

CHRISTIAN RICHARD

Temps d'entrée dans $]0, \infty[$ et maxima de sommes partielles de variables aléatoires indépendantes et de même loi (d'après N.H. Bingham)

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1977, fascicule 3

« Séminaire de probabilités II », , p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1977__3_A10_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TEMPS D'ENTREE DANS $]0, \infty[$ ET MAXIMA
DE SOMMES PARTIELLES DE VARIABLES ALEATOIRES
INDEPENDANTES ET DE MEME LOI (D'APRES N.H. BINGHAM)

Christian RICHARD

I - Introduction et notations

Le but de ce papier est l'étude asymptotique du maximum des sommes partielles de variables aléatoires (X_k) indépendantes et de même loi ; $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ (avec $S_k = X_1 + \dots + X_k$).

Cette étude donne des résultats différents selon qu'on a ou non une certaine condition de centrage sur les X_i .

Nous nous intéresserons ici essentiellement au cas centré, et nous montrerons qu'on peut alors donner une estimation de la probabilité pour que M_n appartienne à un intervalle I (compact) : $P(M_n \in I)$.

En particulier, nous obtenons que si les X_i sont symétriques (sans autre condition) ou si les X_i sont centrées et admettent un moment d'ordre 2, alors $P(M_n \in I)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ces résultats se trouvent dans [1] et [2].

La rédaction donnée ici s'inspire de ces articles et en

simplifie certains passages.

$$S_0 = 0 \quad , \quad S_n = X_1 + \dots + X_n \quad , \quad M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$$

(X_n) indépendantes, de même loi μ

$$T = \inf\{n \geq 1 \mid S_n > 0\} \quad T'^* = \inf\{n \geq 1 \mid S_n \leq 0\}$$

soit ν la loi de S_T et $V = \sum_{n \geq 0} \nu^{*n}$

II - Remarque préliminaireThéorème 1

Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^n P(S_r \leq 0) \rightarrow \gamma$ quand $n \rightarrow \infty$, avec $0 < \gamma < 1$,

alors la fonction L définie par

$$L\left(\frac{1}{1-s}\right) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma] \text{ est à variation}$$

lente quand $s \uparrow 1$.

Démonstration :

- Soit H la mesure suivante

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} [P(S_k \leq 0) - \gamma] \epsilon_k$$

- Définissons les fonctions suivantes :

$$(1) \quad A(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t} e^{-\lambda t} dH(t)$$

$$(2) \quad a(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dH(t)$$

$$(3) \quad \ell(\lambda) = e^{A(\lambda)}$$

* En posant $s = e^{-\lambda}$ on a alors

$$- \quad A(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma]$$

$$- \quad a(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k [P(S_k \leq 0) - \gamma]$$

$$- \quad L\left(\frac{1}{1-s}\right) = \ell(\lambda)$$

* d'autre part, on a

$$\frac{d}{d\lambda} A(\lambda) = -a(\lambda) \quad (4)$$

D'après (2), on obtient

$$\lambda a(\lambda) = \lambda (1-e^{-\lambda})^{-1} (1-s) \sum_{k=1}^{\infty} s^k [P(S_k \leq 0) - \gamma] \quad (5)$$

où on a posé $s = e^{-\lambda}$

* Posons $a_k = [P(S_k \leq 0) - \gamma]$

Notre hypothèse est rappelons-le $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^n a_r \rightarrow 0$

Il est connu (théorème d'Abel) qu'alors on a

$$(1-s) \sum_{k=1}^{\infty} s^k a_k \rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow 1 \quad (\text{i.e. } \lambda \rightarrow 0)$$

puisque $(1-e^{-\lambda}) \sim \lambda$ quand $\lambda \rightarrow 0$, on aura d'après (5)

$$\lambda a(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0 \quad (6)$$

Comme de (3) et (4), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\rho\lambda)}{\ell(\lambda)} &= \exp |A(\rho\lambda) - A(\lambda)| = \exp \left| -\int_{\lambda}^{\rho\lambda} a(u) du \right| \\ &= \exp \left| -\int_1^{\rho} t\lambda a(t\lambda) \frac{dt}{t} \right| \quad \text{pour } \rho > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

il résultera alors de (6) et (7) que :

$$\frac{\ell(\rho\lambda)}{\ell(\lambda)} \rightarrow 1 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0$$

ce qui signifie que $\ell(\lambda)$ est à variation lente à zéro et par conséquent que $L(\frac{1}{1-s})$ est à variation lente quand $s \rightarrow 1$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Remarques sur le théorème 1 :

- 1) L'hypothèse du théorème exprime une condition de centrage puisque :

$$a- EX_1 > 0 \implies P\left(\frac{S_n}{n} \leq 0\right) \rightarrow 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - EX_1\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \text{ d'après} \\ \text{la loi faible des grands nom-} \\ \text{bres} \end{array} \right)$$

$$b- EX_1 < 0 \implies P\left(\frac{S_n}{n} \leq 0\right) \rightarrow 1 \quad (\text{on change } X_i \text{ en } -X_i)$$

Plus précisément

$$- \text{ Si } EX_1 < 0 \text{ alors } P(S_n > 0) = P\left(\frac{S_n}{n} > 0\right) \geq P\left(\left|\frac{S_n}{n} - EX_1\right| \geq EX_1\right)$$

et d'après le théorème suivant (Katz)

$$\left| \begin{array}{l} \alpha \geq 1 \\ E |X_1|^\alpha < \infty \end{array} \right. \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - EX_1\right| \geq \varepsilon\right)}{n^{2-\alpha}} < +\infty$$

la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} P(S_k > 0)$ est convergente

Le comportement de M_n est alors relativement simple puisque $S_n \rightarrow -\infty$ p.s. donc M_n est p.s. borné. La limite p.s.

$M = \lim_n M_n$ a été étudiée : (cf [5] P 2 page 207). Les arguments employés pour cette étude sont du même type que ceux que nous utiliserons par la suite dans le cas centré.

- Si $EX_1 > 0$ l'étude est analogue.

- Il s'avère donc que le cas le plus difficile est celui où $EX_1 = 0$.

2) Précisons un peu L sur des exemples

a- Considérons le cas

$$\begin{cases} EX_i = 0 \\ EX_i^2 = 1 \\ E|X_i|^{2+\delta} < \infty \quad \text{avec } \delta > 0 \end{cases}$$

Il résulte du théorème central limite que :

$$P(S_n > 0) = P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > 0\right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \quad (\text{d'où } \gamma = \frac{1}{2})$$

et en conséquence grâce au théorème de vitesse de convergence, on peut dire que sous l'hypothèse $E|X_i|^{2+\delta} < \infty$ on a

$$\left| P(S_n > 0) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\text{cste}}{n^{\delta/2}} \quad (\text{"cste"} = \text{constante})$$

La série $c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\}$ est alors absolument convergente puisque $\left| \frac{1}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\} \right| \leq \frac{\text{cste}}{k^{1+\delta/2}}$

$$\text{Il en résulte que } \lim_{s \uparrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \{P(S_k > 0) - \frac{1}{2}\} = c$$

d'où $L\left(\frac{1}{1-s}\right) \sim e^{-c}$ quand $s \uparrow 1$

b- Si X_i a une loi symétrique diffuse, alors

$$P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2} \quad \forall n, \text{ donc } \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\text{Alors } L\left(\frac{1}{1-s}\right) = 1$$

Corollaire :

Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^n P(S_r > 0) \rightarrow \rho$ avec $0 < \rho < 1$ Alors $\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(S_k \leq 0) = \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad 0 \leq s < 1$

Démonstration :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} = \text{Log } \frac{1}{1-s}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(S_k \leq 0) &= \frac{1}{(1-s)^{\gamma}} \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} [P(S_k \leq 0) - \gamma] \\ &= \frac{1}{(1-s)^{\gamma}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \quad \text{où } \gamma = 1 - \rho \end{aligned}$$

on peut en effet appliquer le théorème 1 avec $1 - \rho$ puisque

$$\frac{1}{n} \sum_{r=0}^n P(S_r \leq 0) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{n=0}^n P(S_r > 0) \quad \square$$

III - Objet de l'étude

Nous voulons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2

Si $\frac{1}{n} \sum_{r=0}^n P(S_r > 0) \rightarrow \rho$ quand $n \rightarrow \infty$ avec $0 < \rho < 1$ alors $\mu_n = \frac{n^{\ell}}{L(n)} \Gamma(1-\rho) P(M_n \in \cdot)$ vaguement $\rightarrow V$

(où L désigne la fonction à variation lente définie au théorème 1).

IV - Début de la démonstration

Comme on a $M_n \geq 0$ (puisque $M_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k$ et $S_0 = 0$) le résultat cherché équivaut à une convergence sur les transformées de Laplace i.e.

$$\forall \lambda \geq 0 \quad \tilde{\mu}_n(\lambda) \rightarrow \tilde{V}(\lambda) \quad (\text{où } \tilde{\mu}(\lambda) = \int e^{-\lambda x} d\mu(x))$$

En d'autres termes, il s'agit de montrer que :

$$E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{L(n) \tilde{V}(\lambda)}{n^\ell \Gamma(1-\ell)}$$

Mais comme $E(e^{-\lambda M_n})$ est une suite monotone en n , il est équivalent de montrer que :

$$\sum_{r=0}^n E(e^{-\lambda M_r}) \sim \frac{n^{1-\ell}}{\Gamma(2-\ell)} L(n) \tilde{V}(\lambda)$$

En effet, on a le lemme suivant : (facile)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Soit } L \text{ une fonction à variation lente, } \{a_n\} \text{ une suite} \\ \text{monotone telle que } q_n \geq 0, 0 < \alpha < \infty \\ \text{Alors } q_0 + q_1 + \dots + q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} n^\alpha L(n) \iff \\ q_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)} n^{\alpha-1} L(n) \end{array} \right.$$

il suffit donc d'appliquer le théorème 1 et de poser $\alpha = 1-\rho$.

On doit donc démontrer que

$$\sum_{r=0}^n E(e^{-\lambda M_r}) \sim \frac{n^{1-\rho}}{\Gamma(2-\rho)} L(n) \tilde{V}(\lambda)$$

Rappelons l'énoncé du théorème de Karamata (cf [4], sec-

tion XIII, 5, théorème 5, p.423)

$$\left[\begin{array}{l} \text{Si } a_n \geq 0 \quad \phi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \quad \alpha > 0, \text{ alors} \\ a_0 + \dots + a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} n^\alpha L(n) \iff \phi(s) \sim \frac{1}{(1-s)^\alpha} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \\ \text{quand } s \uparrow 1 \text{ où } L \text{ est à variation} \\ \text{lente.} \end{array} \right.$$

Appliquons-le à $a_r = E(e^{-\lambda M_r})$. Alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \tilde{V}(\lambda)$$

D'autre part :

$$V = \sum_{n \geq 0} v^{*n} \implies \tilde{V}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} v^{*n}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} [\tilde{V}(\lambda)]^n = \frac{1}{1 - \tilde{V}(\lambda)}$$

Il est donc équivalent de montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \frac{1}{(1-s)^{1-\rho}} L\left(\frac{1}{1-s}\right) \cdot \frac{1}{1 - E(e^{-\lambda S_T})}$$

ou encore grâce au corollaire

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) \sim \left[\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} P(S_k \leq 0) \right] \cdot \frac{1}{1 - E(e^{-\lambda S_T})} \quad (1)$$

V - Démonstration de (1)

Pour obtenir (1), il est naturel d'essayer

1°) d'exprimer les lois des M_n en fonction de la loi de (T, S_T)

2°) d'exprimer les relations entre (T, S_T) et les lois individuelles des (S_n) .

~ 1°- Grâce à un lemme de dualité la première partie est facile :

Proposition 1

$$0 \leq s < 1 \quad \lambda > 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} s^\ell E(e^{-\lambda S_\ell}; T'_\ell \leq \ell \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(T, m) \right]$$

Démonstration :

$$\text{Posons } T'_n = \inf\{k \in [1, n] / S_k = M_n\}$$

$$\text{On a } E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^n E(e^{-\lambda M_n}, T'_n = k) \quad (\text{car les } [T'_n = k] \text{ sont disjoints})$$

$$= \sum_{k=0}^n E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} \leq S_k, \dots, S_n \leq S_k)$$

$$= \sum_{k=0}^n E(e^{-\lambda S_k} \mathbf{1}_{[S_0 < S_k] \cap \dots \cap [S_{k-1} < S_k]})$$

A

$$\mathbf{1}_{[S_{k+1} \leq S_k] \cap \dots \cap [S_n \leq S_k]}$$

B

Les variables aléatoires A et B sont indépendantes car dans A n'interviennent que $X_1, \dots, X_k$ et dans B n'interviennent que $X_{k+1}, \dots, X_n$ et les (X_i) sont indépendantes.

Donc :

$$E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^n E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k) P(S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_n \leq S_k)$$

$$a) \text{ On a : } P(S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_n \leq S_k) = P(T > n-k)$$

En effet :

→ Remarquons d'abord que les variables aléatoires

$(X_1, \dots, X_k, S_k)$ et $(X_1^*, \dots, X_k^*, S_k^*)$ où

$$X_1^* = X_k, \dots, X_k^* = X_1, S_k^* = S_k$$

ont mêmes lois jointes parce que les (X_i) sont indépendantes et de même loi.

[NB : Ceci est connu et utilisé sous le nom de principe de dualité
(cf [4] section XII.2, p.377)]

→ Donc

$$P(S_{k+1} \leq S_k, \dots, S_n \leq S_k) = P(X_{k+1} \leq 0, \dots, X_{k+1} + \dots + X_n \leq 0)$$

$$= P(X_1 \leq 0, \dots, X_1 + \dots + X_{n-k} \leq 0)$$

$$= P(S_1 \leq 0, \dots, S_{n-k} \leq 0)$$

$$= P(T > n-k)$$

b) On a :

$$E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k) = E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k)$$

En effet :

On obtient toujours grâce à la même remarque que :

$$\begin{aligned} E(e^{-\lambda S_k}, S_0 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k) \\ &= E(e^{-\lambda S_k^*}, S_0^* < S_k^*, \dots, S_{k-1}^* < S_k^*) \\ &= E(e^{-\lambda S_k^*}, S_k > 0, \dots, S_1 > 0) \\ &= E(e^{-\lambda S_k}, S_1 > 0, \dots, S_k > 0) \\ &= E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k) \end{aligned}$$

c) Finalement, on a obtenu :

$$E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{k=0}^n E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k) P(T > n-k)$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n s^k E(e^{-\lambda S_k}; T'^* > k) s^{n-k} P(T > n-k)$$

↓

ceci existe car $E(e^{-\lambda M_n}) < 1$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda M_n}) = \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell} E(e^{-\lambda S_{\ell}}; T'^* > \ell) \right] \cdot \left[\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(T > m) \right]$$

□

~ 2~ Pour obtenir (1), il suffit donc de montrer que :

Proposition 2

$$\log\left(\sum_{m=0}^{\infty} s^m P(T > m)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(S_n \leq 0) \quad (A)$$

$$\frac{1}{1 - E(s^T e^{-\lambda S_T})} = \sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell} E(e^{-\lambda S_{\ell}} ; T'^{*} > \ell) \quad (B)$$

De telles égalités ne sont pas évidentes, elles nécessitent des ingrédients puissants (lemmes combinatoires, ou théorèmes sur les fonctions analytiques) ; elles sont toutefois aujourd'hui classiques. Nous reproduisons ici l'essentiel des démonstrations connues afin de rendre ce papier plus intrinsèque. Voici deux méthodes :

[a) Utilisation des fonctions analytiques (démonstration complète)

Les relations (A) et (B) résultent immédiatement de la proposition suivante où l'on fait $\theta = -\lambda$ (λ réel) dans (a) et (c) et $\theta = 0$ dans (b).

Proposition 2bis

$$\begin{aligned} (a) \quad 1 - E(s^T e^{\theta S_T}) &= \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} ; S_k > 0)\right] \\ (b) \quad \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{\theta S_k} ; T > k) &= \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} ; S_k \leq 0)\right] \\ (c) \quad \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{\theta S_k} ; T'^{*} > k) &= \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} ; S_k > 0)\right] \\ (d) \quad 1 - E(s^{T'^{*}} e^{\theta S_{T'^{*}}}) &= \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k} ; S_k \leq 0)\right] \end{aligned}$$

où $0 \leq s < 1$ partout et $\operatorname{Re} \theta \leq 0$ dans (a) et (c)
($\theta \in \mathbb{C}$)
 $\operatorname{Re} \theta \geq 0$ dans (b) et (d)
 (Re = partie réelle)

(On comparera à la démonstration faite dans le cas de v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, au lieu de $\mathbb{R}$, faite dans [5], p.181)

Il suffit de démontrer (a) et (b) ; la démonstration de (c) et (d) serait analogue.

Démonstration :

Posons, pour $\operatorname{Re} \theta \leq 0$:

$$f(\theta) = [1 - E(s^T e^{\theta S_T})] \cdot \exp\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k}, S_k > 0)\right]$$

et pour $\operatorname{Re} \theta \geq 0$:

$$g(\theta) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{\theta S_k}, T > k)\right] \cdot \exp\left[-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{\theta S_k}, S_k \leq 0)\right]$$

Il s'agit de montrer que :

$$f(\theta) = 1 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \theta \leq 0$$

$$g(\theta) = 1 \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re} \theta \geq 0$$

Pour cela, il suffit de faire les remarques suivantes :

$$1^\circ) \quad \text{Grâce aux relations évidentes} \quad \begin{cases} S_T > 0 \\ S_k \leq 0 \quad \text{pour} \quad T > k \end{cases}$$

On voit que ces fonctions sont holomorphes donc analytiques sur les domaines respectifs $\operatorname{Re} \theta < 0$ et $\operatorname{Re} \theta > 0$, continues et bornées

sur $\operatorname{Re} \theta \leq 0$ et $\operatorname{Re} \theta \geq 0$. (facile).

2°) Montrons que $f(\theta) = g(\theta)$ pour $\operatorname{Re} \theta = 0$

Posons $\theta = i\alpha$

Par définition de f et g , il suffit de voir que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k}, T > k) = [1 - E(s^T e^{i\alpha S_T})] \cdot \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{i\alpha S_k})$$

Puisque :

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k} 1_{[T > k]}) = E\left(\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}\right) \text{ car } 1_{[T > k]} = 0 \text{ pour } k \geq T$$

et

$$\rightarrow \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} E(e^{i\alpha S_k}) = \exp(-\operatorname{Log}(1 - \hat{s}\mu(\alpha))) = \frac{1}{1 - s\mu(\alpha)} \quad (\text{où } \hat{s} \text{ est la fonction caractéristique de } \mu)$$

On peut réécrire l'égalité à démontrer sous la forme :

$$E\left[\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = \frac{1}{1 - s\mu(\alpha)} [1 - E(s^T e^{i\alpha S_T})]$$

Or ceci est facile à vérifier. En effet,

$$E\left[\sum_{k=0}^{T-1} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] - E\left[\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right]$$

Il n'y a pas de problème de convergence car $0 \leq s < 1$

$$- E\left[\sum_{k=0}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha S_k}) \quad (\text{d'après le théorème de Lebesgue})$$

$$= \frac{1}{1 - s\mu(\alpha)}$$

- D'autre part

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(s^{T+k} e^{i\alpha S_{T+k}}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(s^T e^{i\alpha(S_{T+k}-S_T)} e^{i\alpha S_T})
\end{aligned}$$

Mais $S_{T+k}-S_T$ est indépendant de T et S_T d'où

$$E\left[\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right] = E(s^T e^{i\alpha S_T}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s^k E(e^{i\alpha(S_{T+k}-S_T)})$$

d'où

$$E\left(\sum_{k=T}^{\infty} s^k e^{i\alpha S_k}\right) = E(s^T e^{i\alpha S_T}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} s^k \hat{\mu}(\alpha) \quad (\text{car } S_{T+k}-S_T \text{ a même loi que } S_k)$$

$$= \frac{1}{1-s\mu(\alpha)} \cdot E(s^T e^{i\alpha S_T})$$



3°) $\left[\begin{array}{l} \text{Les fonctions } f \text{ et } g \text{ sont donc analytiques,} \\ \text{respectivement sur } \operatorname{Re} \theta < 0 \text{ et } \operatorname{Re} \theta < 0, \text{ conti-} \\ (-) \text{ nues et bornées sur } \operatorname{Re} \theta \leq 0 \text{ et } \operatorname{Re} \theta \geq 0. \text{ D'autre} \\ \text{part elles sont égales sur } \operatorname{Re} \theta = 0. \end{array} \right.$

Le lemme suivant indique qu'elles sont constantes et comme

$\lim_{\operatorname{Re} \theta \rightarrow \infty} f(\theta) = 1$, la proposition 2bis est démontrée.

Il reste donc à voir que :

$\left[\begin{array}{l} \text{Lemme} \\ \text{Sous les hypothèses } (-) , f \text{ et } g \text{ sont constantes} \end{array} \right.$

Démonstration :

Définissons une fonction M par

$$M(\theta) = \begin{cases} f(\theta) & \operatorname{Re} \theta \leq 0 \\ g(\theta) & \operatorname{Re} \theta \geq 0 \end{cases}$$

M est continue et bornée ; si nous réussissons à montrer qu'elle est analytique, elle sera alors constante grâce au théorème de Liouville.

Or M est analytique sur $\operatorname{Re} \theta < 0$ et $\operatorname{Re} \theta > 0$ et continue partout, il résulte alors du théorème de Morera qu'elle est analytique partout.

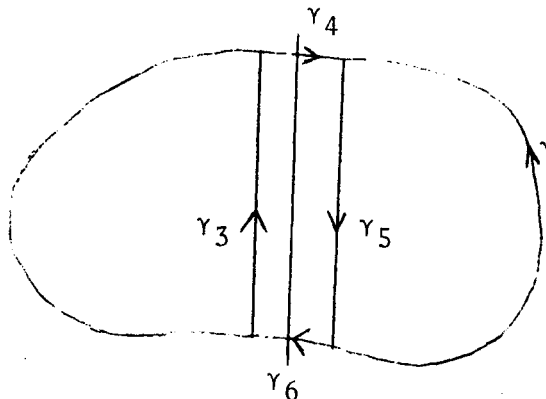
En effet

* Énoncé du théorème de Morera

[Si $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et telle que $\int_{\gamma} F(z) dz = 0$
pour tout circuit γ , alors F est analytique sur $\mathbb{C}$

* Il suffit donc de voir que $\int_{\gamma} M(z) dz = 0$ pour tout circuit γ .

Il suffit pour cela de se limiter aux circuits qui coupent l'axe des imaginaires, car la relation est connue pour les autres en raison de l'analyticité sur $\operatorname{Re} \theta < 0$ et $\operatorname{Re} \theta > 0$.



Soit $\varepsilon > 0$

- $\exists n > 0 \quad |z-z'| < n \implies |M(z) - M(z')| < \varepsilon$ (sur tout compact)
 puisque M est continue.

- Soit $\varepsilon' = \inf(n, \varepsilon)$ et considérons les courbes $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ telles que
 $\text{Long } \gamma_6 < \varepsilon'$
 $\text{Long } \gamma_4 < \varepsilon'$

Alors

$$* \left| \int_{\gamma_3} M(z) dz + \int_{\gamma_5} M(z) dz \right| < \varepsilon \quad \text{en raison de la continuité de } M$$

$$* \left| \int_{\gamma_6} M(z) dz \right| < \sup_{z \in \gamma} |M(z)| \times \text{long } \gamma_6 \leq \varepsilon \sup_{z \in \gamma} |M(z)|$$

$$* \left| \int_{\gamma_4} M(z) dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |M(z)| \times \text{long } \gamma_4 \leq \varepsilon \sup_{z \in \gamma} |M(z)|$$

Il en résulte que

$\int_{\gamma_5} M(z) dz + \int_{\gamma_6} M(z) dz + \int_{\gamma_3} M(z) dz + \int_{\gamma_4} M(z) dz$ est aussi petit qu'on veut, d'où le résultat.

La proposition 2bis est donc démontrée et le théorème aussi par conséquent. □

[b) Utilisation d'un lemme combinatoire (démonstration abrégée)

$$\begin{aligned} \text{Posons: } T_1 &= T, \\ T_2 &= \inf \left\{ n > T_1 ; S_n > S_{T_1} \right\}, \\ T_3 &= \inf \left\{ n > T_{r-1} ; S_T > S_{T_{r-1}} \right\} \end{aligned}$$

Ce sont les dates successives des records de la suite de v.a. (S_n) .
 Il est facile de voir (et connu) que les v.a. $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_r - T_{r-1}$ sont indépendantes (≥ 0) et de même loi notée τ .

T_r a donc pour loi τ^{*r}

Nous noterons enfin $\tau(s)$ la fonction génératrice de τ ($0 \leq s \leq 1$)

$$\tau^{*r}(s) = [\tau(s)]^r$$

Grâce à un lemme combinatoire astucieux (cf. [4], section XII, 6, p.393-4) on peut démontrer (cf. [4], section XII, 7, p.394-7) que:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} P(T_r = n) = \frac{1}{n} P(S_n > 0)$$

$$\log \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\tau(s))^n \right) = \log \frac{1}{1-\tau(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0)$$

La démonstration de (A) est alors évidente, car:

$$\tau(s)^n = \sum_{k=0}^{\infty} s^k P(T_n = k) \quad \text{donne}$$

$$\frac{1}{1-\tau(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n = k)$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n = k)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s^k P(k \text{ est un record})$$

$$\text{Or } P(k \text{ est un record}) = P(0 < S_k, S_1 < S_k, \dots, S_{k-1} < S_k)$$

$$= P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_k > 0)$$

$$= P(T'^* > k)$$

$$\text{d'où } \log \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(T'^* > k) s^k \right) = \log \left(\frac{1}{1-\tau(s)} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n > 0)$$

pour des raisons de symétrie, on a donc :

$$\log \left[\sum_{k=0}^{\infty} P(T > k) s^k \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^n}{n} P(S_n \leq 0)$$

c'est-à-dire (A).

* Il reste à prouver (B) i.e.,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} s^{\ell} E(e^{-\lambda S_{\ell}}, T'^{*} > \ell) = \frac{1}{1 - E(s^T e^{-\lambda S_T})}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, 0 < S_n \leq x) \\ &= P(S_r < S_n \leq x \quad (r = 0, 1, \dots, n-1)) \\ &= P(n \text{ est un record et } S_n \leq x) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P(n \text{ est le } r^{\text{e}} \text{ record et } S_n \leq x) \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} P(T_r = n, S_n \leq x) \quad x > 0 \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } P(T'^{*} > n, S_n \leq x) = \sum_{r=1}^{\infty} P(T_r = n, S_n \leq x) \quad \text{pour } n \geq 1$$

Ainsi

$$E(e^{-\lambda S_n}; T'^{*} > n) = \sum_{r=1}^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) \quad \text{pour } n \geq 1$$

d'où

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T'^{*} > n) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \sum_{r=1}^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=r}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) \end{aligned}$$

$$(\text{puisque } \sum_{n=1}^{r-1} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) = 0)$$

D'autre part

$$\sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T_r = n) = E(e^{-\lambda S_{T_r} s^{T_r}})$$

$$= E(e^{-\lambda S_T s^T})^r$$

en vertu du fait que $(S_{T_r} - S_{T_{r-1}}, T_r - T_{r-1})$ sont indépendantes et de même loi que (S_T, T) .

Il en résulte que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T'^* > n) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} E(e^{-\lambda S_T s^T})^r$$

$$= \frac{1}{1 - E(e^{-\lambda S_T s^T})}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=0}^{\infty} s^n E(e^{-\lambda S_n}, T'^* > n) = \frac{1}{1 - E(e^{-\lambda S_T s^T})}$$

La relation (B) est donc démontrée. □

VIII - Circonstances sous lesquelles la condition suivante est
satisfaite

$$(*) \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(S_k \leq 0) \rightarrow \gamma \quad \text{avec } 0 < \gamma < 1$$

(1) Nous avons vu au paragraphe 1- que lorsque les X_i ont une distribution commune symétrique alors la condition (*) est satisfaite avec $\gamma = \frac{1}{2}$.

(2) On a vu aussi que la condition (*) est satisfaite avec $\gamma = \frac{1}{2}$ si $E X_i = 0$
 $E X_i^2 < \infty$

(3) Supposons que les X_i appartiennent au domaine d'attraction d'une loi stable d'exposant $\alpha \neq 1$, avec la restriction $E X_i = 0$ pour $\alpha > 1$, et sans restriction pour $\alpha < 1$

Dans ces conditions, on sait qu'il existe une suite $A_1, \dots, A_n$ de constantes telles que $\frac{S_n}{A_n}$ converge en loi vers une variable aléatoire stable.

Ainsi

$$P(S_k \leq 0) = P\left(\frac{S_n}{A_n} \leq 0\right) \rightarrow \gamma \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

On démontre que si la fonction caractéristique de la loi limite stable est :

$$\exp \{-c|t|^\alpha (1 + i\beta \frac{t}{|t|} \operatorname{tg}(\frac{\pi\alpha}{2}))\} \quad \text{où} \quad \begin{cases} t \in \mathbb{R} \\ 0 < \alpha < 1 \quad \text{ou} \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ c > 0 \\ 1 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \operatorname{arctg} \left(-\beta \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \right)$$

(4) Supposons que $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes, de même loi μ , μ étant la loi de Cauchy symétrique, de fonction de répartition :

$$P(Y_1 < x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x, \text{ et de fonction caractéristique } \hat{\mu}(t) = e^{-|t|}.$$

- Soit $R_n = Y_1 + \dots + Y_n$

Il est bien connu que $\frac{R_n}{n}$ a pour loi μ (puisque de loi de Cauchy symétrique est stable d'indice 1).

- Posons alors $X_k = Y_k - a$ pour $k \geq 1$ où a est une constante.

On a alors :

$$\begin{aligned} P(S_n \leq 0) &= P(R_n - n a \leq 0) = P(R_n \leq n a) \\ &= P\left(\frac{R_n}{n} \leq a\right) \\ &= P(Y_1 \leq a) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} a \end{aligned}$$

Ainsi, pour γ arbitraire compris entre 0 et 1, on peut en choisissant correctement a construire à partir de la loi de

Cauchy symétrique une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi satisfaisant la condition (*) avec la limite γ .

(5) Pour une discussion plus approfondie sur la condition (*), voir [3], [6], [7].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N.H. BINGHAM "Limit theorems in fluctuation theory" Adv. Appl. Prob 5 (1973) p.554-69
- [2] D.J. EMERY "Limiting behaviour of the distributions of the maxima of partial sums of certain random walks" J. Appl. Prob. 9 (1972) p.572-9
- [3] D.J. EMERY "On a condition satisfied by certain random walks" Zeit für Wahr. 31 (1975) p.125-39
- [4] W. FELLER "An introduction to probability theory and its applications" (vol 2) Wiley and Sons (1966) 2è édition
- [5] F. SPITZER "Principles of random walk" Van Nostrand (1964)
- [6] J.L. TEUGELS "Random variables associated with a random walk" Second Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics (1977) Abstracts t.3, p.229-30.
- [7] V.M. ZOLOTAREV "Mellin-Stieltjes transforms in probability theory" Th. of Proba 2 (1957) p.433-60