PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

PIERRE JAMET

Estimation de l'erreur d'interpolation pour des éléments finis quadrilatéraux qui peuvent dégénérer en triangles

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A7_0>

ESTIMATION DE L'ERREUR D'INTERPOLATION POUR DES ELEMENTS FINIS QUADRILATERAUX QUI PEUVENT DEGENERER EN TRIANGLES

Pierre JAMET (*)

1 - INTRODUCTION

Nous allons considérer un élément fini quadrilatéral de type Q_1 et établir une estimation de l'erreur d'interpolation sous une condition plus faible que celle de Ciarlet et Raviart [2]. Tout d'abord, nous allons faire quelques rappels et introduire quelques notations.

Soit K un quadrilatère plan convexe de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3, M_4 distincts et soit :

1.1) $M = \xi(1-\eta)M_1 + \xi\eta M_2 + (1-\xi)\eta M_3 + (1-\xi)(1-\eta)M_4$,

un point quelconque de K, avec $(\xi,\eta) = \hat{M} \in \hat{K} = [0,1]^2$

Soit $\mathcal{G}$ l'application $\hat{M} \to M$ définie par (1.1). A toute fonction $\hat{\phi}$ définie sur $\hat{K}$ correspond biunivoquement une fonction ϕ définie sur K au moyen de la relation canonique $\phi(M) = \hat{\phi}(\hat{M}) = \hat{\phi}(\mathcal{G}^{-1}(M))$, $\forall\, M \in K$. Soient $\hat{Q}_1$ l'ensemble des fonctions $\hat{\phi}$ qui sont des polynômes de degré ≤ 1 par rapport à chaque variable ξ et η séparément et $Q_1 = Q_1(K)$ l'ensemble des fonctions ϕ correspondantes. Soit Q l'opérateur d'interpolation qui fait correspondre à toute fonction u continue sur K la fonction Qu telle que :

1.2) $Qu \in Q_1$, $Qu(M_i) = u(M_i)$ pour i = 1, 2, 3, 4.

Le couple (K,Q) définit un élément fini de type Q_1.

Nous allons chercher à estimer l'erreur d'interpolation u - Qu pour une fonction quelconque $u \in H^2(K) \subset C(K)$. Nous utiliserons les notations suivantes :

$||u||_{m,p,k}$ = norme de u dans l'espace de Sobolev $W^{m,p}(K)$

Service M.A., Centre d'Etudes de Limeil, Commissariat à l'Energie Atomique, B.P. 27, 94190 VILLENEUVE St GEORGES

$|u|_{m,p,K}$ = semi-norme de u dans l'espace de Sobolev $W^{m,p}(K)$ obtenue en considérant seulement les dérivées d'ordre égal à m.

L'indice p est omis lorsqu'il est égal à 2, c'est-à-dire pour l'espace de Sobolev $H^m(K) = W^{m,2}(K)$.

Soient de plus :

h = diamètre de K

h' = longueur du plus petit côté de K

ρ = maximum du diamètre des cercles contenus dans K

β_i = angle de K correspondant au sommet M_i.

Ciarlet et Raviart [2] ont estimé l'erreur d'interpolation u - Qu sous les deux conditions suivantes :

1.3) $h'/h \geq \sigma_o > 0$

1.4) $|\cos \beta_i| \leq \sigma_1 < 1$ pour $1 \leq i \leq 4$,

où σ_o et σ_1 sont deux constantes. (voir également Strang et Fix [5])

Nous allons établir une estimation semblable à la leur, mais sous une condition plus faible. Notre résultat est le suivant :

<u>Théorème 1</u>

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition

1.5) $\rho/h \geq \sigma > 0$, où σ est une constante.

Alors, il existe une constante $C = C(\sigma)$ <u>qui dépend seulement de σ</u>, telle que :

1.6) $|u - Qu|_{m,K} \leq C\, h^{2-m} |u|_{2,K}$,

pour m = 0 et 1 et pour toute fonction $u \in H^2(K)$.

Remarquons que les deux conditions (1.3) et (1.4) interdisent au quadrilatère K de dégénérer en triangle et qu'elles entraînent la condition (1.5) avec $\sigma = \sigma_o(1 - \sigma_1^2)^{1/2}$. Par contre, la condition (1.5) n'exclut pas la dégénérescence du quadrilatère K en un triangle puisque le rapport h'/h peut être arbitrairement petit et que le plus grand angle de K peut atteindre π.

La démonstration du théorème 1.1 repose sur quelques résultats préliminaires qui font l'objet des sections 2 et 3 ; ces deux sections sont indépendantes. Le théorème 1.1 est démontré dans la section 4.

2 - CONTINUITE DE L'APPLICATION CANONIQUE $\hat{\phi} \to \hat{\phi}$ POUR UN QUADRILATERE QUELCONQUE

Lorsque le quadrilatère K satisfait les conditions de Ciarlet et Raviart (1.3) et (1.4), l'application canonique $\hat{\phi} \to \phi$ est continue de n'importe quel espace de Sobolev $W^{m,p}(\hat{K})$ dans l'espace correspondant $W^{m,p}(K)$. Ceci provient de ce que le jacobien J de la transformation $\mathcal{T}$ est borné inférieurement par une constante positive. Il n'en est pas de même lorsque le quadrilatère K satisfait seulement la condition (1.5). Par exemple, si l'un des angles de K est égal à π, le jacobien J s'annule au sommet M_i correspondant et il en résulte que si $\hat{\phi}$ est une fonction quelconque dans $W^{1,\infty}(\hat{K})$, les dérivées de ϕ ne sont pas bornées en général au voisinage de M_i, donc $\phi \notin W^{1,\infty}(K)$. Par contre, nous allons montrer que $1/\hat{J}$ est sommable dans $\hat{K}$ et que l'application $\hat{\phi} \to \phi$ est continue de $W^{1,\infty}(\hat{K})$ dans $H^1(K)$.

<u>Lemme 2.1</u>

Soit K un quadrilatère convexe quelconque de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3, M_4 distincts. Soient θ l'angle des deux diagonales M_1M_3 et M_2M_4 et O leur point d'intersection. Soit $a_i = |OM_i|$ = la distance du point O à chaque sommet M_i. Supposons $a_i > 0$ pour i = 1,2, 3 et $a_4 \geq 0$. Alors :

$$2.1) \qquad \iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1}\, d\xi\, d\eta < 2/\ (\sin\theta \,.\, a_2 \sqrt{a_1 a_3}\ )$$

<u>*DEMONSTRATION*</u>

Choisissons deux axes de coordonnées rectangulaires quelconques (OX,OY) dans le plan de K et soient deux axes de coordonnées auxiliaires (Ox,Oy) orientés selon les vecteurs diagonaux $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_2M_4}$. Soient J_1 le jacobien de la transformation $(\xi,\eta) \to (x,y)$ et J_2 le jacobien de la transformation $(x,y) \to (X,Y)$. On a $J = J_1J_2$ et $|J_2| = \sin\theta$.

(le signe de J_2 dépend du sens de la numérotation des sommets M_i).

D'autre part, on a d'après (1.1) :

$$\begin{cases} x = \xi(1-\eta)a_1 - (1-\xi)\eta\, a_3 \\ y = \xi\eta\, a_2 - (1-\xi)\,(1-\eta)\, a_4 \end{cases}$$

D'où : $\hat{J}_1 = a_1a_2\xi + a_2a_3\eta + a_3a_4(1-\xi) + a_4a_1(1-\eta) \geq a_2(a_1\xi + a_3\eta\,) \geq 0.$

On en déduit, après intégration en ξ *:*

$$\iint_{\hat{K}} |\hat{J}_1|^{-1}\, d\xi\, d\eta \leq \frac{1}{a_1a_2} \int_0^1 Log(1 + \frac{a_1}{a_3\eta})d\eta\ .$$

Puis, en utilisant l'inégalité $Log(1+t) < t^{1/2}$, $\forall t > 0$, *on obtient :*

$$|\hat{J}_1|^{-1}\, d\xi\, d\eta < 2/(a_2\, \sqrt{a_1a_3})\quad ,$$

d'où l'on déduit immédiatement (2.1).

<u>Corollaire 2.1</u>

Soit K un quadrilatère convexe qui satisfait la condition (1.5). Alors, il existe une constante $C = C(\sigma)$ telle que :

$$2.2)\qquad \iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1}\, d\xi\, d\eta < C\, h^{-3/2}\, h'^{-1/2}\ ,$$

où h est le diamètre de K et h' la longueur du plus petit côté.

<u>DEMONSTRATION</u>

Supposons que l'on a numéroté les sommets M_i de telle sorte que $a_4 = min\ \{a_i\ ;\ i = 1,2,3,4\}$ *et* $a_3 \leq a_1$.

On a : $min\ \{|M_1M_3|\ ,\ |M_2M_4|\} > \rho \geq \sigma h$,

i.e. $min\ \{a_1 + a_3,\ a_2 + a_4\} > \sigma h$. *D'où :*

2.3) $\min \{a_1, a_2\} > \frac{1}{2} \sigma h.$

D'autre part, on a :

2.4) $a_3 \geq \frac{1}{2} |M_3 M_4| \geq \frac{1}{2} h'$, *et*

2.5) $\theta \geq \theta_0 = 2 \text{ Arc sin } \frac{\sigma}{4}$.

En portant dans (2.1) les inégalités (2.3), (2.4) et (2.5), on obtient (2.2).

<u>Lemme 2.2</u>

Soit K un quadrilatère convexe quelconque. Quelque soit $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(\hat{K})$, on a $\phi \in H^1(K)$ avec

$$2.6) \quad |\phi|_{1,2,K} \leq C\, h\, |\hat{\phi}|_{1,\infty,\hat{K}} \left(\iint_{\hat{K}} |\hat{J}|^{-1} d\xi\, d\eta \right)^{1/2} ,$$

où C est une constante.

<u>*DEMONSTRATION*</u>

Soient (OX,OY) deux axes de coordonnées rectangulaires dans le plan de K. Un calcul simple donne :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\dfrac{\partial \phi}{\partial X}} \\[2ex] \widehat{\dfrac{\partial \phi}{\partial Y}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\hat{J}} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial Y}{\partial \xi} \\[2ex] -\dfrac{\partial X}{\partial \eta} & \dfrac{\partial X}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{\phi}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\left| \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right| \leq 2h\, |\hat{\phi}|_{1,\infty,K} \,/\, |\hat{J}| \qquad , \textit{ pour } i = 1 \textit{ et } 2,\ X_1 = X,\ X_2 = Y.$$

On en déduit (2.6) en utilisant la formule d'intégration :

$$\iint_K \left| \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right|^2 dx\, dy = \iint_{\hat{K}} \left| \widehat{\frac{\partial \phi}{\partial X_i}} \right|^2 \hat{J}\, d\xi\, d\eta \, .$$

Remarque

Dans la démonstration précédente, nous n'avons pas utilisé le fait que $\hat{K}$ et K sont des quadrilatères. Le lemme 2.2 est valable pour un élément fini isoparamétrique quelconque pourvu que $1/\hat{J}$ soit sommable dans $\hat{K}$.

Du lemme 2.2 et du corollaire 2.1 on déduit immédiatement le résultat suivant :

Corollaire 2.2

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (1.5). Alors, pour toute fonction $\hat{\phi} \in W^{1,\infty}(K)$, on a $\phi \in H^1(K)$ et

$$2.7) \qquad |\phi|_{1,2,K} \leq C(\sigma)\left(\frac{h}{h'}\right)^{1/4} |\hat{\phi}|_{1,\infty,K},$$

où $C(\sigma)$ est une constante qui ne dépend que de σ.

3 - INTERPOLATION LINEAIRE DANS UN QUADRILATERE

Soit K un quadrilatère convexe de sommets consécutifs M_1, M_2, M_3 et M_4. Soient h le diamètre de K, T le triangle de sommets M_1, M_2, M_3 et ρ_T le diamètre du cercle inscrit dans T. Supposons :

$$3.1) \qquad \rho_T/h \geq \mu > 0 \qquad \text{où } \mu \text{ est une constante.}$$

Soit P l'opérateur d'interpolation défini par :

$$3.2) \qquad Pu \in P_1,\ Pu(M_i) = u(M_i) \qquad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3$$

et pour toute fonction u continue sur K, où P_1 désigne l'ensemble des polynômes de degré ≤ 1 par rapport à des coordonnées rectilignes quelconques dans le plan de K.

Pour toute fonction $u \in H^2(K)$, nous voulons estimer les semi-normes $|u - Pu|_{m,K}$ pour m = 0 et 1, et l'erreur ponctuelle $|u(M) - Pu(M)|$ en un point quelconque $M \in K$. Les constantes intervenant dans ces estimations ne devront dépendre que de μ.

Lemme 3.1

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (3.1). Alors, pour toute fonction $u \in H^2(K)$, on a :

$$3.3) \quad |u - Pu|_{m,K} \leq C(\mu)h^{2-m}|u|_{2,K} \quad ,$$

pour m = 0 et 1, où $C(\mu)$ est une constante qui ne dépend que de μ.

DEMONSTRATION

Le triangle T est l'image d'un triangle de référence fixe $\hat{T}$ au moyen d'une transformation affine F. Posons $\hat{K} = F^{-1}(K)$ et $\hat{M} = F^{-1}(M)$, $\forall\, M \in K$. Soient $\tilde{u}$ et $\hat{P}$ définis par $\tilde{u}(\hat{M}) = u(M)$ et $\hat{P}\,\tilde{u}(\hat{M}) = Pu(M)$, $\forall\, M \in K$. Le quadrilatère $\hat{K}$ est contenu dans le triangle $\hat{T}_\mu$ déduit du triangle $\hat{T}$ par une homothétie de centre M_2 et de rapport $1/\mu$. On peut donc appliquer le théorème de [3] qui donne une estimation de l'erreur d'interpolation dans une famille de domaines "uniformément connexes", en particulier dans une famille de domaines convexes et uniformément bornés. On obtient :

$$3.4) \quad |\tilde{u} - \hat{P}\tilde{u}|_{m,\hat{K}} \leq C_o(\mu)\ |\tilde{u}|_{2,\hat{K}} \quad ,$$

pour m = 0 et 1, où C_o est une constante, <u>indépendante de $\hat{K}$</u>, qui ne dépend que de μ. En utilisant ensuite un argument classique de Ciarlet et Raviart [1], on en déduit l'estimation (3.3).

Lemme 3.2

Supposons que le quadrilatère K satisfasse la condition (3.1). Soit M un point quelconque de K et $d = \min\{\,|M\,M_i|\ ;\ 1 \leq i \leq 3\}$. Alors, pour tout nombre réel α, tel que $0 < \alpha < 1$, il existe une constante $C = C(\alpha,\mu)$ qui ne dépend que de α et μ, telle que :

$$3.5) \quad |u(M) - Pu(M)| \leq C\, d^{\alpha} h^{1-\alpha} |u|_{2,K} \quad ,$$

$\forall\, u \in H^2(K)$ et $\forall\, M \in K$.

DEMONSTRATION

Nous allons d'abord démontrer (3.5) dans le cas $h = 1$. La condition (3.1) entraîne que tous les angles du quadrilatère K sont supérieurs à un angle $\beta_o = \beta_o(\mu)$. Soit G_o un triangle isocèle fixe qui admet deux angles égaux à $\beta_o/2$ et soit M_j le sommet de T le plus proche du point M. Il existe un triangle isocèle G semblable au triangle G_o, qui admet pour base le segment $M\,M_j$ et qui est contenu dans K. Soit un opérateur de prolongement $E_o \in \mathcal{L}\left(H^2(G_o),\ H^2(\mathbb{R}^2)\right)$. Il lui correspond par similitude un opérateur de prolongement $E \in \mathcal{L}\left(H^2(G),\ H^2(R^2)\right)$. Les normes des deux opérateurs E_o et E sont égales et ne dépendent que de β_o, c'est-à-dire de μ.

Soit w une fonction quelconque dans $H^2(G)$. D'après Lions ([4], théorème 3.4), il existe une constante $C_o = C_o(\alpha)$ telle que :

$$|w(M) - w(M_j)| \leqslant C_o(\alpha)\ |M\,M_j|^\alpha\ ||Ew||_{H^2(\mathbb{R}^2)}$$

$$\leqslant C_o(\alpha)\ C_1(\mu)\ |M\,M_j|^\alpha\ ||w||_{2,T}\ .$$

En prenant $w = r_G(u - Pu)$, où r_G désigne la restriction à G, on déduit :

$$|u(M) - Pu(M)| = |w(M)| = |w(M) - w(M_j)| \leqslant C_o(\alpha)\ C_1(\mu) d^\alpha ||u-Pu||_{2,K}.$$

D'où, en appliquant le lemme 3.1 avec $h = 1$,

$$|u(M) - Pu(M)| \leqslant C(\alpha,\mu) d^\alpha\ |u|_{2,K}.$$

L'estimation (3.5), avec $h > 0$ quelconque, s'en déduit par une simple similitude.

Remarque

Les lemmes 3.1 et 3.2 sont valables pour des domaines K qui ne sont pas des quadrilatères, en particulier pour des domaines convexes quelconques contenant le triangle T. On peut aussi considérer des opérateurs d'interpolation plus généraux comme dans [3].

4 - ERREUR D'INTERPOLATION POUR DES ELEMENTS FINIS QUADRILATERAUX DE TYPE Q_1

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.1. Soit un quadrilatère K qui satisfait la condition (1.5). Soit O le point d'intersection des deux diagonales M_1M_3 et M_2M_4 et soit a_i la distance du point O à chaque sommet M_i. On suppose que les sommets sont numérotés de telle sorte que $a_4 \leqslant a_i$, pour i = 1, 2 et 3. Alors, le triangle T de sommets M_1, M_2 et M_3 satisfait la condition (3.1) où μ est une constante qui dépend de σ . Soit P l'opérateur défini par (3.2) et soit ϕ la fonction définie par :

$$\phi \in Q_1 \;, \quad \phi(M_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ et} \quad \phi(M_4) = 1.$$

On a : $\quad Qu - Pu = \big(u(M_4) - Pu(M_4)\big)\phi \quad$, d'où :

$$4.1) \quad |u - Qu|_{m,K} \leqslant |u - Pu|_{m,K} + |u(M_4) - Pu(M_4)| \; |\phi|_{m,K} .$$

Les trois termes du second membre sont majorés en appliquant respectivement le lemme 3.1, le lemme 3.2 avec $\alpha = 1/4$ et le corollaire 2.2. L'estimation (1.6) en résulte après avoir remarqué que l'on a :

$$d(M_4) = \min \{ \, |M_iM_4| \; ; \; i = 1,2,3 \, \} \leqslant C(\sigma)h',$$

où $c(\sigma)$ est une constante qui ne dépend que de σ (cette inégalité est une conséquence directe de (3.1)).

REFERENCES

[1] CIARLET P.G ; RAVIART P.A "General Lagrange and Hermite interpolation in $\mathbb{R}^n$ with applications to finite element methods".
Arch. Rat. Mech. Anal. 46 (1972), 177-199.

[2] CIARLET P.G ; RAVIART P.A "Interpolation theory over curved elements with applications to finite element methods"
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 1 (1972) 217-249

[3] JAMET P "Un théorème permettant d'estimer l'erreur d'interpolation dans un domaine variable"
C.R. Acad. Sc. Paris, t. 281, Série A, 909-911, 1975.

[4] LIONS J.L "Problèmes aux limites dans des équations aux dérivées partielles"
Presses de l'Université de Montréal (1962)

[5] STRANG G ; FIX G.J "An analysis of the finite element method"
Prentice Hall (1973)

- : -