépendance de $\{x_n\}$:

$$E(\varepsilon_{n_1} \varepsilon_{n_2} \varepsilon_{n_3} \dots \varepsilon_{n_p}) = u_{n_1} u_{n_2 - n_1} \dots u_{n_p - n_{p-1}} \quad \text{pour } n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_p$$

et, en conséquence :

$$E(\phi_{\lambda}^p) \leq p! \prod_{k=1}^p u(\lambda^k) \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Soit $L_1(t) = c(1 - \frac{1}{t})$, alors :

$$c(\lambda^k) = L_1(\frac{1}{1-\lambda^k}) \geq L_1(\frac{1}{k} (\frac{1}{1-\lambda}))$$

et donc, par (ii) :

$$E(\phi_{\lambda_n}^p) \leq p! \prod_{k=1}^p ((1-\lambda_n^k) L_1(\frac{n}{k}))^{-1}$$

De plus, parce que $\lambda_n \leq e^{-1/n}$:

$$\frac{1}{1-\lambda_n^k} \leq \frac{e^{k/n}}{e^{k/n-1}} \leq \frac{n}{k} e^{k/n}$$

Nous avons :

$$E(\phi_{\lambda_n}^p) \leq n^p e^{\frac{p(p+1)}{2n}} \prod_{k=1}^p (1/L_1(\frac{n}{k}))$$

et, par (ii) :

$$A(p, \lambda_n) \leq e^{\frac{p(p+1)}{2n}} \prod_{k=1}^p (L_1(n)/L_1(\frac{n}{k}))$$

Par (iii), la fonction $L_1(t)$ a la propriété (*), et donc :

$$\begin{aligned} \text{Log } A_n(M) &\leq \frac{p_n(M)^2}{n} + \sum_{k=2}^{p_n(M)} (\text{Log } L_1(n) - \text{Log } L_1(\frac{n}{k})) \\ &\leq \frac{p_n(M)^2}{n} + \sum_{k=2}^{p_n(M)} |x(n) - x(\frac{n}{k})| + \sum_{k=2}^{p_n(M)} \int_{\frac{n}{k}}^n |\varepsilon(s)| ds \\ &= \alpha_n + \beta_n + \gamma_n . \end{aligned}$$

Il est clair que :

$$\alpha_n \rightarrow 0, \quad \beta_n = o(p_n(M)) = o(\log n) \quad \text{que } n \rightarrow \infty$$

parce que
$$\frac{p_n(M)}{n} \leq \frac{2M \text{Log } n}{n} \rightarrow 0 .$$

En utilisant la propriété (*), nous avons :

$$\gamma_n \leq p_n(M) \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} |\varepsilon(s)| ds$$

$$= o(p_n(M)) \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} \frac{ds}{s \log \log s} \quad \text{que } n \rightarrow \infty ,$$

parce que $\frac{n}{p_n} \rightarrow \infty$.

Nous terminons la démonstration du théorème en montrant que la dernière somme est bornée.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \int_{\frac{n}{k+1}}^{\frac{n}{k}} \frac{ds}{s \log \log s} &\leq \sum_{k=1}^{p_n(M)-1} \frac{1}{k} \frac{1}{\log \log \frac{n}{k+1}} \\ &\leq \frac{\log p_n(M)}{\log \log \frac{n}{p_n(M)}} \rightarrow 1 \quad \text{que } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

Références :

- [1] W. Feller : Introduction to Probability Theory and its applications
Wiley N.Y. vol. 1
- [2] Ibid : vol. 2