

JEAN CEA

Approximation variationnelle Convergence des éléments finis Un test

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-29

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__S5_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

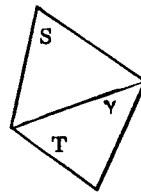
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

APPROXIMATION VARIATIONNELLE
 CONVERGENCE DES ELEMENTS FINIS
 UN TEST

INTRODUCTION

On s'intéresse à la construction systématique d'éléments finis u_h d'un problème approché converge vers la solution u du problème. La construction de ces éléments ne dépend pas des formes bilinéaires que de l'espace à approcher. Le résultat essentiel est la condition suivante : le problème approché sera "convergent" si tout élément approché à la propriété suivante : si γ est une interface entre 2



$$(\star) \quad \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} u_h^S d\sigma = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} u_h^T d\sigma$$

où u_h^S et u_h^T désignent les traces de u_h

Dans le cas d'éléments qui approchent des éléments de $H^2(\Omega)$ on a la relation (\star) pour $u_h, D_1 u_h, D_2 u_h$; cependant la relation (\star) pour u_h peut être remplacée par une relation très simple :

$$(\star\star) \quad \begin{cases} \forall \gamma & \exists A, B \in \gamma \quad \text{tel que} \\ u_h^S(A) = u_h^T(B) \end{cases}$$

On limitera notre étude au cas où les points A, B sont des sommets de côtés, mais le résultat est plus général. Le § 1 sert à définir l'espace dans lequel on va travailler, le § 2 donne une construction systématique pour l'approximation de $H^1(\Omega)$.

Dans le § 3 on s'intéresse à l'approximation de $H^2(\Omega)$.

Jean CEA
 I. M. S. P.
 Mathématiques
 06034 NICE CEDEX
 France

§ 1 . LES PROBLEMES VARIATIONNELS

le Neumann d'ordre 2m

$$H^m(\Omega)$$

ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière ; on rappelle que

$$v \in H^m(\Omega) \Leftrightarrow v \in L^2(\Omega), D^p v \in L^2(\Omega)$$

multi-indice $p = (p_1, \dots, p_n)$ tel que $|p| = p_1 + \dots + p_n \leq m$

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} v$$

$$(u, v)_V = \sum_{0 \leq |p| \leq m} (D^p u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

linéaire $a(u, v)$:

$u, v \in V$ on pose

$$a(u, v) = \sum_{p, q} \int_{\Omega} a_{p, q}(x) D^p u(x) D^q v(x) dx$$

$a_{p, q}$ sont donnés dans $L^{\infty}(\Omega)$ et vérifient l'hypothèse de coercivité :

$$\sum_{p, q} a_{p, q}(x) \xi_p \xi_q \geq \alpha \sum_p |\xi_p|^2 \quad \text{p.p. sur } \Omega$$

$$\xi = (\dots, \xi_p, \dots) \in \mathbb{R}^N$$

N étant défini maintenant.

$$N = N(n, m) :$$

le nombre de multi-indices $p = (p_1, \dots, p_n)$ tels que $0 \leq |p| \leq m$.

En vertu des hypothèses, la forme $u, v \rightarrow a(u, v)$ est bilinéaire,

coercitive au sens suivant :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V$$

linéaire $L(v)$

pour $v \in V$

$$L(v) = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

où f est donnée dans $L^2(\Omega)$

$v \rightarrow L(v)$ est une forme linéaire et continue sur V

Le Problème P : déterminer $v \in V$ tel que :

$$(1.3) \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

On sait que ce problème admet une solution et une seule solution variationnels cf J. LIONS - E. MAGENES [1] .

2. Approximation de l'espace $H^m(\Omega)$: l'espace V_h^m

L'espace produit F

Dans [1] J. CEA introduisait l'espace V comme un produit $F = (L^2(\Omega))^N$; en effet soit $v \in F$, on définit v de la façon suivante

$$v = (\dots, v_p, \dots) \quad p = (p_1, \dots, p_n)$$

visiblement $H^m(\Omega)$ peut être identifié avec le sous-espace

$v = (v_0, \dots, v_p, \dots)$ tels que :

$$v_p = D^p v_0$$

Notons que :

$$(u, v)_F = \sum (u_p, v_p)_{L^2(\Omega)} \quad \text{ou}$$

$$(u, v)_V = \sum (D^p u, D^p v)_{L^2(\Omega)}$$

La triangulation :

On partage Ω en éléments $K_{\ell}, \ell \in L, L$ un ensemble fini. On suppose que $K_{\ell} \cap K_{\ell'} = \emptyset \quad \forall \ell \neq \ell'$ et que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\ell \in L} K_{\ell}$

$$h = \max_{\ell \in L} (\text{diam } K_{\ell})$$

et on suppose qu'on a, en fait, une famille de triangulation

$h \rightarrow 0$; on suppose que la triangulation est "régulière" (d'éléments ...).

ur K un espace vectoriel $V_{h,K}^m$ de dimension finie, de fonctions des polynomes ...)

\tilde{D}^p : soit v_h une fonction définie sur Ω et telle que $v_h|_K \in V_{h,K}^m$; à v_h on va associer des fonction \tilde{D}^p définies appartenant à $L^2(\Omega)$ et vérifiant

$$\tilde{D}^p v_h|_K = D^p (v_h|_K)$$

D^p est la dérivée ordinaire dans K . Si v_h est localement un $\tilde{D}^p v_h$ est aussi localement un polynôme (dérivé du précédent) ;

$$(\dots, \tilde{D}^p v_h, \dots) \in F$$

sous-ensemble de tels éléments ; nous étudierons plus loin du "raccordement" des $v_h|_K$

ous espace FERME de F

$$\|v_h\|_F = 0 \Rightarrow v_h = 0$$

est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(u, v)_{V_h} = \sum_{0 \leq |p| \leq m} (\tilde{D}^p u, \tilde{D}^p v)_{L^2(\Omega)}$$

existe $r_h v \in V_h$ tel que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r_h v - v\|_F = 0.$$

que : $\|u_h\|_F \leq c$, $\lim u_h = u \in F$ dans F faible V .

représenter les hypothèses B et C de la manière suivante :

placer V par un espace voisin V_h , l'hypothèse B assure que trop "petit" (il y a assez d'éléments dans V_h pour approcher quel élément de V) tandis que l'hypothèse C assure que V_h n'est

pas trop grand (un élément qui est dans la "limite de dans V .)

3. Les problèmes approchés

La forme bilinéaire sur $F \times F$:

On la note $a(u, v)$:

$$u, v \in F, \quad u = (\dots, u_p, \dots) \quad v = (\dots, v_p, \dots)$$

$$a(u, v) = \sum_{p, q} \int_{\Omega} a_{p, q} u_p v_q$$

elle est coercitive sur les 3 espaces F, V, V_h^m

La forme linéaire sur F :

$$v = (\dots, v_p, \dots)$$

$$L(v) = (f, v_o)_{L^2(\Omega)}$$

Le problème P_h : déterminer $u_h \in V_h^m$ tel que

$$(3.1) \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^m$$

$$\text{si } u_h = (\dots, \tilde{D}^p u_{o, h}, \dots), \quad v_h = (\dots, \tilde{D}^p v_{o, h}, \dots)$$

On a, en identifiant $u_{o, h}$ et u_h

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h \in V_h^m \\ \sum_{p, q} \int_{\Omega} a_{p, q} \tilde{D}^q u_h \cdot \tilde{D}^p v_h \, dx = \int_{\Omega} f v_h \\ \forall v_h \in V_h^m \end{array} \right.$$

Théorème 3.1 : sous les hypothèses A, B, C et celles du pr

- 1) le problème P a une solution u et une seule
- 2) le problème P_h a une solution u_h et une seule
- 3) de plus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - u\|_F = 0$$

$$\text{i.e. } \forall p \quad 0 \leq |p| \leq m \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{D}^p u_h - D^p u\|_F = 0$$

) et 2) sont des conséquences du lemme de Lax Milgram ;
 le point 3 .

ble :

$$a(u_h, u_h) = L(u_h)$$

$$\|u_h\|_F \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

extraire une sous-famille u_h , faiblement convergente dans F
 et w de F

$$\begin{cases} \|\bar{u}_h\| \leq c \\ u_h \rightharpoonup w \in F \end{cases}$$

l'hypothèse C on a $w = V$; mais

$$a(u_h, r_h v) = L(r_h v) .$$

des convergences $u_h \rightharpoonup w$, $r_h v \rightarrow v$ on a par passage à

$$a(w, v) = L(v) \quad v \in V$$

et $u_h \rightarrow u$ dans F faible.

te : on a :

$$\begin{aligned} a(u_h, u - u_h) &= a(u, u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + a(u_h, u_h) \\ &= L(u) - a(u, u_h) - a(u_h, u) + L(u_h) \end{aligned}$$

comme $u_h \rightarrow u$, cela entraîne

$$a(u - u_h, u - u_h) = L(u) - a(u, u) - a(u, u) + L(u) = 0 .$$

percivité entraîne alors la convergence forte.

figure dans J.CEA [] dans un cadre plus général ; notons
 vants : il n'est pas nécessaire de supposer que la forme
 métrique, en d'autres termes que le problème P est issu
 de minimisation ; l'introduction de l'espace F a permis de
 e de la méthode de Galerkin et d'approcher séparément les

dérivées D_u^p par des éléments de $L^2(\Omega)$, l'approximation
 EXTERNE ; dans le cas où $V \subset V_h$ l'approximation est

Remarque 3.2 :

Dans le cas de l'approximation interne, l'hypothèse C
 quement vérifiée .

Remarque 3.3 :

On a exposé la méthode sur un exemple ; en réalité elle
 générale et on peut l'appliquer à des sous espaces d'es
 $(H^m(\Omega))^q$.

Les tests A, B, C

Pour se rapprocher du "langage Ingénieur", on emploie
 lieu d'hypothèse. Ainsi pour être assuré de la convergence
 utilisée, notre espace V_h^m , avec un choix particulier de
 passer avec succès les tests A, B, C.

Dans toute la suite, on va essentiellement se préoccuper
 assure le "raccordement" des éléments lorsque $h \rightarrow 0$.
 absolument rien à vérifier sur les formes bilinéaires et
 agit ici que de l'approximation des espaces.

Si on veut calculer les formes bilinéaires et linéaires p
 quadratiques, alors là seulement on pourra introduire c
 tance en particulier!)

Il semble donc qu'il y ait une différence entre ce test C
 STRANG-FIX [] et la bibliographie de l'ouvrage.

2 . APPROXIMATION DE $H^1(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

test C :

soit ensemble de $F_1 = (L^2(\Omega))^3$

$(u, D_1 u, D_2 u)$ $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ $i = 1, 2$

un sous espace de F_1

$(v_h, \tilde{D}_1 v_h, \tilde{D}_2 v_h)$
 $= D_1 \left(\left. v_h \right|_K \right)$ dérivée ordinaire dans K
 $\left. v_h \right|_K = (u_h, v_h)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^2 (\tilde{D}_i u_h, \tilde{D}_i v_h)_{L^2(\Omega)}$

TEST C :

$\left. \begin{matrix} \leq C \\ F_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow v \in V = H^1(\Omega)$

$u \in F_1$ signifie que, si $u = (u_0, u_1, u_2)$

$u_0 \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ faible

$u_1 \in L^2(\Omega)$ "

$u_2 \in L^2(\Omega)$ "

que $u_1 = D_1 u_0$, $u_2 = D_2 u_0$ (donc que $u_0 \in H^1(\Omega)$).

que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$(u_0, D_1 \varphi) = 0$ $i = 1, 2$

les choses autrement :

2ème forme du TEST C :

$\left. \begin{matrix} \|u_h\|_{V_h^1} \leq C \\ u_h \in V_h \end{matrix} \right\} \Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i = 1, 2$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \{ (\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi) \}$

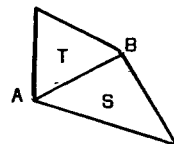
les 2 formes sont évidemment équivalentes; c'est cette dernière qu'on va utiliser.

2. Une condition suffisante pour que le test C soit passé dans V_h^1

Voyons d'abord quelques définitions : $u_h \in V_h^1$ est défini sur chaque élément K de la triangulation ; on pose $u_h^K = u_h|_K$ sur la frontière ∂K , notée γu_h^K , ou u_h^K , ou u_h s'il n'y a pas de confusion.

La propriété V.M. (valeur moyenne) :

On dira que u_h a la propriété V.M. si $\forall T, S \in \mathcal{T}_h$, ayant une arête commune AB on a :

AB on a :  (2.1) $\frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^T d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} \gamma u_h^S d\sigma$

Cette propriété est trivialement vérifiée si $u_h \in H^1(\Omega)$.

On va démontrer le

Théorème 2.1. : si tout élément de V_h^1 a la propriété V.M. alors V_h^1 est dense dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration :

Commençons par donner une notation :

et u_h on va associer une fonction définie sur Ω , constante

\tilde{u}_h ; elle sera notée \hat{u}_h

$$u_h|_K = \frac{1}{|K|} \int_K u_h^k(x) dx, \quad |K| = \int_K dx$$

la restriction u_h^k de u_h à K une fonction \tilde{u}_h^k définie sur ∂K ,

chaque côté :

$$\tilde{u}_h^k|_{AB} = \frac{1}{AB} \int_{AB} v u_h^k d\sigma$$

d'ambiguïté on écrira \hat{u}_h, \tilde{u}_h au lieu de $\hat{u}_h|_K, \tilde{u}_h^k, \dots$

thème :

el que

$$\|u_h\|_{V_1}^2 = \|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{D}_1 u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{D}_2 u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C$$

et $i = 1$ ou 2 ; il s'agit de montrer le test C sous la 2ème

$$A_i(u_h, \varphi) = 0$$

$$(u_h, \varphi) = (\tilde{D}_i u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h, \tilde{D}_i \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

momentanément l'indice h ,

$$(u, \varphi) = \sum_K (D_i u, \varphi)_{L^2(K)} + (u, D_i \varphi)_{L^2(K)} \\ = \sum_K \int_{\partial K} u \cdot \varphi \cdot \eta_i d\sigma$$

rieure à ∂K ayant pour cosinus directeurs (η_1, η_2)

hèse V.M. on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u}) \varphi \eta_i d\sigma$$

mais puisque \tilde{u} est défini par valeur moyenne et que $\tilde{\varphi}$ est con

côté, on a aussi

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma$$

En ajoutant et en retranchant \hat{u} et $\hat{\varphi}$, on a :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u} + \hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \hat{\varphi} + \hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma$$

Ce qui conduit à :

$$A_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi}) \eta_i d\sigma + \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma \\ + \sum_K \int_{\partial K} (\hat{u} - \tilde{u})(\varphi - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma$$

Sur chaque côté $\hat{u} - \tilde{u}$ est constant, donc le dernier terme

$$(2.4) \quad \begin{cases} A_i(u, \varphi) = B_i(u, \varphi) + C_i(u, \varphi) \\ B_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\varphi - \hat{\varphi}) \eta_i d\sigma \\ C_i(u, \varphi) = \sum_K \int_{\partial K} (u - \hat{u})(\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}) \eta_i d\sigma = \sum_K \dots \end{cases}$$

On peut réécrire B_i sous la forme ;

$$B_i(u, \varphi) = \sum_K \left\{ (D_i(u - \hat{u}), \varphi - \hat{\varphi})_{L^2(K)} + (u - \hat{u}, D_i \varphi)_{L^2(K)} \right\} \\ B_i(u, \varphi) = (D_i u, \varphi - \hat{\varphi})_{L^2(\Omega)} + (u - \hat{u}, D_i \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

on vérifie facilement que

$$(2.5) \quad \lim_{h \rightarrow 0} B_i(u_h, \varphi) = 0$$

Pour majorer C_i , on utilise le fait que $|\hat{\varphi} - \tilde{\varphi}| \leq C_\varphi \cdot h$ et que

d'éléments est d'ordre $\frac{1}{h^2}$ ceci est en fait une hypothèse su

ent plusieurs fois Cauchy-Schwartz :

$$| \dots |^2 \leq \frac{C_0}{h^2} \sum_K \int_{\partial K} |\hat{u} - \tilde{u}|^2 d\sigma \cdot \int_{\partial K} |\hat{\phi} - \tilde{\phi}|^2 d\sigma$$

$$\leq C_1 \cdot h \sum_K \int_{\partial K} |\hat{u} - \tilde{u}|^2 d\sigma$$

stant le :

$\in H^1(K)$, pour tout coté γ de K on a :

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \leq C \|u\|_{H^1(K)}$$

$$| \dots |^2 \leq C_2 h^2 \sum_K \|u\|_{H^1(K)}^2$$

$$| \dots |^2 \leq C_2 h^2 \|u\|_{F_1}^2$$

$$C_i(u_h, \phi) = 0$$

5), (2.7) on obtient (2.2).

lemme :

$$\tilde{u}_\gamma = \frac{1}{h} \int_0^h u(x,0) dx$$

$$\hat{u} = \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h u(x,y) dx dy$$

$$= u(x,0) + \int_0^y u'_y(x,t) dt$$

t sur le carré

$$h^2 + \iint dx dy \int_0^y u'_y(x,t) dt$$

$$h^2 = \iint dx dy \left| \int_0^y u'_y(x,t) dt \right|^2$$

$$\leq h^2 \iint dx dy \left| \int_0^y u'_y(x,t) dt \right|^2$$

$$\leq h^3 \iint dx dy \int_0^h |u'_y(x,t)|^2 dt$$

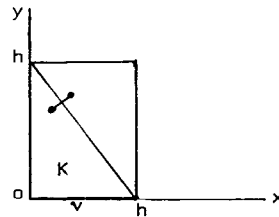
$$\leq h^4 \iint |u'_y(x,t)|^2 dt$$

$$\leq h^4 \|u\|_{H^1(K)}^2$$

d'où

$$|\hat{u} - \tilde{u}_\gamma| \leq \|u\|_{H^1(K)}^2$$

Cas du triangle isocèle :



on prolonge la fonc

sur l'hypothénuse du triangle

résultat précédent en remplaç

$H^1(K)$ par 2 fois la norme.

Cas général: (triangles): par une transformation affine on se
précédent. (cf cours CIARLET [] Chap.6 - Th.3, Th.4)

Cas général: (quadrilatères): on partage le quadrilatère en

Nous allons maintenant nous intéresser à des perturbations d'

passent le Test C.

Théorème 2.2: si tout élément u_h de V_h^1 a la propriété suivante :

$$(2.8) \begin{cases} \text{Si } \|u_h\|_F \leq C & \text{alors il existe } \pi u_h \in F \text{ tel que :} \\ \lim_{h \rightarrow 0} (\pi u_h - u_h) = 0 & \text{dans } F \text{ faible et que } \pi u_h \text{ passe} \end{cases}$$

alors le Test C est passé dans $H^1(\Omega)$.

Démonstration: avant de démontrer ce théorème, fixons un peu

πu_h est en général un élément fini plus simple que u_h , u_h pe

est évidente : on retourne à l'hypothèse C, §1, n°2.

nant quelques utilisations possibles du théorème 2.2.

on suppose ceci : si u_h est borné dans F, on peut construire

le Test C et tel que

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|\tilde{D}_i u_h - \tilde{D}_i \pi u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \cdot h \|u_h\|_F^2.$$

lieu et le Test C est passé.

on suppose maintenant, que πu_h passe le test, que

ans $L^2(\Omega)$ et que $\forall K$ on a

$$\int_K (\pi u_h - u_h) dx = 0 \quad i = 1, 2$$

ions (2.8) a lieu et le Test C est passé.

é fait dans ce numéro est valable en dimension 3, (2.6)

gé en

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C \frac{1}{h} \|u\|_{H^1(K)}^2$$

2.1 est inchangé.

3. Quelques éléments qui passent le Test C dans $H^1(\Omega)$.

3.1 Relations qui permettent de définir des valeurs moyennes sur des éléments.

Soit u un polynôme défini sur K , soit \hat{u} son transporté sur

référence \hat{K} dont 2 sommets sont $(-1,0), (+1,0)$; on va se li

mes de d^05 ; on suppose que

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_1, x_2) = & a + [bx + cy] + [dx^2 + exy + fy^2] + [gx^3 + hx^2y \\ & + ixy^2 + jy^3] + [kx^4 + lx^3y + mx^2y^2 + nxy^3 + py^4] \\ & + [qx^5 + rx^4y + sx^3y^2 + tx^2y^3 + uxy^4 + vy^5] \end{aligned}$$

$$\hat{u} = u_0 + u_1 + \dots + u_5$$

On pose

$$\psi(s) = \hat{u}(s, 0)$$

$$m = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(s) ds = \text{valeur moyenne de } u \text{ sur un } \dots$$

$$E_X = \frac{\psi(X) + \psi(-X)}{2} \quad E_0 = \psi(0)$$

$$D_X = \frac{\psi'(X) - \psi'(-X)}{2}$$

Pour étudier les différentes contributions des polynômes hom

on dispose les résultats sous forme de tableau :

\hat{u}	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$\psi(s) =$	a	$+bs$	$+ds^2$	$+gs^3$	$+ks^4$	$+ls^5$
$m =$	a	$+ 0$	$+ \frac{d}{3}$	$+ 0$	$+ \frac{k}{5}$	$+ \frac{l}{7}$
$E_X =$	a	$+ 0$	$+dX^2$	$+ 0$	$+kX^4$	$+lX^5$
$\psi'(s) =$		b	$+2ds$	$+3gs^2$	$+4ks^3$	$+5ls^4$
$D_X =$		$+ 0$	$2ds$	$+ 0$	$+4k$	$+5l$

Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles de la fonction

(E_Y, E_Z) où f est une fonction connue; X, Y, Z pouvant être

en fait $m = f(\psi(X), \psi(-X), \psi(Y), \psi(-Y), \psi(Z), \psi(-Z))$

$(1, xy)$
 (0)

$(1, xy)$
 (-1, +1)

$(3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$
 $x^2 = \frac{1}{3}$
 $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$(3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$
 $+\frac{1}{3x^2}(E_X - E_0) \quad X = 1$
 (-1, 0, 1)

$(3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$
 $+\frac{1}{3x^2}(E_X - E_0) \quad 0 < X < 1$
 $(-X, 0, +Y)$
 $0 < X < 1$

$(3, x^3y, x^2y^2, xy^3)$
 $\frac{E_1 - E_X}{x^2 - 1} + \frac{1}{3} \frac{E_X - E_1}{x^2 - 1} \quad 0 \leq X < 1$
 $(-1, -X, X, 1)$
 $0 < X < 1$

(3.7) $\begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, x^4y^2, x^3y^2, x^2y^4, xy^5) \\ m = -\frac{2}{3}E_1 + \frac{5}{3}E_X \quad x^2 = \frac{1}{5} \end{cases}$

(3.8) $\begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, \dots, xy^5) \\ m = f(E_0, E_X, E_Y) \quad 0 < X < Y \leq 1 \end{cases}$

(3.9) $\begin{cases} \hat{u} \in (P_5, x^5y, \dots, xy^5) \\ m = g(E_1, E_X, E_Y) \quad 0 \leq X < Y < 1 \end{cases}$

3.1.2. Relations entre valeurs moyennes et valeurs ponctuelles u et de ses dérivées premières.

On ne va pas expliciter les fonctions; on donne seulement les résultats

$m = f(E_X, E_Y, D_Z, D_V)$

les points X, Y, Z, V étant différents ou non selon les cas.

Une première relation est du type :

(3.10) $\begin{cases} \hat{u} \in (P_3, x^3y, x^2y^2, xy^3) \\ m = f(E_X, D_Y) \quad 0 \leq X \leq 1 \quad Y \neq 0 \end{cases}$

qui conduit à 2 cas particuliers

(3.10)₁ $X = 0 \quad 0 < Y \leq 1$

(3.10)₂ $X = 1 \quad 0 < Y \leq 1$

$(x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, xy^4, y^5)$

(E_X, E_Y, D_Z^1) Contraintes sur X, Y, Z

des cas particuliers :

$0, 0 < Y \leq 1, Y^2 \neq 2Z^2$



$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & Y^2 & Z^4 \\ 0 & 2Z & 4Z^3 \end{pmatrix} \neq 0$$



relation du type

(x^5, x^4y, \dots, xy^5)

(E_X, D_Y, D_Z) $YZ(Z-Y)(Z+Y) \neq 0$

$0 \leq X \leq 1, 0 < Y < Z \leq 1$

3 cas :

1



0



$]0, 1[$



on peut aussi établir des relations qui utilisent la dérivée

ce que nous ne ferons pas ici.

éléments

le nombre de degrés de liberté les éléments qui servent à exprimer m dans les relations précédentes. Notons que dans plusieurs cas on ne fixera pas tous les degrés de liberté.

le nombre de degrés de liberté imposés pour passer le Test C et le nombre total de degrés.

TRIANGLES					
type	S c h é m a	d	d°P	p	points(sur -1)
0		3	≥ 1	≥ 3	aucun
1		3	1	3	0
2		3	1	10	± 1
3		6	3	10	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$
4		6	3	10	$\pm 1, 0$
5		9	3	10	$\pm X, 0$ $0 < X < 1$
6		9	3	10	$\pm 1, \pm Y$ $0 < X < 1$
7		9	5	21	$\pm 1, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$
8		15	5	21	$\pm Y, \pm X,$
9		15	5	21	$\pm X, 0, \pm$ $0 \leq X < Y <$

m a	d	d°P	p	points	relation
	9	3	10	$\pm X$ $0 < X \leq 1$	$(3.10)_1$
	9	3	10	$\pm 1, \pm X$	$(3.10)_2$
	15	5	21	$0, \pm X, \pm Y$ contrainte	$(3.11)_1$
	21	5	21	$0 \pm X, \pm Y$ contrainte	$(3.11)_1$
	15	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ contrainte	$(3.11)_2$
	21	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Y$ contrainte	$(3.11)_2$
	15	5	21	$\pm 1, \pm X, \pm Z$ $0 < Y < Z < 1$	$(3.12)_1$
	15	5	21	$0, \pm Y, \pm Z$ $0 < Y < Z \leq 1$	$(3.12)_2$
	18	5	21	$\pm X, \pm Y, \pm Z$ $0 \leq X \leq 1$ $0 < Y < Z < 1$	$(3.12)_3$

type	S c * é m a	d	d°P	p	p
0		4	> 2		
1		4	$P_{1,xy}$	4	\pm
2		8	P_3	10	\pm
3		8	P_3	10	\pm
4		12	$P_3^3, x^3y, x^2y^2, xy^3$	12	\pm $0 <$
5		12	$P_3^3, x^3y, x^2y^2, xy^3$	12	\pm $0 <$
6		12	P_5	21	\pm
7		20	P_5	21	\pm $0 <$
8		20	P_5	21	\pm $0 <$
9		12	$P_3^3, x^3y, x^2y^2, xy^3$	13	\pm $0 <$
10		20	P_5	21	\pm
11		20	P_5	21	\pm $1 <$
12		20	P_5	21	\pm $0 <$
13		20	P_5	21	\pm $0 <$

§ 3. APPROXIMATION DANS $H^2(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

et le Test C dans $H^2(\Omega)$

est identifié avec un élément de $F_2 = (L^2(\Omega))^6$

$$v \equiv (v, D_1 v, D_2 v, D_{1,1} v, D_{1,2} v, D_{2,2} v)$$

$$D_i v = \frac{\partial}{\partial x_i} v, \quad D_{i,j} v = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v$$

un élément $v_h \in V_h^2$ est identifié avec un élément de F_2

$$v_h \equiv (v_h, \tilde{D}_1 v_h, \tilde{D}_2 v_h, \tilde{D}_{1,1} v_h, \tilde{D}_{1,2} v_h, \tilde{D}_{2,2} v_h)$$

$$\|v_h\|_{V_h^2} = \|v_h\|_{F_2}$$

forme du Test C est ici :

$$\left. \begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \leq c \\ u_h \in V_h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i, j = 1, 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) - (u_h, D_{j,i} \varphi)\} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \|u_h\|_{V_h^2} \leq c \\ u_h \in V_h^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ pour } i, j = 1, 2 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_i u_h, \varphi) + (u_h, D_i \varphi)\} = 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{(\tilde{D}_{i,j} u_h, \varphi) + (\tilde{D}_j u_h, D_i \varphi)\} = 0 \end{array} \right.$$

si tout élément $(u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h, \tilde{D}_{1,1} u_h, \tilde{D}_{1,2} u_h, \tilde{D}_{2,2} u_h)$ de V_h^2 est tel

$(u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h)$ ont la propriété Valeur Moyenne alors le Test C est passé

dans $H^2(\Omega)$.

Démonstration:

On applique le Théorème 2.1 à $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$.

Cela va permettre la construction de nombreux éléments

Test C dans $H^2(\Omega)$; il suffit de choisir les degrés de l

les 3 valeurs moyennes de $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ s'expriment en

grés de liberté.

Notons la remarque importante suivante :

si $u_h, \tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ ont la propriété V.M. alors $u_h, \tilde{D}_1 u_h,$

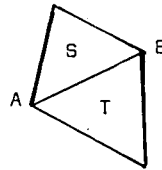
C est passé; D_s est la dérivée tangentielle, D_n la dérivée

si maintenant, on impose aux éléments, le raccordement

triangulation, on obtient le

Théorème 1.2 : le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall u_h \in V_h^2$ et

AB commune à 2 éléments S et T on a :



$$(1.3) \left\{ \begin{array}{l} u_h^S(A) = u_h^T(A), \quad u_h^S(B) = u_h^T(B) \\ \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^S d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_h^T d\sigma \end{array} \right.$$

Démonstration :

Les relations (1.3) entraînent ceci : $\tilde{D}_s u_h, \tilde{D}_n u_h$ vérifi

ès le théorème 2.1, $\tilde{D}_1 u_h, \tilde{D}_2 u_h$ passent le Test dans $H^1(\Omega)$.

le plus qu'à montrer que u_h passe le test dans $H^1(\Omega)$.

le dans le cas d'un triangle : si $u_h \in V_h^2$, on désigne par πu le

l'interpolation de u de u_h (dans chaque élément K de la triangula-

sait que (cf. CIARLET [])

$$\|u_h - \pi u_h\|_{H^1(K)} \leq c h \|u_h\|_{H^2(K)}$$

te c ne dépendant pas de h .

tenant :

$$A_1(u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1 u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

$\in C^0(\Omega)$ et donc

$$A_1(\pi u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1 \pi u_h, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (\pi u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0$$

$$A_1(u_h, \varphi) = A_1(u_h - \pi u_h, \varphi)$$

$$A_1(u_h, \varphi) = (\tilde{D}_1(u_h - \pi u_h), \varphi)_{L^2(\Omega)} + (u_h - \pi u_h, D_1 \varphi)_{L^2(\Omega)}$$

de (1.4) il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} A_1(u_h, \varphi) = 0$$

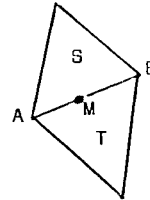
adrilatères : on partage en 2 triangles et dans chaque triangle, on

e prolongement précédent.

blir maintenant un théorème analogue :

1.3 : le Test C est passé dans $H^2(\Omega)$ si $\forall u_h \in V_h^2$ et pour toute

interface AB on a :



$$(1.7) \begin{cases} u_n^S(M) = u_n^T(M) \\ \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_n^S d\sigma = \frac{1}{AB} \int_{AB} D_n u_n^T d\sigma \end{cases}$$

Démonstration:

Comme celle du Théorème 1.2 avec les changements suivants :

- 1) πu_h interpole maintenant aux milieux des
- 2) il faut établir (1.4) pour cette interpolation
- 3) On n'a plus (1.5) : $A_1(\pi u_h, \varphi) = 0$

mais seulement

$$\lim A_1(\pi u_h, \varphi) = 0$$

puisque πu_h est du type T1 (cf. §2)

le reste de la démonstration est inchangé.

Conclusion : chacun des 3 théorèmes va donner naissance

passent le Test C dans $H^2(\Omega)$.

2. Quelques expressions des valeurs moyennes de u, u'_x, u'_y .

On reprend ce qui a été fait dans le § 2, n°3. u est

par une transformation affine, sur le triangle $(-1,0)$,

désigne le polynôme homogène de degré d qui entre dans la

$$\begin{aligned}
 u_0 &+ u_1 &+ u_2 &+ u_3 &+ u_4 &+ u_5 \\
 a &+ bs &+ ds^2 &+ gs^3 &+ ks^4 &+ qs^5 \\
 &+ b &+ 2ds &+ 3cs^2 &+ 4ks^3 &+ 5qs^4 \\
 &+ c &+ es &+ hs^2 &+ ls^3 &+ rs^4 \\
 a &&+ \frac{d}{3} &&+ \frac{k}{5} & \\
 &+ b &&+ g &&+ q \\
 &+ c &&+ \frac{h}{3} &&+ \frac{r}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(s) &= \hat{u}(s, 0) & m &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(s) ds \\
 \psi_x(s) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(s, 0) & m_x &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_x(s) ds \\
 \psi_y(s) &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(s, 0) & m_y &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_y(s) ds
 \end{aligned}$$

B habituel est ici $(-1, +1)$.

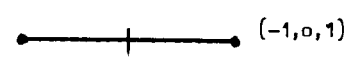
quelques relations qui font intervenir des valeurs de la fonction et des dérivées

$$\hat{u} \in (P_2, x^2, y, xy^2)$$

$$m_x = \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2}$$

$$m_y = \psi_y(0)$$

$$\psi_x(0) = \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2}$$

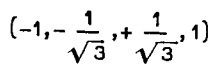


$$\hat{u} \in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5)$$

$$m_x = \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2}$$

$$m_y = \frac{\psi_y(x) + \psi_y(-x)}{2}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$



$$(2.3) \quad \begin{cases} \hat{u} \in (P_4, x^5, x^3y^2, x^2y^3, y^5) \\ m_x = \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\ m_y = \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1)) + \frac{2}{3} \psi_y(0) \\ \psi_x(0) = \frac{3}{4} (\psi(1) - \psi(-1)) - \frac{1}{4} (\psi_x(1) + \psi_x(-1)) \end{cases}$$

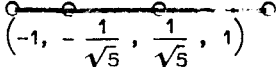
$$(2.4) \quad \begin{cases} \hat{u} \in P_6 \\ m_x = \psi(1) - \psi(-1) \\ m_y = \frac{5}{18} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{4}{9} \psi_y(0) \\ \psi_x(0) = \frac{9}{8} (\psi(1) - \psi(-1)) - \frac{5}{8} (\psi_x(x) + \psi_x(-x)) \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \begin{cases} \hat{u} \in P_6 \\ m_x = \frac{\psi(1) - \psi(-1)}{2} \\ m_y = \frac{5}{6} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1)) \end{cases}$$

2.2. Quelques autres relations :

$$(2.6) \quad \begin{cases} u \in P_4 \\ m_x = \psi_x(x) + \psi_x(-x) \\ m_y = \frac{\psi_y(x) + \psi_y(-x)}{2} \end{cases} \quad x^2 = \frac{1}{3}$$

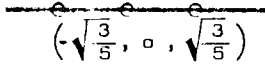
$$(2.7) \quad \begin{cases} u \in P_4 \\ m_x = \frac{2}{3} \psi_x(0) + \frac{1}{6} (\psi_x(1) + \psi_x(-1)) \\ m_y = \frac{2}{3} \psi_y(0) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1)) \end{cases}$$

$$u \in P_6$$


$$\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1\right)$$

$$m_x = \frac{5}{12} (\psi_x(x) + \psi_x(-x)) + \frac{1}{12} (\psi_x(1) + \psi_x(-1)) \quad x^2 = \frac{1}{5}$$

$$m_y = \frac{5}{6} (\psi_y(x) + \psi_y(-x)) + \frac{1}{6} (\psi_y(1) + \psi_y(-1))$$

$$u \in P_6$$


$$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

$$m_x = \frac{4}{9} \psi_x(0) + \frac{5}{18} (\psi_x(x) + \psi_x(-x)) \quad x^2 = \frac{3}{5}$$

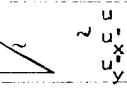
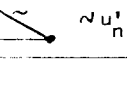




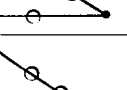
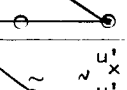
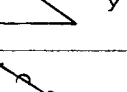
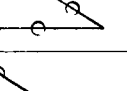
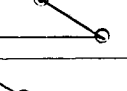
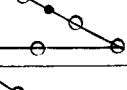
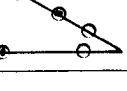
$$m_y = \frac{4}{9} \psi_y(0) + \frac{5}{18} (\psi_y(x) + \psi_y(-x))$$

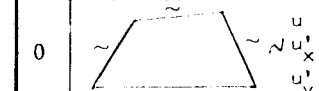



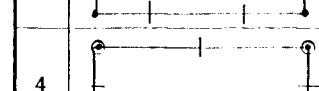

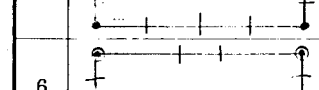
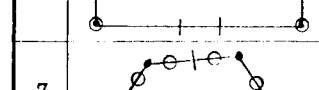
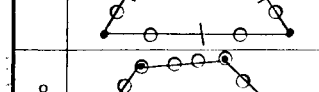

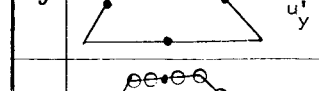
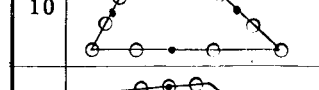
nts qui passent le Test C dans $H^2(\rho)$.

de degrés de liberté imposés pour passer le Test C

total de degrés de liberté .

(voir tableau page
suivante)

LES	d	d° P	p	Points	relation
 2 u, u', u'' x, x', x''	9				Th. 1.1
 2 u, u', u'' x, x', x''	6				Th. 1.2
 6 MURLEY	6	2	6	(-1, 0, +1)	(2.1)
 u, u', u'' FRAEISS	6	$P_2 < P_K < P_3$		(-1, 0, +1)	(2.2)
 15 $P_4, x^3 y^2, x^2 y^3$	15	$P_4, x^3 y^2, x^2 y^3$	17	$(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$	(2.2)
 15 $P_4, x^3 y^2, x^2 y^3$	15	$P_4, x^3 y^2, x^2 y^3$	17	(-1, 0, +1)	(2.3)
 18 P_5	18	P_5	21	$(-1, -\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, \sqrt{\frac{3}{5}}, 1)$	(2.4)
 21 P_5	21	P_5	21	$(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1)$	(2.5)
 9 2 u, u', u'' x, x', x''	9				Th. 1.3
 15 P_4	15	P_4	15	$(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$	(2.9)
 15 P_4	15	P_4	15	(-1, 0, 1)	(2.10)
 21 P_5	21	P_5	21	$(-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}, 1)$	(2.11)
 21 P_5	21	P_5	21	$-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0, +\sqrt{\frac{3}{5}}$	(2.12)

type	Schéma	d	P	p
0		12		
1		8		
2		8	$P_2, x^2 y, xy^2$	12
3		12	P_4	15
4		16	$P_4, x^3 y^2, x^2 y^3$	17
5		16	P_5	21
6		20	P_5	21
7		24	P_6	28
8		28	P_6	28
9		12		
10		28	P_6	28
11		28	P_6	28