PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

M. BERNADOU
P. G. CIARLET

Sur l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. Koiter

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-47
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A2_0>

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR L'ELLIPTICITE DU MODELE LINEAIRE DE COQUES DE W.T. KOITER

M. BERNADOU* - P.G. CIARLET**

Résumé. L'objet de ce travail est de démontrer, dans le cas du modèle linéaire de W.T. KOITER, l'ellipticité de l'énergie de déformation d'une coque assujettie à des conditions aux limites convenables. Une étape essentielle consiste à démontrer que si les tenseurs de déformation et de changement de courbure de la surface moyenne de la coque sont nuls au sens des distributions, le champ de déplacement est nécessairement un mouvement rigide.

Abstract. The purpose of this paper is to show, in the case of W.T. KOITER's linear model, that the strain energy of a shell is elliptic, when it is subjected to appropriate boundary conditions. An essential step consists in showing that if the strain tensor and change of curvature tensor vanish in the sense of distributions along the middle surface of the shell, the displacement field is necessarily that of a rigid body motion.

* I.R.I.A.-LABORIA.

** Université Pierre et Marie Curie, Paris

A paraître dans les Comptes-Rendus du Deuxième Colloque International sur les Méthodes de Calcul Scientifique et Technique (15-19 Décembre 1975, IRIA, Versailles).

INTRODUCTION.

Il existe deux familles principales de modélisation des coques minces. La première famille se rattache à la théorie de KIRCHHOFF-LOVE. Elle a été reprise et développée par de nombreux auteurs, notamment par KOITER [1][2], KOITER-SIMMONDS [1]. La seconde famille fait appel à la théorie des surfaces de COSSERAT [1] et a été développée notamment par NAGHDI [1][2]. Pour les calculs effectifs il semble que la modélisation de KOITER [1][2] réponde aux besoins des Ingénieurs et c'est ainsi que ARGYRIS-HAASE-MALEJANNAKIS [1] l'utilisent pour la résolution numérique de problèmes de coques, après discrétisation par la Méthode des Eléments Finis. Une étude de l'approximation de la solution pour des Méthodes d'Eléments Finis est faite par CIARLET [3], où l'on trouvera une bibliographie sur ce sujet. Cette étude est poursuivie dans BERNADOU [1].

L'objet de ce travail est l'étude de l'ellipticité du modèle linéaire de coques de W.T. KOITER [1][2]. De cette étude on déduit un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème.

On utilisera constamment les propriétés des espaces de Sobolev pour lesquelles on renvoie à ADAMS [1], LIONS-MAGENES [1], NEČAS [1].

L'ellipticité d'autres modèles linéaires de coques a été étudiée par différents auteurs. On pourra notamment se rapporter à ROUGEE [1] pour des coques cylindriques, à COUTRIS [1] pour le modèle de NAGHDI [1], à GORDEZIANI [1] pour le modèle de VEKUA [1], à SHOIKHET [1] pour le modèle de NOVOZHILOV [1].

Au Chapitre 1 nous rappelons les résultats de géométrie différentielle des surfaces nécessaires pour la modélisation d'une coque mince. Pour des exposés de Calcul Tensoriel on pourra consulter GOUYON [1], LICHNEROWICZ [1] et pour des exposés de Géométrie Différentielle à LELONG-FERRAND [1], VALIRON [1]. Pour la rédaction de ce Chapitre nous nous sommes inspirés des ouvrages de GREEN-ZERNA [1] et de NAGHDI [2] respectivement orientés vers les théories de l'élasticité et de coques.

L'essentiel de la modélisation linéaire de KOITER [1] est rappelé au Chapitre 2. On montre notamment comment des hypothèses convenables permettent de ramener l'étude d'un problème tri-dimensionnel à l'étude d'un nouveau problème bi-dimensionnel.

La carte $\vec{\phi}$ définissant la surface moyenne de la coque est supposée "assez" régulière. Il est alors possible d'établir des normes équivalentes pour les tenseurs de surface et de substituer des dérivations covariantes aux dérivations usuelles. C'est l'objet du Chapitre 3.

Dans le Chapitre 4 nous définissons l'espace des fonctions admissibles $\vec{V}$ puis nous donnons une formulation variationnelle du problème.

Nous montrons dans le chapitre 5 que si les tenseurs de déformation et de changement de courbure sont nuls pour un champ de déplacements $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$,

alors ce champ de déplacement est un mouvement rigide ou solidifiant. L'adjonction de conditions d'encastrement entraîne $\vec{v} = \vec{0}$.

Au Chapitre 6 on établit l'ellipticité du modèle linéaire de KOITER [1][2] pour une coque mince de forme quelconque et on en déduit un théorème d'existence et d'unicité de la solution. Nous suivons pour cela une méthode de démonstration utilisée par le second auteur pour établir l'ellipticité d'un modèle d'arc; cf. CIARLET [1][2].

En conclusion, retenons que le théorème du mouvement rigide joue un rôle essentiel dans la démonstration de la $\vec{V}$-ellipticité. Cette condition de mouvement rigide, également désignée par condition de mouvement solidifiant se retrouve dans la plupart des modèles déclarés satisfaisants par les Mécaniciens. A ce titre nous pensons que ce type de démonstration s'adapte aux différentes modélisations existantes.

PLAN

CHAPITRE 1 : Préliminaires géométriques.

1.1. Définition de la surface.

1.2. Les trois formes fondamentales de la surface.

1.3. Dérivation covariante.

CHAPITRE 2 : Modélisation d'une coque.

2.1. Définition de la géométrie de la coque.

2.2. Evaluation des déformations pour une coque mince.

2.3. Interprétation géométrique de la déformation de la surface moyenne.

2.4. Evaluation des contraintes pour une coque mince.

2.5. L'énergie de déformation.

2.6. Le travail des forces extérieures.

CHAPITRE 3 : Coordonnées curvilignes et normes équivalentes.

3.1. Quelques inégalités d'origine géométrique.

3.2. Normes équivalentes dans $L^2(\Omega)$.

3.3. Normes équivalentes dans $H^1(\Omega)$.

3.4. Normes équivalentes sur $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$.

CHAPITRE 4 : Le problème variationnel.

4.1. L'espace des fonctions admissibles $\vec{V}$.

4.2. Formulations du problème.

CHAPITRE 5 : Le théorème du mouvement rigide.

5.1. Le théorème du mouvement rigide.

5.2. Conséquence du théorème du mouvement rigide.

CHAPITRE 6 : $\vec{V}$-ellipticité du modèle linéaire de W.T. KOITER.

6.1. $\vec{V}$-ellipticité de la forme $a(\cdot,\cdot)$.

6.2. La forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ est continue sur $\vec{V}\times\vec{V}$.

6.3. La forme linéaire $f(\cdot)$ est continue sur $\vec{V}$.

6.4. Théorème d'existence et d'unicité.

CHAPITRE 1 - PRELIMINAIRES GEOMETRIQUES

ORIENTATION : Nous rappelons dans ce paragraphe les résultats de géométrie différentielle des surfaces qui sont nécessaires pour la modélisation d'une coque mince (cf. Chapitre 2) et pour la démonstration du Théorème du mouvement rigide (cf. Chapitre 5). Ces résultats sont établis pour des coques dont la surface moyenne peut être représentée à l'aide d'une seule carte et pour des coordonnées curvilignes quelconques.

1.1. DEFINITION DE LA SURFACE :

Nous désignons par $\mathcal{E}^3$ l'espace affine euclidien et par $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ un repère fixe de $\mathcal{E}^3$, orthonormé pour simplifier. Un point quelconque M de $\mathcal{E}^3$ sera repéré par

(1.1-1) $$\overrightarrow{OM} = x^i\vec{e}_i = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + x^3\vec{e}_3.$$

D'une façon générale, tout indice latin (resp. grec) prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,2,3\}$ (resp. $\{1,2\}$) et, sauf indication contraire, la répétition de un (ou plusieurs) indice, l'un en position supérieure, l'autre en position inférieure, entraîne selon la convention d'Einstein, la sommation sur toutes les valeurs possibles de l'indice. De plus, nous convenons de noter les dérivées partielles à l'aide d'une virgule, par exemple

$$\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} = f_{,\alpha}.$$

Soit Ω un ouvert borné d'un plan $\mathcal{E}^2$, de frontière Γ. Alors une surface S de l'espace euclidien $\mathcal{E}^3$ est l'image de $\bar{\Omega}$ par une carte, i.e., une application

(1.1-2) $$\vec{\phi} : (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} \subset \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^3.$$

Les paramètres ξ^1,ξ^2 forment un système de coordonnées curvilignes de la surface S. Bien entendu la donnée d'une surface ne détermine pas d'une façon unique l'application $\vec{\phi}$ ni l'ensemble Ω.

Par la suite, nous supposons la frontière Γ et l'application $\vec{\phi}$ suffisamment régulières. En particulier nous supposons que tous les points de la surface $S = \vec{\phi}(\Omega)$ sont réguliers, en ce sens que les deux vecteurs

(1.1-3) $$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha}, \qquad \alpha = 1,2,$$

sont linéairement indépendants en tout point $\xi = (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega}$. Ces deux vecteurs sont tangents aux lignes coordonnées $\vec{\phi}(\xi^\alpha = c^{te})$ et ils définissent le plan tangent à la surface S au point $\vec{\phi}(\xi)$. On introduit ensuite le vecteur

(1.1-4) $$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1\times\vec{a}_2}{|\vec{a}_1\times\vec{a}_2|},$$

$|\cdot|$ désignant la norme euclidienne dans $\mathcal{E}^3$ muni de son produit scalaire habituel

$(\vec{a},\vec{b}) \rightarrow \vec{a}.\vec{b}$. Le point $\vec{\phi}(\xi)$ et les trois vecteurs $\vec{a}_i$ définissent alors un repère local de la surface (cf. Figure 1.1-1).

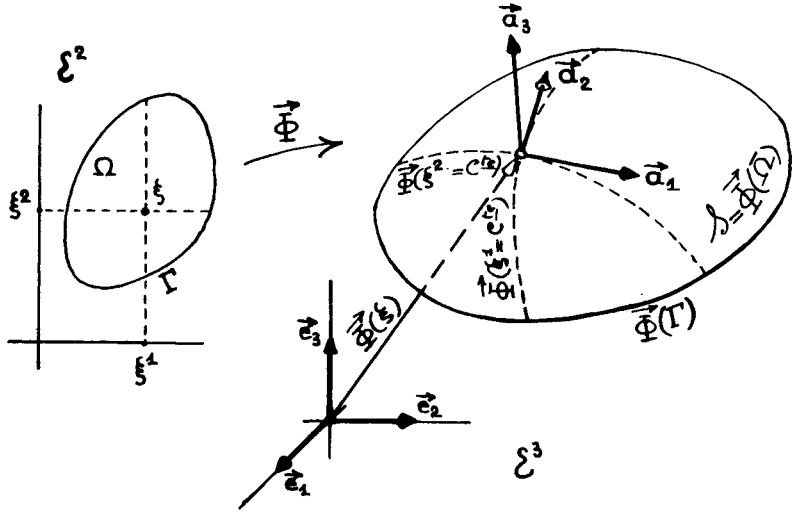

Figure 1.1-1

1.2. LES TROIS FORMES FONDAMENTALES DE LA SURFACE :

La première forme fondamentale de la surface $(a_{\alpha\beta})$, ou tenseur métrique de la surface, est définie par

(1.2-1) $$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha.\vec{a}_\beta = \vec{\phi}_{,\alpha}.\vec{\phi}_{,\beta}.$$

Grâce à elle on exprime notamment l'élément linéaire et l'élément d'aire de la surface, d'où la seconde appellation. Soit une courbe tracée sur la surface S, définie par les applications

$$t \in]a,b[\subset R \rightarrow \xi^\alpha = f^\alpha(t), \ \alpha = 1,2.$$

L'élément linéaire ds de cette courbe est donné par

(1.2-2) $$ds = [a_{\alpha\beta}(f^\alpha)'(f^\beta)']^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Aux vecteurs $\vec{a}_\alpha$ on associe les deux autres vecteurs $\vec{a}^\beta$ du plan tangent définis

par

$$\vec{a}_\alpha . \vec{a}^\beta = \delta^\alpha_\beta \text{ (pas de sommation si } \alpha = \beta).$$

Ces vecteurs sont liés aux vecteurs $\vec{a}_\alpha$ par les relations

(1.2-3) $$\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta}\, \vec{a}^\beta, \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta, \quad a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha . \vec{a}^\beta = a^{\beta\alpha},$$

la matrice $(a^{\alpha\beta})$ étant l'inverse de la matrice $(a_{\alpha\beta})$, qui est toujours inversible puisque tous les points sont réguliers.

Remarque 1.2-1. On obtiendrait des expressions plus simples en supposant (ce qui est toujours loisible théoriquement ...) que les lignes coordonnées sont les lignes de courbure de la surface : les vecteurs $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont alors orthogonaux, mais non nécessairement orthonormés, en tout point de la surface et les matrices $(a_{\alpha\beta})$ et $(a^{\alpha\beta})$ sont diagonales. ■

Remarque 1.2-2 : Il n'est pas nécessaire de supposer les vecteurs de base $\vec{e}^i$ de $\mathcal{E}^3$ orthonormés mais c'est commode pour calculer des produits scalaires tels que ceux de (1.2-1). ■

Il est utile de noter les expressions de certains des produits vectoriels des des vecteurs de base :

(1.2-4) $$\begin{cases} \vec{a}_\alpha \times \vec{a}_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta}\, \vec{a}^3, \\ \vec{a}^\alpha \times \vec{a}^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}\, \vec{a}_3, \\ \vec{a}_3 \times \vec{a}_\beta = \varepsilon_{\beta\lambda}\, \vec{a}^\lambda, \\ \vec{a}_3 \times \vec{a}^\beta = \varepsilon^{\beta\lambda}\, \vec{a}_\lambda, \end{cases}$$

avec

$$\vec{a}^3 = \vec{a}_3$$

(1.2-5) $$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{a}\, e_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{\alpha\beta},$$

(1.2-6) $$(e_{\alpha\beta}) = (e^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

(1.2-7) $$a = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \neq 0 \qquad \text{(points réguliers).}$$

L'élément d'aire dS est donné par la relation

(1.2-8) $$dS = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|\, d\xi^1 d\xi^2 = \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2,$$

dont l'interprétation géométrique est évidente.

La seconde forme fondamentale de la surface $(b_{\alpha\beta})$ est définie par

(1.2-9) $$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = -\vec{a}_\alpha . \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 . \vec{a}_{\alpha,\beta} = \vec{a}_3 . \vec{a}_{\beta,\alpha}.$$

Aux composantes covariantes $b_{\alpha\beta}$ on associe par les opérations tensorielles usuelles les composantes mixtes et contravariantes suivantes

(1.2-10) $$\begin{cases} b_\alpha^{\cdot\beta} = b^\beta_{\cdot\alpha} = b^\beta_\alpha = a^{\beta\lambda}\, b_{\lambda\alpha}, \\ b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\lambda}\, a^{\beta\nu}\, b_{\lambda\nu}, \end{cases}$$

et inversement

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\lambda}\, b^\lambda_\beta = a_{\alpha\lambda}\, a_{\beta\nu}\, b^{\lambda\nu}, \ \ldots .$$

Courbures normales de la surface S :

Soit P un point quelconque de la surface S et $\vec{t}$ une direction donnée du plan tangent en P à la surface S. L'intersection de S avec le plan $(P, \vec{t}, \vec{a}_3)$ est une courbe (c) définie par deux applications

$$t \in]a,b[\subset R \longrightarrow \xi^\alpha = f^\alpha(t), \ \alpha = 1,2,$$

et dont le centre de courbure Q vérifie $\vec{PQ} = R_N\, \vec{a}_3$. La courbure normale $\frac{1}{R_N}$ de la surface S au point P, pour la direction $\vec{t}$ donnée par le rapport $(f^1)'/(f^2)'$, vaut

(1.2-11) $$\frac{1}{R_N} = \frac{b_{\alpha\beta}(f^\alpha)'(f^\beta)'}{a_{\alpha\beta}(f^\alpha)'(f^\beta)'} .$$

A chaque direction $\vec{t}$ on associe de la sorte une courbure normale de S. On montre que lorsque $\vec{t}$ balaye le plan tangent les courbures normales admettent un maximum $\frac{1}{R_{N_1}}$ et un minimum $\frac{1}{R_{N_2}}$, appelées courbures principales, respectivement associées à des directions $\vec{t}_1$ et $\vec{t}_2$ orthogonales appelées directions principales de courbure. Les courbures principales $1/R_{N_1}$ et $1/R_{N_2}$ vérifient les relations

(1.2-12) $$\begin{cases} H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{N_1}} + \frac{1}{R_{N_2}}\right) = \frac{1}{2}\, b^\alpha_\alpha & \text{(courbure moyenne),} \\ K = \frac{1}{R_{N_1}}\, \frac{1}{R_{N_2}} = b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2 & \text{(courbure totale).} \end{cases}$$

Ces considérations sont illustrées par la Figure 1.2-1.

La troisième forme fondamentale de la surface $(c_{\alpha\beta})$ est définie par

(1.2-13) $$c_{\alpha\beta} = b^\lambda_\alpha\, b_{\lambda\beta} = b_{\alpha\lambda}\, b^\lambda_\beta = c_{\beta\alpha}.$$

Remarque 1.2-3 : Un procédé commode pour retrouver la définition de ces trois formes est de noter qu'elles sont respectivement associées aux trois produits scalaires possibles des différentielles $d\vec{\phi}$, $d\vec{a}_3$:

$$\begin{cases} d\vec{\phi} . d\vec{\phi} = a_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \\ -\, d\vec{\phi} . d\vec{a}_3 = b_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta, \\ d\vec{a}_3 . d\vec{a}_3 = c_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta. \end{cases}$$ ■

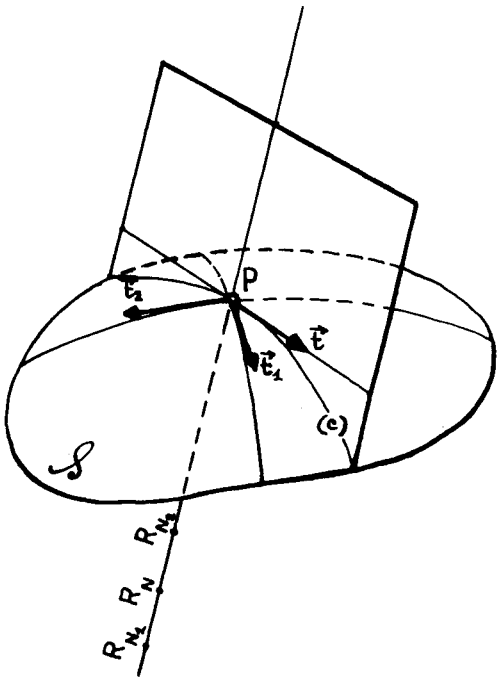

Figure 1.2-1

1.3. DERIVATION COVARIANTE :

La base locale $(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$ n'est ni normée, ni orthogonale. Le problème de la dérivation dans une telle base est simplifié par l'introduction des symboles de Christoffel et de la notion de dérivée covariante.

Les symboles de Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ de la surface sont définis par

(1.3-1) $$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} = \vec{a}_{\alpha}.\vec{a}_{\beta,\gamma} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta,\gamma}+a_{\alpha\gamma,\beta}-a_{\beta\gamma,\alpha}),$$

(1.3-2) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = a^{\alpha\lambda}\Gamma_{\lambda\beta\gamma} = \vec{a}^{\alpha}.\vec{a}_{\gamma,\beta} = \vec{a}^{\alpha}.\vec{a}_{\beta,\gamma}.$$

Remarque 1.3-1 : Au lieu de $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ certains auteurs adoptent les notations $\Gamma_{\beta\alpha\gamma}$ ou $\Gamma_{\beta\gamma\alpha}$. ■

Les composantes des dérivées des vecteurs de base dans le repère local sont données par les formules de Gauss et de Weingarten :

(1.3-3) (Gauss) $$\begin{cases} \vec{a}_{\alpha,\beta} = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\,\vec{a}_{\gamma} + b_{\alpha\beta}\,\vec{a}_3, \\ \vec{a}^{\alpha}_{,\beta} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda}\,\vec{a}^{\lambda} + b^{\alpha}_{\beta}\,\vec{a}_3, \end{cases}$$

(1.3-4) (Weingarten) $$\vec{a}_{3,\alpha} = \vec{a}^{3}{}_{,\alpha} = -b^{\gamma}_{\alpha}\,\vec{a}_{\gamma}.$$

Les dérivées covariantes d'un tenseur de surface seront notées à l'aide d'une barre verticale (|); pour les tenseurs d'ordre 1 et 2 il vient par exemple :

(1.3-5) $$\begin{cases} T_{\alpha}\big|_{\gamma} = T_{\alpha,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\,T_{\lambda}, \\ T^{\alpha}\big|_{\gamma} = T^{\alpha}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\gamma}\,T^{\lambda}, \end{cases}$$

(1.3-6) $$\begin{cases} T_{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = T_{\alpha\beta,\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\gamma}\,T_{\lambda\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\,T_{\alpha\lambda}, \\ T^{\alpha}_{\cdot\beta}\big|_{\gamma} = T^{\alpha}_{\cdot\beta,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}\,T^{\lambda}_{\cdot\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}\,T^{\alpha}_{\cdot\lambda}, \\ T^{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = T^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\lambda\gamma}\,T^{\lambda\beta} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\gamma}\,T^{\alpha\lambda}. \end{cases}$$

L'opération de dérivation covariante n'est pas en général commutative au contraire des dérivées partielles usuelles. On montre par exemple que

(1.3-7) $$T_{\alpha}\big|_{\beta\gamma} - T_{\alpha}\big|_{\gamma\beta} = (b_{\alpha\gamma}b_{\lambda\beta} - b_{\alpha\beta}b_{\lambda\gamma})T^{\lambda},$$

où

$$T^{\lambda} = a^{\lambda\beta}\,T_{\beta},\ T_{\beta} = a_{\beta\lambda}\,T^{\lambda}.$$

On notera que les tenseurs $(a_{\alpha\beta})$, $(a^{\alpha\beta})$, $(\epsilon_{\alpha\beta})$, $(\epsilon^{\alpha\beta})$ respectivement définis en (1.2-1) (1.2-3) et (1.2-5) vérifient

(1.3-8) $$a_{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = a^{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = \epsilon^{\alpha\beta}\big|_{\gamma} = 0.$$

Grâce à (1.3-5) les formules de Gauss s'écrivent

(1.3-9) $$\vec{a}_{\alpha}\big|_{\beta} = b_{\alpha\beta}\,\vec{a}_3,\ \vec{a}^{\alpha}\big|_{\beta} = b^{\alpha}_{\beta}\,\vec{a}_3,$$

et l'on convient de poser dans les formules de Weingarten :

(1.3-10) $$\vec{a}_{3,\alpha} = \vec{a}_3\big|_{\alpha} = \vec{a}^{3}\big|_{\alpha}.$$

Les coefficients de la deuxième forme fondamentale vérifient les relations de Mainardi-Codazzi :

(1.3-11) $$b_{\alpha 1}\big|_2 = b_{\alpha 2}\big|_1 ,$$

ou encore grâce à (1.3-8)

(1.3-12) $$b^{\alpha}_{1}\big|_2 = b^{\alpha}_{2}\big|_1 .$$

En appliquant les formules de Gauss et Weingarten au calcul des dérivées partielles d'un vecteur quelconque

(1.3-13) $$\vec{V} = \vec{V}(\xi) = v^{\alpha}\vec{a}_{\alpha} + v^{3}\vec{a}_{3}$$

de $\mathcal{E}^3$, il vient l'égalité

(1.3-14) $$\vec{V}_{,\alpha} = (v^{\lambda}\big|_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha}v^{3})\vec{a}_{\lambda} + (v^{3}\big|_{\alpha} + b_{\lambda\alpha}v^{\lambda})\vec{a}_{3} = (v_{\lambda}\big|_{\alpha} - b_{\lambda\alpha}v_{3})\vec{a}^{\lambda} + (v_{3}\big|_{\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha}\, v_{\lambda})\vec{a}^{3},$$

où l'on a convenu de poser

(1.3-15) $$v_{3,\alpha} = v_{3}\big|_{\alpha}.$$

Dans ces conditions $v_{3|\alpha}$ est un tenseur de surface dont les dérivées covariantes sont données par

(1.3-16) $$v_{3}\big|_{\alpha\beta} = v_{3}\big|_{\beta\alpha} = v_{3,\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\, v_{3,\lambda} .$$

CHAPITRE 2 - MODELISATION D'UNE COQUE

ORIENTATION : Nous décrivons ici la modélisation de KOITER [1][2] pour le cas de petites déformations de la coque. Cette modélisation est essentiellement obtenue de la façon suivante : on considère la coque comme un milieu continu tri-dimensionnel, d'épaisseur constante et "petite", moyennant quoi on peut raisonnablement supposer que l'état de contrainte est approximativement plan et que la distribution des contraintes parallèles à la surface moyenne de la coque est approximativement linéaire. Une fois ces hypothèses faites, on "intègre sur l'épaisseur" l'énergie de la coque exprimée en coordonnées curvilignes appropriées, ce qui conduit à un problème ou l'inconnue, i.e., le déplacement d'un point de la surface moyenne de la coque, est une fonction de deux variables seulement : les deux coordonnées curvilignes de la surface moyenne de la coque (l'obtention de l'énergie d'une plaque mince est un cas particulier de ce procédé).

2.1. DEFINITION DE LA GEOMETRIE DE LA COQUE:

Nous définissons la géométrie de la coque à partir de la définition de sa surface moyenne. Par analogie avec le Chapitre 1 nous désignons par Ω un ouvert borné d'un plan $\mathcal{E}^2$, de frontière Γ. Alors la surface moyenne S de la coque est l'image dans $\mathcal{E}^3$ de l'ensemble $\overline{\Omega}$ par une carte $\vec{\phi}$:

(2.1-1) $$\vec{\phi} : (\xi^1,\xi^2) \in \overline{\Omega} \subset \mathcal{E}^2 \longrightarrow \vec{\phi}(\xi) \in \mathcal{E}^3 .$$

On note $\partial S = \vec{\phi}(\Gamma)$ d'où $\overline{S} = S \cup \partial S$. Tout comme au Chapitre 1 nous supposons $\vec{\phi}$ et Γ suffisamment régulières. En particulier tous les points de $\overline{S}$ sont supposés réguliers. Outre les deux coordonnées curvilignes ξ^1,ξ^2 qui nous ont permis de définir la surface moyenne nous introduisons une troisième coordonnée curviligne ξ^3 qui est la cote mesurée sur la normale $\vec{a}_3$ à la surface $\overline{S}$ au point $\vec{\phi}(\xi^1,\xi^2)$. Ce système de coordonnées curvilignes (ξ^1,ξ^2,ξ^3) est, au moins localement, un système de coordonnées curvilignes de $\mathcal{E}^3$ généralement désigné par système de coordonnées normales.

L'épaisseur de la coque étant définie par une application

(2.1-2) $$e : (\xi^1,\xi^2) \in \overline{\Omega} \longrightarrow \{x \in R;\ x > 0\},$$

la coque $\mathcal{C}$ est alors le sous-ensemble fermé de $\mathcal{E}^3$ défini par

(2.1-3) $$\begin{cases} \mathcal{C} = \{M \in \mathcal{E}^3;\ \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) + \xi^3\vec{a}_3,\quad (\xi^1,\xi^2) \in \Omega, \\ \qquad -\frac{1}{2}\, e(\xi^1,\xi^2) \leqslant \xi^3 \leqslant \frac{1}{2}\, e(\xi^1,\xi^2)\}. \end{cases}$$

Si la fonction e est constante on dit que la coque est d'épaisseur constante. Les Mécaniciens disent qu'une coque est mince si, en tout point $\vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) \in \overline{S}$, l'épaisseur $e(\xi^1,\xi^2)$ est "petite" (au plus de l'ordre du $\frac{1}{10}$) devant le minimum du module du rayon de courbure normal (1.2-11). Dans le cas contraire on parle de

coque épaisse.

Nous désignerons par face supérieure (resp. inférieure) la surface

$$\{M \in \mathcal{E}^3;\ \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) + \frac{e}{2}\vec{a}_3\ ,\ (\xi^1,\xi^2) \in \Omega\}$$

$$(\text{resp. } \{M \in \mathcal{E}^3;\ \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) - \frac{e}{2}\vec{a}_3\ ,\ (\xi^1,\xi^2) \in \Omega\}),$$

et on appellera bord de la coque la surface

$$\{M \in \mathcal{E}^3;\ \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) + \xi^3\vec{a}_3,\ (\xi^1,\xi^2) \in \Gamma,\ -\frac{e}{2} < \xi^3 < \frac{e}{2}\}.$$

Par la suite la coque étudiée sera supposée mince et d'épaisseur constante en vue de simplifier les calculs. Mais il n'y aurait aucune difficulté essentielle à généraliser ce qui suit au cas des coques d'épaisseur variable. De même que nous avions défini au Paragraphe 1.1 un repère local en tout point de S nous utilisons maintenant le système des coordonnées curvilignes normales pour définir un repère local en tout point M de la coque $\mathcal{C}$. En dérivant la relation $\overrightarrow{OM} = \vec{\phi}(\xi^1,\xi^2) + \xi^3\vec{a}_3$ il vient avec (1.1-3) et (1.3-4)

$$(2.1\text{-}4)\qquad \begin{cases} \vec{g}_\alpha = \overrightarrow{OM}_{,\alpha} = (\delta^\nu_\alpha - \xi^3 b^\nu_\alpha)\vec{a}_\nu, \\ \vec{g}_3 = \overrightarrow{OM}_{,3} = \vec{a}_3. \end{cases}$$

Ainsi les vecteurs $\vec{g}_1$ et $\vec{g}_2$ sont parallèles au plan tangent à la coque en $\vec{\phi}(\xi^1,\xi^2)$. Pour montrer que les trois vecteurs $\vec{g}_i$ forment une base il suffit donc d'établir que $\vec{g}_1\times\vec{g}_2 \neq 0$ en tous les points de la coque. Les relations (1.2-4) et (1.2-12) entraînent

$$\vec{g}_1\times\vec{g}_2 = \left(1-2\xi^3H+(\xi^3)^2K\right)\sqrt{a}\ \vec{a}_3.$$

Comme les rayons de courbure principaux sont des extrema des rayons de courbure normaux on a

$$|H| < \frac{1}{\min|R_N|}\ ,\ |K| < \frac{1}{(\min|R_N|)^2}\ ,$$

où $\min|R_N|$ est calculé au point $\vec{\phi}(\xi^1,\xi^2)$ pour toutes les sections normales possibles. Ceci nous conduit à supposer $|R_N| \neq 0$ en tous les points de $\bar{\Omega}$ ou, comme $\bar{\Omega}$ est compact, qu'il existe nombre réel $\alpha > 0$ tel que $\min|R_N| \geq \alpha > 0$ pour tous les points de $\bar{S}$. Cette hypothèse, qui est du reste la seule hypothèse que nous ferons sur la géométrie de la surface moyenne, n'est en pratique nullement restrictive. Alors l'hypothèse de coque mince $\left(e(\xi^1,\xi^2) < \frac{1}{10}\min|R_N|\right)$ entraîne

$$|H| < \frac{1}{10e}\ ,\ |K| < \frac{1}{100e^2}\ .$$

Par suite

$$1 - 2\xi^3H + (\xi^3)^2K \geq 1 - \frac{2}{10} + \frac{1}{100} = \frac{81}{100} > 0,$$

d'où $\vec{g}_1\times\vec{g}_2 \neq 0$. La Figure 2.1-1 illustre ces considérations.

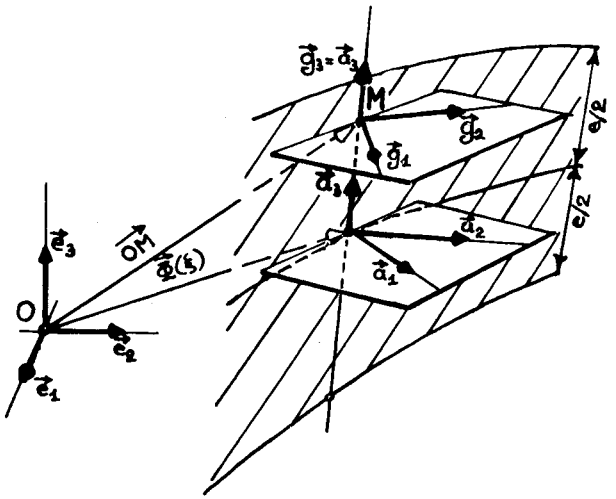

Figure 2.1-1

La géométrie de la coque $\mathcal{C}$ ainsi définie sert constamment par la suite de configuration de référence. En effet nous étudions dans ce travail les problèmes stationnaires de coque répondant à la description suivante (une formulation précise est donnée au Chapitre 3). Soit $\mathcal{C}$ la configuration de la coque avant déformation. Nous supposons que la coque est encastrée sur une partie de son bord et soumise à une certaine distribution de forces de volume et de forces de surface s'exerçant sur les faces supérieure et inférieure de la coque, ainsi que sur la partie du bord non encastrée. Sous l'action de ces forces la coque se déforme et prend une nouvelle configuration $\mathcal{C}^*$. Connaissant les constantes physiques caractérisant le matériau composant la coque, la configuration initiale $\mathcal{C}$, la distribution des forces appliquées et les conditions aux limites le problème consiste à déterminer les déplacements des points de $\mathcal{C}$. On peut alors en déduire les déformations et les contraintes en tout point de $\mathcal{C}^*$.

Selon l'usage nous notons par la suite à l'aide d'une même lettre les variables correspondantes avant et après déformation, une barre supérieure distinguant la variable de la configuration déformée.

2.2. EVALUATION DES DEFORMATIONS POUR UNE COQUE MINCE.

L'évaluation des déformations de la coque engendrées par le passage de la configuration initiale $\mathcal{C}$ à la configuration finale $\mathcal{C}^*$ suppose, entre autres, la connaissance des géométries de ces deux configurations. Dans le Chapitre 1 nous avons rappelé toutes les caractéristiques géométriques de la surface moyenne de la coque non déformée puis dans le Paragraphe 2.1 nous avons défini la géométrie de la coque $\mathcal{C}$. Il nous reste maintenant à effectuer une démarche analogue pour la configuration $\mathcal{C}^*$ de la coque déformée.

Géométrie de la surface moyenne déformée :

Soit P la position d'une particule quelconque de la surface moyenne de la coque avant déformation; après déformation cette même particule occupe la position $\bar{P}$. Le vecteur

$$\vec{u} = \vec{u}(\xi^1,\xi^2) = \overrightarrow{P\bar{P}}$$

est appelé vecteur déplacement du point P. On pose

$$\vec{u} = u_i\,\vec{a}^i = u^i\,\vec{a}_i. \tag{2.2-1}$$

Les trois fonctions $u_i : (\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} \to u_i(\xi^1,\xi^2) \in R$ sont les inconnues (principales) du problème.

Lorsque (ξ^1,ξ^2) décrit l'ensemble $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ le point $\bar{P}$ décrit la surface moyenne déformée. De la relation

$$\overrightarrow{O\bar{P}} = \overrightarrow{OP} + \vec{u} = \vec{\phi} + \vec{u}$$

on déduit grâce aux relations (1.1-3) et (1.3-14) l'expression des vecteurs

$$\vec{\bar{a}}_\alpha = \overrightarrow{O\bar{P}}_{,\alpha} = (\delta^\lambda_\alpha + u^\lambda|_\alpha - b^\lambda_\alpha u_3)\vec{a}_\lambda + (u^3|_\alpha + b^\lambda_\alpha u_\lambda)\vec{a}_3. \tag{2.2-2}$$

Nous verrons au Paragraphe 2.3 que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants. Il est alors possible de définir un vecteur $\vec{\bar{a}}_3$ normé et orthogonal aux deux premiers:

$$\vec{\bar{a}}_3 = \frac{\vec{\bar{a}}_1 \times \vec{\bar{a}}_2}{|\vec{\bar{a}}_1 \times \vec{\bar{a}}_2|}. \tag{2.2-3}$$

Les trois vecteurs $\vec{\bar{a}}_i$ forment donc une base locale de $\mathcal{E}^3$, analogue à la base $\vec{a}_i$ introduite au Chapitre 1. De la connaissance de cette base locale $\vec{\bar{a}}_i$ on déduit les caractéristiques géométriques de la surface moyenne déformée comme on l'a fait au Chapitre 1.

Géométrie de la coque déformée $\mathcal{C}^*$:

Pour définir $\mathcal{C}^*$ on pourrait, par analogie avec la définition de la surface moyenne déformée, introduire le champ des déplacements des particules de la coque $\mathcal{C}$ au cours de la déformation. C'est par exemple la démarche retenue dans la modélisation de l'élasticité tridimensionnelle. Les théories de coque proposées par LOVE, KIRCHHOFF, KOITER reposent sur une démarche fondamentalement différente: ces auteurs déduisent de la connaissance du champ du déplacement de la seule surface moyenne de la coque une approximation satisfaisante des diverses caractéristiques de la coque déformée : tout d'abord la géométrie (à partir du champ du déplacement), les déformations, les contraintes ... . L'intérêt du passage d'une théorie tridimensionnelle à une théorie bidimensionnelle est évident, ne serait-ce que du seul point de vue de la résolution numérique. Ces théories approchées reposent sur un certain nombre d'hypothèses. Nous rappelons ci-dessous les deux familles d'hypothèses les plus répandues, renvoyant à KOITER [1] pp. 15-16 pour une analyse approfondie.

Première famille d'hypothèses (LOVE-KIRCHHOFF) :

Les normales à la surface moyenne non déformée, considérées comme des ensembles de points de la coque

(i) restent normales à la surface moyenne déformée;

(ii) ne changent pas de longueur. ■

Plus précisément si nous désignons par M la position d'une particule quelconque de $\mathcal{C}$, par P la projection de M sur la surface moyenne de $\mathcal{C}$, par $\bar{M}$ et $\bar{P}$ les positions respectives de ces mêmes particules après déformation, alors les hypothèses de base ci-dessus équivalent à :

$$\overrightarrow{O\bar{M}} = \overrightarrow{O\bar{P}} + \xi^3\,\vec{\bar{a}}_3\ . \tag{2.2-4}$$

d'où par analogie avec le Paragraphe 2.1 :

$$\vec{\bar{g}}_\alpha = \overrightarrow{O\bar{M}}_{,\alpha} = (\delta^\nu_\alpha - \xi^3\bar{b}^\nu_\alpha)\vec{\bar{a}}_\nu. \tag{2.2-5}$$

On montre au Paragraphe 2.3 que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants ce qui permet de définir

$$\vec{\bar{g}}_3 = \frac{\vec{\bar{g}}_1 \times \vec{\bar{g}}_2}{|\vec{\bar{g}}_1 \times \vec{\bar{g}}_2|}. \tag{2.2-6}$$

Les trois vecteurs $\vec{\bar{g}}_1$, $\vec{\bar{g}}_2$, $\vec{\bar{g}}_3$ forment alors une base locale en chaque point de la coque déformée $\mathcal{C}^*$.

Deuxième famille d'hypothèses (hypothèse statique de contraintes planes).

(i) les normales à la surface moyenne non déformée, considérées comme des ensembles de points de la coque, restent normales à la surface moyenne déformée;

(ii) au cours de la déformation les contraintes sont approximativement planes et parallèles au plan tangent à la surface moyenne. ■

En raisonnant toujours sur les positions M et P (resp. $\bar{M}$ et $\bar{P}$) des deux particules de la configuration non déformée $\mathcal{C}$ (resp. déformée $\mathcal{C}^*$) de la coque la première des deux hypothèses ci-dessus entraîne (comparer à (2.2-4)) :

$$\overrightarrow{O\bar{M}} = \overrightarrow{O\bar{P}} + \bar{\xi}^3 \vec{a}_3, \tag{2.2-7}$$

où $\bar{\xi}^3$ est la cote de $\bar{M}$ mesurée sur $(\bar{P},\vec{a}_3)$. Ceci revient à dire que la coque déformée $\mathcal{C}^*$ est rapportée à un nouveau système de coordonnées curvilignes $(\xi^1,\xi^2,\bar{\xi}^3)$ différent du système initial (ξ^1,ξ^2,ξ^3) par la troisième coordonnée. Il semble que l'on puisse supposer, en première approximation au moins, que $\bar{\xi}^3$ ne dépend pas de ξ^1 et ξ^2; on montre alors (cf. KOITER [1] page 15; on pourra également consulter NAGHDI [1] §4) que l'hypothèse (ii) permet de déterminer $\bar{\xi}^3$. La relation (2.2-7) permet de définir en chaque point $\bar{M}$ de $\mathcal{C}^*$ un repère local

$$\begin{cases} \vec{\bar{g}}_\alpha = (\delta_\alpha^\lambda - \bar{b}_\alpha^\lambda \ \bar{\xi}^3)\vec{a}_\lambda, \\ \vec{\bar{g}}_3 = \dfrac{d\bar{\xi}^3}{d\xi^3}\vec{a}_3 , \end{cases} \tag{2.2-8}$$

car les vecteurs $\vec{\bar{g}}_1$ et $\vec{\bar{g}}_2$ sont linéairement indépendants (cf. Paragraphe 2.3).

Suivant KOITER [1] nous supposerons par la suite que les hypothèses de la seconde famille sont vérifiées.

Les géométries de la surface moyenne et de la coque avant et après déformation étant précisées, nous sommes en mesure d'évaluer le tenseur de déformation de la coque dans la configuration $\mathcal{C}^*$. Naturellement, dans la configuration $\mathcal{C}$, la coque est au repos et les tenseurs de déformation et de contrainte sont nuls.

Pour un milieu continu tridimensionnel le tenseur de déformation a pour expression

$$\overset{*}{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij}-g_{ij}) \tag{2.2-9}$$

où $\bar{g}_{ij}$ (resp. g_{ij}) est le tenseur métrique du milieu continu dans la configuration déformée (resp. non déformée), pour une même paramétrisation (ξ^1,ξ^2,ξ^3). L'exposant * qui apparaît en (2.2-9) distingue les tenseurs définis sur $\mathcal{E}^3$ des tenseurs de surface.

Les relations (2.1-4) (2.2-3) (2.2-8) et (1.2-12) entraînent en particulier

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha\cdot\vec{g}_\beta = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta}\xi^3 + c_{\alpha\beta}(\xi^3)^2,$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \vec{\bar{g}}_\alpha\cdot\vec{\bar{g}}_\beta = \bar{a}_{\alpha\beta} - 2\bar{b}_{\alpha\beta}\bar{\xi}^3 + \bar{c}_{\alpha\beta}(\bar{\xi}^3)^2,$$

$$g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = \bar{g}_{\alpha 3} = \bar{g}_{3\alpha} = 0.$$

L'hypothèse (implicite dans toute cette théorie) de "petites" déformations, jointe à celle de coque mince permet d'une part, de négliger les termes en $(\xi^3)^2$ et $(\bar{\xi}^3)^2$, d'autre part de remplacer $\bar{\xi}^3$ par ξ^3 dans $\bar{g}_{\alpha\beta}$; alors à partir de (2.2-9)

$$\begin{cases} \overset{*}{\gamma}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}) - (\bar{b}_{\alpha\beta}-b_{\alpha\beta})\xi^3, \\ \overset{*}{\gamma}_{\alpha 3} = \overset{*}{\gamma}_{3\alpha} = 0. \end{cases} \tag{2.2-10}$$

Enfin pour un matériau élastique homogène isotrope vérifiant la loi de Hooke il est facile de vérifier que l'hypothèse de contraintes planes entraîne

$$\overset{*}{\gamma}_{33} = \frac{-\nu}{1-\nu}\,\overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\alpha} \text{ avec } \overset{*}{\gamma}{}^{\alpha}_{\alpha} = g^{\alpha\lambda}\,\overset{*}{\gamma}_{\alpha\lambda} , \tag{2.2-11}$$

ν désignant le coefficient de Poisson du matériau. En d'autres termes, ces relations montrent que l'évaluation du tenseur des déformations de la coque $\mathcal{C}^*$ se ramène à l'évaluation des deux tenseurs de surface suivants :

(i) Le tenseur de déformation de la surface moyenne

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\bar{a}_{\alpha\beta}-a_{\alpha\beta}). \tag{2.2-12}$$

(ii) Le tenseur de changement de courbure

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} . \tag{2.2-13}$$

L'origine des appellations de ces deux tenseurs est évidente pour le premier. Pour le second elle provient de ce que la seconde forme fondamentale de la surface permet d'évaluer les courbures normales. Signalons que si la définition du tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$ est commune à la plupart des théories de coque, il n'en va pas de même de la seconde. Ainsi KOITER [1] signale d'autres choix possibles pour le tenseur de changement de courbure ayant peu d'incidence sur la valeur de l'intégrale d'énergie. Mentionnons enfin que la notation $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ est celle de KOITER [1].

Nous terminons ce paragraphe en déterminant les relations entre les tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ et les composantes u_i du déplacement définies en (2.2-1). Comme nous nous limitons ici au modèle linéaire toutes ces relations seront linéarisées. Nous renvoyons à KOITER [1] pour l'étude du modèle non linéaire.

Les relations (2.2-2) et (2.2-12) donnent tout d'abord l'expression suivante pour le tenseur linéarisé de déformation de la surface moyenne :

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\beta|\alpha}+u_{\alpha|\beta}) - b_{\alpha\beta}\,u_3. \tag{2.2-14}$$

Pour calculer $\bar{\rho}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$ nous partons de la relation (1.2-9), i.e.,

$$\bar{b}_{\alpha\beta} = \vec{\bar{a}}_3 \cdot \vec{\bar{a}}_{\beta,\alpha}.$$

En linéarisant l'expression (2.2-3) dans laquelle les vecteurs $\vec{\bar{a}}_1$ et $\vec{\bar{a}}_2$ sont calculés grâce à (2.2-2), on obtient

(2.2-15) $$\vec{\bar{a}}_3 = -(u_{3|\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda})\vec{a}^{\alpha} + \vec{a}_3.$$

Grâce aux formules de Gauss (1.3-3) et de Weingarten (1.3-4) on calcule, à partir de (2.2-2), l'expression de $\vec{\bar{a}}_{\beta,\alpha}$. Il reste alors à faire le produit scalaire donnant $\bar{b}_{\alpha\beta}$ et à "linéariser" le résultat. Ceci conduit pour le tenseur $\bar{\rho}_{\alpha\beta} = \bar{b}_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}$ à l'expression suivante :

(2.2-16) $$\bar{\rho}_{\alpha\beta} = u_{3|\alpha\beta} + b^{\lambda}_{\beta|\alpha} u_{\lambda} + b^{\lambda}_{\beta} u_{\lambda|\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} u_{\lambda|\beta} - c_{\alpha\beta} u_3.$$

La symétrie du tenseur $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ est une conséquence des relations de Mainardi-Codazzi (1.3-12) et des relations (1.3-16).

Avant de passer à l'évaluation des contraintes pour une coque mince il est intéressant de donner une interprétation géométrique de la déformation de la surface moyenne. Celle-ci s'avérera utile dans la démonstration du Théorème du mouvement rigide.

2.3. INTERPRETATION GEOMETRIQUE DE LA DEFORMATION DE LA SURFACE MOYENNE.

Cette interprétation précise les transformations géométriques qui permettent de passer du repère local $(P,\vec{a}_i)$ de la surface moyenne non déformée au repère local $(\bar{P},\vec{\bar{a}}_i)$ de la surface moyenne déformée. Il est facile de vérifier que les relations (2.2-2) et (2.2-15) peuvent s'écrire :

(2.3-1) $$\vec{\bar{a}}_{\alpha} = \vec{a}_{\alpha} + \gamma^{\beta}_{\alpha} \vec{a}_{\beta} + \vec{\varphi} \times \vec{a}_{\alpha},$$

(2.3-2) $$\vec{\bar{a}}_3 = \vec{a}_3 + \vec{\varphi} \times \vec{a}_3 ,$$

avec

(2.3-3) $$\gamma^{\beta}_{\alpha} = a^{\beta\lambda} \gamma_{\lambda\alpha}, \quad \gamma_{\lambda\alpha} \text{ donné par (2.2-14)}.$$

(2.3-4) $$\vec{\varphi} = \varepsilon^{\lambda\beta} \phi_{\beta} \vec{a}_{\lambda} + \Omega\vec{a}_3 , \quad \varepsilon^{\lambda\beta} \text{ est donné par (1.2-5)},$$

(2.3-5) $$\phi_{\beta} = u_{3|\beta} + b^{\alpha}_{\beta} u_{\alpha},$$

(2.3-6) $$\Omega = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} u_{\beta|\alpha} ,$$

(2.3-7) $$\omega_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) = \varepsilon_{\alpha\beta}\Omega .$$

Dans les formules (2.3-4) et (2.3-5) nous avons utilisé les notations consacrées ϕ_{β} qui n'ont rien de commun avec la carte $\vec{\phi}$.

Ainsi le passage de la base locale $(\vec{a}_{\alpha},\vec{a}_3)$ avant déformation à la base locale $(\vec{\bar{a}}_{\alpha},\vec{\bar{a}}_3)$ après déformation s'effectue (toujours dans l'hypothèse de "petites" déformations) en trois étapes :

(i) Une translation $\overrightarrow{P\bar{P}}$ qui n'apparaît pas dans les relations (2.3-1) (2.3-2).

(ii) Une déformation pure qui se traduit par l'addition du vecteur $\gamma^{\beta}_{\alpha}\vec{a}_{\beta}$ au vecteur $\vec{a}_{\alpha}$, ce qui justifie l'appellation de tenseur de déformation linéarisé de la surface moyenne pour $\gamma_{\alpha\beta}$.

(iii) Une rotation d'angle $\vec{\varphi}$. Plus précisément $\vec{\varphi}$ admet les composantes suivantes: D'une part la composante $\vec{\Omega}_n = \varepsilon^{\alpha\beta} \phi_{\beta} \vec{a}_{\alpha}$ dans le plan tangent à la surface non déformée, ce qui justifie l'appellation de rotation de la normale à la surface moyenne donnée au vecteur de composantes ϕ_{α}; D'autre part la composante $\Omega\vec{a}_3$ sur la normale à la surface moyenne non déformée. Ceci justifie les appellations de tenseur de rotation de la surface moyenne pour le tenseur $\omega_{\alpha\beta}$ et de rotation autour de la normale pour le scalaire Ω.

Cette interprétation géométrique est illustrée par la Figure 2.3-1.

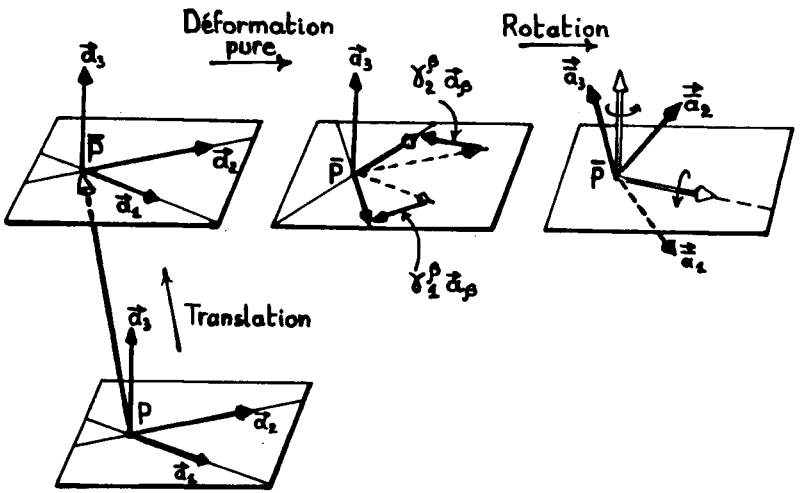

Figure 2.3-1.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'assertion du Paragraphe 2.2 selon laquelle les vecteurs $\vec{\bar{a}}_1$, $\vec{\bar{a}}_2$ d'une part, les vecteurs $\vec{\bar{g}}_1$, $\vec{\bar{g}}_2$ d'autre part sont linéairement indépendants

Les vecteurs $\vec{\bar{a}}_1$, $\vec{\bar{a}}_2$ sont linéairement indépendants :

Grâce aux relations (2.3-1) (2.3-4) le produit vectoriel $\vec{\bar{a}}_1 \times \vec{\bar{a}}_2$ s'exprime sous la forme suivante, en se limitant aux termes linéaires :

$$\vec{\bar{a}}_1 \times \vec{\bar{a}}_2 = \sqrt{a}\ \{-\phi_\alpha\ \vec{a}^\alpha + (1+\gamma^\alpha_\alpha)\vec{a}^3\}\ .$$

L'hypothèse de petites déformations entraîne que la composante de ce produit vectoriel $\vec{\bar{a}}_1 \times \vec{\bar{a}}_2$ sur le vecteur $\vec{a}_3$ est différente de zéro en tout point. Par conséquent, les vecteurs $\vec{\bar{a}}_1$ et $\vec{\bar{a}}_2$ sont linéairement indépendants.

Les vecteurs $\vec{\bar{g}}_1$, $\vec{\bar{g}}_2$ sont linéairement indépendants :

Partant de l'expression (2.2-8), i.e,

$$\vec{\bar{g}}_\alpha = (\delta^\lambda_\alpha - \bar{b}^\lambda_\alpha \bar{\xi}^3)\vec{\bar{a}}_\lambda .$$

un calcul analogue à celui du Paragraphe 2.1 conduit à

$$\vec{\bar{g}}_1 \times \vec{\bar{g}}_2 = [1 - 2\bar{H}\bar{\xi}^3 + \bar{K}(\bar{\xi}^3)^2]\sqrt{\bar{a}}\ \vec{\bar{a}}_3 . \tag{2.3-8}$$

Dans cette expression les paramètres $\bar{H}$ et $\bar{K}$ désignent respectivement les courbures moyenne et totale de la surface moyenne déformée. Plus précisément, par analogie avec les relations (1.2-12) on a

$$\bar{H} = \frac{1}{2}\bar{b}^\alpha_\alpha , \qquad \bar{K} = \bar{b}^1_1\bar{b}^2_2 - \bar{b}^2_1\bar{b}^1_2 .$$

Mais alors la définition (2.2-13) du tenseur de changement de courbure $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ entraîne, en particulier,

$$\bar{b}^\alpha_\beta = \bar{\rho}^\alpha_\beta + b^\alpha_\beta ,$$

soit

$$\begin{cases} \bar{H} = H + \frac{1}{2}\bar{\rho}^\alpha_\alpha , \\ \bar{K} = K + b^1_1\bar{\rho}^2_2 + b^2_2\bar{\rho}^1_1 - b^1_2\bar{\rho}^2_1 + \bar{\rho}^1_1\bar{\rho}^2_2 - \bar{\rho}^2_1\bar{\rho}^1_2 . \end{cases}$$

On reporte alors ces expressions dans (2.3-8). Pour montrer que l'expression entre crochets est différente de 0 il suffit de procéder par analogie avec le raisonnement du Paragraphe 2.1 en observant d'une part que sur le compact $\bar{S} = S \cup \partial S$ les applications continues $(\xi^1,\xi^2) \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \to b^\alpha_\beta$ sont uniformément bornées, d'autre part que l'hypothèse de "petites" déformations entraîne $\bar{\rho}^\alpha_\beta$ "petit".

2.4. EVALUATION DES CONTRAINTES POUR UNE COQUE MINCE.

On montre (cf. KOITER [1] par exemple) qu'une évaluation satisfaisante des contraintes dans la coque déformée C^* peut être faite, tout comme pour les déformations, à partir de deux tenseurs de surface. Plus précisément, avec les notations de KOITER [1], on introduit :

(i) Le tenseur symétrique des résultantes tangentielles de contraintes $\bar{n}^{\alpha\beta}$.

(ii) Le tenseur symétrique de couples de contraintes $\bar{m}^{\alpha\beta}$

En supposant que le matériau constituant la coque est élastique, homogène et isotrope, que les déformations sont "petites", que l'état de contrainte est approximativement plan et parallèle au plan tangent à la surface moyenne de la coque, on obtient les relations suivantes :

$$\bar{n}^{\alpha\beta} = e\ E^{\alpha\beta\lambda\mu}\ \gamma_{\lambda\mu} , \tag{2.4-1}$$

$$\bar{m}^{\alpha\beta} = \frac{e^3}{12} E^{\alpha\beta\lambda\mu}\ \bar{\rho}_{\lambda\mu} , \tag{2.4-2}$$

où e désigne l'épaisseur de la coque et $E^{\alpha\beta\lambda\mu}$ le tenseur de "module élastique" pour des contraintes planes :

$$E^{\alpha\beta\lambda\mu} = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[a^{\alpha\lambda}a^{\beta\mu} + a^{\alpha\mu}a^{\beta\lambda} + \frac{2\nu}{1-\nu}a^{\alpha\beta}a^{\lambda\mu}\right] , \tag{2.4-3}$$

où E, ν désignent respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau. Grâce aux relations (2.2-14) et (2.2-16) il est donc possible d'évaluer les contraintes en fonction des composantes du déplacement.

2.5. L'ENERGIE DE DEFORMATION :

L'énergie de déformation a pour expression

$$a(\vec{v},\vec{v}) = \int_S (\bar{n}^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} + \bar{m}^{\alpha\beta}\bar{\rho}_{\alpha\beta})\,dS .$$

L'intégration porte sur la surface moyenne non déformée puisque toutes les fonctions qui apparaissent ont été définies sur S. Grâce à (2.4-1) à (2.4-3) on obtient aussi

$$\begin{cases} a(\vec{v},\vec{v}) = \int_S \frac{Ee}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma^\alpha_\beta(\vec{v})\gamma^\beta_\alpha(\vec{v}) + \nu\gamma^\alpha_\alpha(\vec{v})\gamma^\beta_\beta(\vec{v}) + \\ \qquad \frac{e^2}{12}[(1-\nu)\bar{\rho}^\alpha_\beta(\vec{v})\bar{\rho}^\beta_\alpha(\vec{v}) + \nu\bar{\rho}^\alpha_\alpha(\vec{v})\bar{\rho}^\beta_\beta(\vec{v})]\}dS \end{cases} \tag{2.5-1}$$

soit encore comme $dS = \sqrt{a}\ d\xi^1\ d\xi^2$ (1.2-8)

$$\begin{cases} a(\vec{v},\vec{v}) = \int_\Omega \frac{Ee}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma^\alpha_\beta(\vec{v})\gamma^\beta_\alpha(\vec{v}) + \nu\gamma^\alpha_\alpha(\vec{v})\gamma^\beta_\beta(\vec{v}) + \\ \qquad + \frac{e^2}{12}[(1-\nu)\bar{\rho}^\alpha_\beta(\vec{v})\bar{\rho}^\beta_\alpha(\vec{v}) + \nu\bar{\rho}^\alpha_\alpha(\vec{v})\bar{\rho}^\beta_\beta(\vec{v})]\}\ \sqrt{a}\ d\xi^1\ d\xi^2 . \end{cases} \tag{2.5-2}$$

2.6. LE TRAVAIL DES FORCES EXTERIEURES :

Nous désignons par

$$\vec{p} = p^i\ \vec{a}_i \tag{2.6-1}$$

la résultante sur la surface moyenne des forces de surface et des forces de volume appliquées à la coque. On suppose pour simplifier qu'il n'y a pas de couples de surface.

Les résultante et couple de forces s'exerçant sur la partie $\partial S_1 = \vec{\phi}(\Gamma_1)$ du bord de la surface moyenne sont notés

$$(2.6\text{-}2) \qquad \begin{cases} \vec{N} = N^i \vec{a}_i, \\ \vec{M} = \varepsilon_{\alpha\beta} M^\beta \vec{a}^\alpha \end{cases}$$

On suppose que le couple $\vec{M}$ est dans le plan tangent à la surface moyenne.

Alors le travail de ces forces extérieures dans un déplacement $\vec{v} = v_i \vec{a}^i$ vaut

$$f(\vec{v}) = \int_S \vec{p}.\vec{v}\, dS + \int_{\partial S_1} (\vec{N}.\vec{v} + \vec{M}.\vec{\varphi}) ds,$$

où $\vec{\varphi}$ désigne le vecteur de rotation défini en (2.3-4). En outre la coque est supposée encastrée sur la partie complémentaire $\partial S_0 = \partial S - \partial S_1$ de la frontière de sa surface moyenne. Soit Γ_0 et Γ_1 les parties de Γ dont les images par $\vec{\phi}$ sont ∂S_0 et ∂S_1, respectivement. Alors, si $t \to \xi^\alpha = f^\alpha(t)$ sont les équations paramétriques de Γ_1, les éléments différentiels dS et ds sont donnés par les relations (1.2-8) et (1.2-2), respectivement. Ces relations, jointes à l'expression de $\vec{\varphi}$ (2.3-4), i.e.,

$$\vec{\varphi} = \varepsilon^{\lambda\beta} \phi_\beta \vec{a}_\lambda + \Omega \vec{a}_3,$$

entraînent avec (2.6-1) (2.6-2) :

$$(2.6\text{-}3) \qquad f(\vec{v}) = \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1\, d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} \left(N^i v_i + M^\beta \phi_\beta(\vec{v})\right) \sqrt{a_{\alpha\lambda}(f^\alpha)'(f^\lambda)'}\, dt.$$

CHAPITRE 3 : COORDONNEES CURVILIGNES ET NORMES EQUIVALENTES.

ORIENTATION : Les formules (2.2-14) et (2.2-16) donnent les expressions des tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ en fonction des composantes du déplacement et des caractéristiques géométriques de la surface S. Par suite l'énergie potentielle $a(\vec{v},\vec{v})$, définie en (2.5-2) s'exprime à l'aide

(i) des composantes covariantes du déplacement $\vec{u}$ sur les bases locales $\vec{a}^i$;

(ii) d'intégrations sur la surface moyenne S;

(iii) de dérivées covariantes.

Dans ce Chapitre nous allons définir de nouvelles normes, équivalentes aux normes classiques, et utilisant les trois caractéristiques ci-dessus. Ces équivalences reposent sur un certain nombre d'inégalités d'origine géométrique que nous précisons dans un premier paragraphe.

3.1. QUELQUES INEGALITES D'ORIGINE GEOMETRIQUE :

Nous supposons désormais que la carte $\vec{\phi}$ définie en (2.1-1) appartient à $C^3(\bar{\Omega})$ et que tous les points de la surface $\bar{S} = \vec{\phi}(\bar{\Omega})$ sont réguliers $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \neq \vec{0})$. Alors les applications $a_{\alpha\beta}, a^{\alpha\beta}, a, b_{\alpha\beta}, b^\alpha_\beta, b^{\alpha\beta}$ et leurs dérivées premières, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, c_{\alpha\beta}$ sont continues sur l'ensemble compact $\bar{\Omega} \subset R^2$. Par suite il existe deux nombres réels $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$ tels que

$$(3.1\text{-}1) \qquad \left\{ \begin{matrix} |a_{\alpha\beta}|,\ |a^{\alpha\beta}|,\ |a|,\ |b_{\alpha\beta}|,\ |b^\alpha_\beta|,\ |b^{\alpha\beta}|,\ |a_{\alpha\beta,\lambda}|,\ |a^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}|,\ |a_{,\lambda}| \\ |b_{\alpha\beta,\lambda}|,\ |b^\alpha_{\beta,\lambda}|,\ |b^{\alpha\beta}{}_{,\lambda}|,\ |\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|,\ |c_{\alpha\beta}| \end{matrix} \right\} < \rho_1$$

$$(3.1\text{-}2) \qquad \rho_2 < a_{11},\ a^{11},\ a_{22},\ a^{22},\ a.$$

Dans toute la suite, nous considérons l'espace de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega),\ |\alpha| < m\}.$$

Muni du produit scalaire

$$((u,v))_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u\, \partial^\alpha v\, d\xi^1 d\xi^2,$$

l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert. La norme associée au produit scalaire est notée $\|\cdot\|_{m,\Omega}$.

Pour un tenseur de surface (T), les inégalités (3.1-1) et (3.1-2) vont nous permettre de définir des normes équivalentes aux normes classiques de $L^2(\Omega)$ et de $H^1(\Omega)$. Des résultats de ce type figurent dans ROUGEE [1].

3.2. NORMES EQUIVALENTES DANS $L^2(\Omega)$:

Définition 3.2-1 : Soit une surface S définie comme en (2.1-1). Nous dirons qu'un tenseur de surface (T) d'ordre quelconque est dans $L^2(\Omega)$ si toutes ses composantes de variance quelconque sont dans $L^2(\Omega)$. ■

Comme le passage entre composantes de natures différentes d'un même tenseur de surface (T) s'effectue au moyen des tenseurs $a_{\alpha\beta}$ et $a^{\alpha\beta}$ les relations (3.1-1)(3.1-2) entraînent immédiatement :

Lemme 3.2-1 : Pour qu'un tenseur de surface (T) soit dans $L^2(\Omega)$ il faut et il suffit que toutes ses composantes d'une nature déterminée (par exemple covariantes) soient dans $L^2(\Omega)$. ■

Définition 3.2-2 : Soit un tenseur de surface (T) d'ordre quelconque n, appartenant à $L^2(\Omega)$. Nous convenons de définir la norme de (T) dans $L^2(\Omega)$ par

(3.2-1) $$|(T)| = \left\{ \sum_{\substack{\alpha_i=1,2 \\ 1\leq i\leq n}} \left| T_{\alpha_1\cdots\alpha_n} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$ ■

En fait pour définir $|(T)|$ on peut utiliser toutes les composantes d'une autre nature. Les inégalités (3.1-1) et (3.1-2) vérifiées par les $a_{\alpha\beta}$ et les $a^{\alpha\beta}$ entraînent immédiatement :

Lemme 3.2-2 : Si dans la définition 3.2-2 on remplace toutes les composantes covariantes de (T) par toutes les composantes d'une autre nature (mixtes ou contravariantes) on obtient de nouvelles normes équivalentes à celle donnée en (3.2-1). ■

Les normes précédentes sont définies par l'intermédiaire d'une intégration sur l'ouvert Ω. En pratique nous aurons à considérer des intégrations sur la surface S; l'équivalence entre les deux intégrations est précisée par le Lemme suivant :

Lemme 3.2-3 : Soit $f \in L^2(\Omega)$; alors la fonctionnelle

$$f \to \left\{ \int_S |f(\xi^1,\xi^2)|^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $L^2(\Omega)$ équivalente à la norme $|f|_{L^2(\Omega)}$.

Démonstration : Ce résultat est une conséquence immédiate de la relation (1.2-8), i.e, $dS = \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2$ et des inégalités (3.1-1) (3.1-2). ■

Au Paragraphe 6.1 nous utiliserons le Lemme suivant :

Lemme 3.2-4 (ROUGEE [1], Chapitre 2) :

Soit un tenseur (T) d'ordre 2 défini sur la surface S. On suppose que $(T) \in L^2(\Omega)$. Alors la fonctionnelle

$$(T) \to \left\{ \int_S T^{\alpha\beta}\, T_{\alpha\beta}\, dS \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int_S T^{\alpha}_{\beta}\, T^{\beta}_{\alpha}\, dS \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à la norme usuelle $|(T)|_{L^2(\Omega)}$ définie en (3.2-1). ■

3.3. NORMES EQUIVALENTES DANS $H^1(\Omega)$:

Définition 3.3-1 : Soit une surface S définie comme en (2.1-1). Nous dirons qu'un tenseur de surface (T) d'ordre quelconque n est dans $H^1(\Omega)$ s'il est dans $L^2(\Omega)$ et si toutes les dérivées premières usuelles, prises au sens des distributions, de toutes ses composantes de variance quelconque sont dans $L^2(\Omega)$. ■

Pour un tenseur de surface (T) les inégalités (3.1-1) et (3.1-2) permettent d'établir une condition nécessaire et suffisante d'appartenance à $H^1(\Omega)$.

Lemme 3.3-1 : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tenseur de surface (T) appartienne à $H^1(\Omega)$ est que toutes ses composantes d'une nature déterminée (covariantes par exemple) et leurs dérivées premières usuelles soient dans $L^2(\Omega)$.

Démonstration :

Soit un tenseur de surface (T), d'ordre n, dans $H^1(\Omega)$ au sens de la Définition 3.3-1. Alors

(3.3-1) $$T_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \in L^2(\Omega) \text{ et } T_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\lambda} \in L^2(\Omega).$$

Soit à montrer que toutes les composantes de (T) de variance quelconque sont dans $H^1(\Omega)$. Nous faisons la démonstration pour les composantes $T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n}$, le même type de raisonnement s'appliquant à toutes les composantes d'une autre nature. Tout d'abord

$$T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n} = a^{\nu\alpha_2}\, T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

d'où

$$T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n,\lambda} = a^{\nu\alpha_2}{}_{,\lambda}\, T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} + a^{\nu\alpha_2}\, T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\lambda}.$$

Alors les hypothèses (3.3-1) et les inégalités (3.1-1) entraînent immédiatement que $T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n} \in H^1(\Omega)$. ■

Définition 3.3-2 : Soit un tenseur de surface (T) d'ordre n quelconque, appartenant à $H^1(\Omega)$. Nous convenons de définir la norme de (T) dans $H^1(\Omega)$ par

(3.3-2) $$\|(T)\|_{1,\Omega} = \left\{ |(T)|^2 + \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\substack{\alpha_i=1,2 \\ 1\leq i\leq n}} |T_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\lambda}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$ ■

Dans la définition 3.3-2 il convient de s'assurer que le remplacement des composantes covariantes de (T) par des composantes d'une autre nature conduit à la définition de normes équivalentes à celle définie en (3.3-2). C'est l'objet du Lemme suivant :

Lemme 3.3-2 : Si dans la Définition 3.3-2 on remplace toutes les composantes covariantes de (T) par toutes les composantes d'une autre nature on obtient une nouvelle norme, équivalente à celle donnée en (3.3-1).

Démonstration :

Considérons un tenseur de surface (T), d'ordre n, appartenant à $H^1(\Omega)$. Soit à vérifier que la fonctionnelle

$$(3.3\text{-}3) \qquad \|(T)\|^{\star}_{1,\Omega} = \left\{ |(T)|^2 + \sum_{\lambda=1}^{2} \sum_{\substack{\alpha_i=1,2 \\ 1\leq i\leq n}} \left| T^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n,\lambda} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

est une norme de (T) dans $H^1(\Omega)$, équivalente à la norme définie par la relation (3.3-2). Comme dans la démonstration du Lemme 3.3-1 on aura

$$T^{\alpha_2}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n,\lambda} = a^{\alpha_2\nu}{}_{,\lambda}\, T_{\alpha_1\nu\alpha_3\ldots\alpha_n} + a^{\alpha_2\nu}\, T_{\alpha_1\nu\alpha_3\ldots\alpha_n,\lambda} .$$

Les inégalités (3.1-1) et le Lemme 3.2-2 entraînent alors l'existence d'une constante c_1 telle que $\|(T)\|^{\star}_{1,\Omega} \leq c_1 \|(T)\|_{1,\Omega}$. Inversement, la relation

$$T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n,\lambda} = a_{\alpha_2\nu,\lambda}\, T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n} + a_{\alpha_2\nu}\, T^{\nu}_{\alpha_1\cdot\alpha_3\ldots\alpha_n,\lambda} ,$$

les inégalités (3.1-1) et le Lemme 3.2-2 entraînent $\|(T)\|_{1,\Omega} \leq c_2 \|(T)\|^{\star}_{1,\Omega}$, où c_2 désigne une constante.

Le même type de raisonnement s'applique dans le cas où on utilise toutes les composantes d'une autre nature. ■

Tout ce qui précède est relatif au cas de dérivées usuelles (prises au sens des distributions). Les lemmes suivants précisent certains cas où il est possible de remplacer les dérivées usuelles par des dérivées covariantes (considérées également comme définies au sens des distributions, par l'intermédiaire des relations (1.3-5).

Lemme 3.3-3 : Dans la Définition 3.3-1 et dans le Lemme 3.3-1 il est loisible de remplacer les dérivées usuelles par des dérivées covariantes.

Démonstration :

Soit (T) un tenseur de surface, d'ordre n. D'après le Lemme 3.3-1 on a l'équivalence :

$$(T) \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow \{T_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \in L^2(\Omega),\ T_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\lambda} \in L^2(\Omega)\}.$$

L'extension des relations (1.3-6) à des composantes de tenseurs de surface d'ordre n donne par exemple

$$(3.3\text{-}4) \qquad \begin{cases} T_{\alpha_1\ldots\alpha\,|\lambda} = T_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\alpha_1\lambda}\, T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n} - \Gamma^{\nu}_{\alpha_2\lambda}\, T_{\alpha_1\nu\ldots\alpha_n} \\ \qquad\qquad - \ldots - \Gamma^{\nu}_{\alpha_n\lambda}\, T_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\nu}. \end{cases}$$

De cette relation et des inégalités (3.1-1), on déduit immédiatement

$$(3.3\text{-}5) \qquad (T) \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow \{T_{\alpha_1\ldots\alpha_n} \in L^2(\Omega),\ T_{\alpha_1\ldots\alpha_n|\lambda} \in L^2(\Omega)\}.$$

Par ailleurs, on montre que la dérivation covariante d'un produit s'effectue selon les mêmes règles que la dérivation usuelle. Ainsi l'expression

$$T^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n} = a^{\alpha_1\nu}\, T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

admet pour dérivées covariantes

$$T^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n|\lambda} = a^{\alpha_1\nu}{}_{|\lambda}\, T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n} + a^{\alpha_1\nu} T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n|\lambda}$$

ou encore, comme $a^{\alpha_1\nu}{}_{|\lambda} = 0$ (1.3-8) :

$$(3.3\text{-}6) \qquad T^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n|\lambda} = a^{\alpha_1\nu}\, T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n|\lambda} .$$

Par analogie, on obtient toutes les dérivées covariantes de toutes les composantes de nature quelconque de (T) à l'aide des dérivées covariantes des seules composantes covariantes de (T) et des tenseurs $a^{\alpha\beta}$. Grâce aux inégalités (3.1-1), on pourra remplacer dans l'équivalence (3.3-5) toutes les composantes covariantes de (T) par toutes les composantes de (T) d'une autre nature. Ainsi on a par exemple

$$(T) \in H^1(\Omega) \Longleftrightarrow T^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n} \in L^2(\Omega) \text{ et } T^{\alpha_1}_{\cdot\alpha_2\ldots\alpha_n|\lambda} \in L^2(\Omega).$$ ■

Lemme 3.3-4 : Si dans la relation (3.3-2) on remplace la dérivée usuelle par une dérivée covariante on obtient une nouvelle norme équivalente à la précédente. Plus généralement, si dans la relation (3.3-2) on remplace toutes les composantes covariantes de (T) par toutes les composantes d'une autre nature et toutes les dérivées usuelles par des dérivées covariantes on obtient de nouvelles normes qui sont équivalentes à la norme $\|(T)\|_{1,\Omega}$ donnée en (3.3-2).

Démonstration :

Il suffit d'établir la première partie du lemme. La seconde partie s'obtient alors immédiatement grâce aux inégalités (3.1-1) et à des relations du type (3.3-6).

Posons :

$$\| (T) \|^{\star}_{1,\Omega} = \left(|(T)|^2 + \sum_{\lambda=1} \sum_{\substack{\alpha_i=1,2 \\ 1\leq i\leq n}} |T_{\alpha_1\ldots\alpha_n|\lambda}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Les relations (3.3-4) et les inégalités (3.1-1) entraînent l'existence d'une constante c_1 telle que $\| (T) \|^{\star}_{1,\Omega} \leq c_1 \| (T) \|_{1,\Omega}$. Inversement, si l'on écrit la relation (3.3-4) sous la forme

$$T_{\alpha_1\ldots\alpha_n,\lambda} = T_{\alpha_1\ldots\alpha_n|\lambda} + \Gamma^{\nu}_{\alpha_1\lambda} T_{\nu\alpha_2\ldots\alpha_n} + \ldots + \Gamma^{\nu}_{\alpha_n\lambda} T_{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}\nu},$$

on en déduit, avec les inégalités (3.1-1), l'existence d'une constante c_2 telle que $\| (T) \|_{1,\Omega} \leq c_2 \| (T) \|^{\star}_{1,\Omega}$. ■

En particulier nous serons amenés à utiliser l'extension suivante de l'inégalité de KORN (cf. DUVAUT-LIONS [1] Chapitre 3, HLAVAČEK-NEČAS [1]), qui ne rentre pas dans le champ d'applications du Lemme 3.3-4 :

Lemme 3.3-5 (ROUGEE [1] , Lemme 2.4) :

Soit $\vec{v}=v_\alpha \vec{a}^\alpha$ un champ de vecteurs de la surface S appartenant à $(H^1(\Omega))^3$, au sens de la Définition 3.3-1. Alors l'application

$$(3.3\text{-}7) \qquad \vec{v} \longrightarrow \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} \int_S (v_\alpha)^2 dS + \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \int_S \left[\frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta}+v_{\beta|\alpha}) \right]^2 dS \right\}^{\frac{1}{2}}$$

est une norme équivalente à $\| (\vec{v}) \|_{1,\Omega}$ définie en (3.3-2). ■

Pour une application $\vec{\phi}$ suffisamment régulière on définirait par analogie l'appartenance d'un tenseur (T) à $H^m(\Omega)$ et les normes $\| (T) \|_{m,\Omega}$.

Nous terminons ce Chapitre par un résultat d'équivalence de norme sur $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ applicable au champ $\vec{u}$ du déplacement.

3.4. NORMES EQUIVALENTES SUR $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$:

Le champ $\vec{u}$ du déplacement s'écrit $\vec{u} = u_\alpha \vec{a}^\alpha + u_3 \vec{a}^3$. Tout ce qui a été dit dans les paragraphes précédents s'applique aux composantes tangentielles u_α considérées comme composantes covariantes du tenseur de surface $u_\alpha \vec{a}^\alpha$. Pour la composante u_3 rappelons les relations (1.3-15) et (1.3-16) :

$$(3.4\text{-}1) \qquad \begin{cases} u_{3|\alpha} = u_{3,\alpha}, \\ u_{3|\alpha\beta} = u_{3,\alpha\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} u_{3,\lambda} = u_{3|\beta\alpha} . \end{cases}$$

Le lemme ci-dessous rassemble quelques propriétés relatives aux dérivées covariantes premières et secondes de u_3:

Lemme 3.4-1 :

Soit u_3 la composante sur la normale $\vec{a}_3$ du champ de vecteurs $\vec{u}$. On a les deux propriétés suivantes :

(i) $u_3 \in H^2(\Omega) \Longleftrightarrow u_{3|\alpha} \in H^1(\Omega)$ et $u_{3|\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$.

(ii) l'application

$$(3.4\text{-}2) \quad u_3 \in H^2(\Omega) \longrightarrow \left[|u_3|^2 + |u_{3|1}|^2 + |u_{3|2}|^2 + |u_{3|11}|^2 + |u_{3|12}|^2 + |u_{3|22}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H^2(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle.

Démonstration :

La première propriété est une conséquence immédiate des inégalités (3.1-1) et des relations (3.4-1).

Pour la seconde propriété on vérifie facilement que l'application (3.4-2) est une semi-norme sur $H^2(\Omega)$. Pour montrer que c'est une norme équivalente à la norme usuelle, posons

$$v = u_{3|1} = u_{3,1} \in H^1(\Omega), \quad w = u_{3|2} = u_{3,2} \in H^1(\Omega).$$

Les fonctions v,w peuvent être considérées, par exemple, comme les composantes covariantes d'un tenseur de surface (T) appartenant à $H^1(\Omega)$. A ce titre les normes

$$(v,w) \in (H^1(\Omega))^2 \longrightarrow \left[|v|^2 + |w|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} (|v_{,\alpha}|^2 + |w_{,\alpha}|^2) \right]^2$$

et

$$(v,w) \in (H^1(\Omega))^2 \longrightarrow \left[|v|^2 + |w|^2 + \sum_{\alpha=1}^{2} (|v_{|\alpha}|^2 + |w_{|\alpha}|^2) \right]^2$$

sont équivalentes, d'après le Lemme 3.3-4. Pour conclure, il suffit de remplacer dans les relations d'équivalence v et w par leurs valeurs et d'ajouter $|u_3|^2$ dans chacun des membres. ■

En rassemblant les résultats des Lemmes 3.3-5 et 3.4-1 nous obtenons immédiatement :

Lemme 3.4-2 : Soit $\vec{u} = u_\alpha \vec{a}^\alpha + u_3 \vec{a}^3$. Prenons $u_\alpha \in H^1(\Omega)$, $u_3 \in H^2(\Omega)$, i.e., $u \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$. Alors l'application

$$\psi : \vec{u} \in [H^1(\Omega)]^2 \times H^2(\Omega) \longrightarrow R,$$

définie par

$$(3.4\text{-}3) \quad \begin{cases} \psi(\vec{u}) = \{ |u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2 + |u_{1|1}|^2 + |u_{1|2} + u_{2|1}|^2 + |u_{2|2}|^2 + \\ \qquad + |u_{3|1}|^2 + |u_{3|2}|^2 + |u_{3|11}|^2 + |u_{3|12}|^2 + |u_{3|22}|^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

est une norme équivalente à la norme usuelle. ■

CHAPITRE 4 - LE PROBLEME VARIATIONNEL

ORIENTATION : Dans ce Chapitre nous définissons l'espace $\vec{V}$ des fonctions admissibles puis nous donnons la formulation variationnelle du problème.

4.1. L'ESPACE DES FONCTIONS ADMISSIBLES $\vec{V}$:

L'énergie potentielle élastique (2.5-2) et le travail des forces extérieures (2.6-3) sont des intégrales sur Ω et sur Γ_1 de fonctions dépendant de deux coordonnées curvilignes (ξ^1,ξ^2). C'est pourquoi dans tout ce qui suit le domaine de référence sera non pas la surface moyenne S mais l'ouvert Ω, la géométrie de la surface S apparaissant de manière implicite dans les coefficients variables.

L'examen des relations (2.2-14) et (2.2-16), i.e.,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\beta|\alpha}+u_{\alpha|\beta}) - b_{\alpha\beta}\, u_3,$$

$$\bar{\rho}_{\alpha\beta} = u_{3|\alpha\beta} + b^{\lambda}_{\beta|\alpha}\, u_\lambda + b^{\lambda}_{\beta}\, u_{\lambda|\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha}\, u_{\lambda|\beta} - c_{\alpha\beta}\, u_3,$$

fait apparaître que le tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$ dépend des fonctions u_i et $u_{\alpha,\beta}$ tandis que le tenseur $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ dépend des fonctions u_i, $u_{i,\alpha}$ et $u_{3,\alpha\beta}$. (u_1,u_2,u_3) désignant les trois composantes covariantes du déplacement $\vec{u}$ sur la base locale $\vec{a}^i$.

Les résultats du Chapitre 3 montrent alors qu'une condition suffisante pour que l'intégrale (2.5-2), donnant $a(\vec{v},\vec{v})$, ait un sens, est que la fonction $\vec{v}$ appartiennent à l'espace $(H^1(\Omega))^2\times H^2(\Omega)$.

La condition d'encastrement introduite au Paragraphe 2.6 équivaut à

(4.1-1) $$\vec{u}\,\big|_{\Gamma_0} = \vec{0}, \qquad \partial_\nu u_3\big|_{\Gamma_0} = 0,$$

où ν désigne la normale unitaire extérieure à Γ et ∂_ν l'opérateur associé de dérivation suivant la normale extérieure. Nous suprosons Γ_0 mesurable, de mesure strictement positive.

Dès lors, l'espace des déplacements admissibles $\vec{V}$ est défini par

(4.1-2) $$\vec{V} = \{\vec{v} = (v_1,v_2,v_3) \in (H^1(\Omega))^2\times H^2(\Omega);\ \vec{v}\big|_{\Gamma_0} = 0,\ \partial_\nu v_3 = 0\}.$$

Muni du produit scalaire induit par celui de $(H^1(\Omega))^2\times H^2(\Omega)$:

(4.1-3) $$(\vec{u},\vec{v})) = \sum_{i=1}^{2} ((u_i,v_i))_{1,\Omega} + ((u_3,v_3))_{2,\Omega},$$

l'espace $\vec{V}$ est un espace de Hilbert. La norme associée à ce produit scalaire sera notée

(4.1-4) $$\|\vec{v}\| = [((\vec{v},\vec{v}))]^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste maintenant à choisir convenablement la résultante des forces $\vec{p}$ (2.6-1) et les résultante et couple de forces $\vec{N}$, $\vec{M}$ (2.6-2) de telle sorte que les intégrales définissant $f(\vec{v})$ en (2.6-3) aient un sens. Pour cela nous prenons

(4.1-5) $$\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3\ ,\ \vec{N},\vec{M}\ \in (L^2(\Gamma_1))^3.$$

En effet la relation (2.3-5) définit $\phi_\beta = v_{3|\beta} + b^{\alpha}_{\beta}\, v_\alpha$ et lorsque $\vec{v} \in \vec{V}$ les composantes $\phi_\beta \in H^1(\Omega)$. D'où $(\phi_\beta)\big|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ (cf. par exemple LIONS-MAGENES [1]).

Dès lors, il est loisible de donner les formulations suivantes du problème.

4.2. FORMULATIONS DU PROBLEME.

A la forme quadratique $a(\vec{v},\vec{v})$ définie en (2.5-2) nous associons la forme bilinéaire

(4.2-1) $$\begin{cases} a(\vec{u},\vec{v}) = \displaystyle\int_\Omega \frac{Ee}{1-\nu^2}\ \{(1-\nu)\gamma^{\alpha}_{\beta}(\vec{u})\gamma^{\beta}_{\alpha}(\vec{v}) + \nu\gamma^{\alpha}_{\alpha}(\vec{u})\gamma^{\beta}_{\beta}(\vec{v}) + \\ \qquad + \dfrac{e^2}{12}\left[(1-\nu)\bar{\rho}^{\alpha}_{\beta}(\vec{u})\bar{\rho}^{\beta}_{\alpha}(\vec{v}) + \nu\bar{\rho}^{\alpha}_{\alpha}(\vec{u})\bar{\rho}^{\beta}_{\beta}(\vec{v})\right]\}\ \sqrt{a}\ d\xi^1 d\xi^2. \end{cases}$$

Si l'on développe cette expression en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés on vérifie que la forme bilinéaire $a(\ldots)$ ainsi définie est symétrique. On obtient alors les deux formulations équivalentes suivantes du problème :

(4.2-2) $$\begin{cases} \text{Pour } \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3,\ \vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3,\ \vec{M}\ \in (L^2(\Gamma_1))^3,\ \text{trouver } \vec{u} \in \vec{V} \text{ tel que} \\ \qquad\qquad a(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v}), \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}, \\ \text{où } f \text{ est défini en (2.6-3).} \end{cases}$$

Ou encore, comme la forme bilinéaire $a(.,.)$ est symétrique,

(4.2-3) $$\begin{cases} \text{Pour } \vec{p} \in (L^2(\Omega))^3,\ \vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3,\ \vec{M} \in (L^2(\Gamma_1))^3,\ \text{trouver } \vec{u} \in \vec{V} \text{ minimisant} \\ \text{la fonctionnelle} \\ \quad J : \vec{v} \in \vec{V} \rightarrow J(\vec{v}) = \frac{1}{2}\, a(\vec{v},\vec{v}) - f(\vec{v}). \end{cases}$$

CHAPITRE 5 - LE THEOREME DU MOUVEMENT RIGIDE

ORIENTATION : Nous montrons que si les tenseurs de déformation et de changement de courbure sont nuls pour un champ de déplacement $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, alors ce déplacement est un mouvement rigide, ou solidifiant. L'adjonction des conditions aux limites $\vec{v}|_{\Gamma_0} = \vec{0}$, $\partial_\nu v_3|_{\Gamma_0} = 0$ entraîne $\vec{v} = \vec{0}$ sur $\bar{\Omega}$.

5.1. LE THEOREME DU MOUVEMENT RIGIDE :

Pour $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ nous posons

(5.1-1) $$\Phi(\vec{v}) = \{|\gamma_{11}(\vec{v})|^2 + |\gamma_{12}(\vec{v})|^2 + |\gamma_{22}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{11}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{12}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{22}(\vec{v})|^2\}^{\frac{1}{2}}$$

où $|\cdot|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$ et où les tenseurs de déformation et de changement de courbure sont respectivement donnés par les relations (2.2-14) et (2.2-16) :

(5.1-2) $$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\, v_3,$$

(5.1-3) $$\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3|\alpha\beta} + b^\lambda_{\beta|\alpha}\, v_\lambda + b^\lambda_\beta\, v_{\lambda|\alpha} + b^\lambda_\alpha\, v_{\lambda|\beta} - c_{\alpha\beta}\, v_3.$$

Théorème 5.1-1 (du mouvement rigide) :

Nous supposons que la surface (S) du Paragraphe 2.1 est définie à l'aide d'une carte $\vec{\phi} \in C^3(\bar{\Omega})$. Alors les conditions (i) (ii) ci-dessous sont équivalentes :

(5.1-4) (i) $\begin{cases} \Phi(\vec{v}) = 0,\ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega), \\ \text{où } \Phi \text{ est donnée par (5.1-1);} \end{cases}$

(5.1-5) (ii) $\begin{cases} \vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi} \\ \text{où } \vec{A}, \vec{B} \text{ sont des vecteurs constants de } \mathcal{E}^3,\ \times \text{ désignant le} \\ \text{produit vectoriel dans } \mathcal{E}^3. \end{cases}$

Démonstration :

Etape 1 : $\vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi} \Longrightarrow \Phi(\vec{v}) = 0$

Dérivons l'expression (5.1-5) par rapport à ξ^α. Comme le vecteur $\vec{B}$ est constant et comme $\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{,\alpha}$, il vient :

$$\vec{v}_{,\alpha} = \vec{B} \times \vec{a}_\alpha.$$

Posons $\vec{B} = B^i\, \vec{a}_i$. On notera que les composantes contravariantes B^i sur la base locale $\vec{a}_i$ sont des fonctions des ξ^α. Avec les relations (1.2-4) qui donnent les produits vectoriels des $\vec{a}_i$, le vecteur $\vec{v}_{,\alpha}$ s'écrit

$$\vec{v}_{,\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\, B^3\, \vec{a}^\beta + \varepsilon_{\beta\alpha}\, B^\beta\, \vec{a}^3.$$

D'où

(5.1-6) $$v_{\beta|\alpha} = b_{\beta\alpha}\, v_3 + \varepsilon_{\alpha\beta}\, B^3,$$

(5.1-7) $$v_{3|\alpha} = -\, b^\lambda_\alpha\, v_\lambda + \varepsilon_{\lambda\alpha}\, B^\lambda,$$

en comparant avec l'expression (1.3-14) donnant les dérivées partielles du vecteur $\vec{v} = v_i\, \vec{a}^i = v^i\, \vec{a}_i$, i.e.,

(5.1-8) $$\vec{v}_{,\alpha} = (v^\lambda{}_{|\alpha} - b^\lambda_\alpha\, v^3)\vec{a}_\lambda + (v^3{}_{|\alpha} + b_{\lambda\alpha}\, v^\lambda)\vec{a}_3 = (v_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha} v_3)\vec{a}^\lambda + (v_{3|\alpha} + b^\lambda_\alpha v_\lambda)\vec{a}^3.$$

En reportant les relations (5.1-6) dans l'expression (5.1-2) on obtient immédiatment $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0$.

D'autre part les règles de dérivation usuelle d'un produit sont valables pour la dérivation covariante. Avec la relation (1.3-8), i.e. $\varepsilon_{\alpha\beta|\gamma} = 0$, la dérivée covariante de (5.1-7) s'écrit :

(5.1-9) $$(v_{3|\alpha})_{|\beta} = v_{3|\alpha\beta} = -\, b^\lambda_{\beta|\alpha}\, v_\lambda - b^\lambda_\alpha\, v_{\lambda|\beta} + \varepsilon_{\lambda\alpha}\, B^\lambda{}_{|\beta}\ .$$

Mais le vecteur $\vec{B}$ est constant. Sa dérivée est donc nulle. La relation (5.1-8) entraîne donc $B^\lambda{}_{|\beta} = b^\lambda_\beta\, B^3$, soit avec la relation (5.1-6)

$$\varepsilon_{\lambda\alpha}\, B^\lambda{}_{|\beta} = -\, \varepsilon_{\alpha\lambda}\, b^\lambda_\beta\, B^3 = -\, b^\lambda_\beta (v_{\lambda|\alpha} - b_{\lambda\alpha}\, v_3).$$

En reportant dans la relation (5.1-9) il vient :

$$v_{3|\alpha\beta} + b^\lambda_{\beta|\alpha}\, v_\lambda + b^\lambda_\alpha\, v_{\lambda|\beta} + b^\lambda_\beta\, v_{\lambda|\alpha} - b^\lambda_\beta\, b_{\lambda\alpha}\, v_3 = 0.$$

Comme $c_{\alpha\beta} = b^\lambda_\beta\, b_{\lambda\alpha}$ cette relation et la relation (5.1-3) entraînent $\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0$.

Etape 2 : $\Phi(\vec{v}) = 0,\ \vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) \longrightarrow \vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi}$, où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs constants.

Nous montrons tout d'abord que le vecteur $\vec{B} = B^i\, \vec{a}_i$, de composantes

(5.1-10) $$B^\lambda = \varepsilon^{\lambda\beta}(v_{3|\beta} + b^\nu_\beta\, v_\nu)$$

(5.1-11) $$B^3 = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{\nu\beta}\, v_{\beta|\nu}$$

est un vecteur constant lorsque $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ et $\Phi(\vec{v}) = 0$. Comme une distribution dont toutes les dérivées partielles sont nulles est une fonction constante (SCHWARTZ [1], p. 60) il suffit d'établir que $\vec{B}_{,\alpha} = \vec{0}$, au sens des distributions. Mais la carte $\vec{\phi}$ est régulière et $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$. Par suite les composantes du vecteur $\vec{B}$ données par les relations (5.1-10) et (5.1-11) sont des distributions, comme fonctions de $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, respectivement. La relation (5.1-8) entraîne, au sens des distributions :

(5.1-12) $$\vec{B}_{,\alpha} = (B^\lambda{}_{|\alpha} - b^\lambda_\alpha B^3)\vec{a}_\lambda + (B^3{}_{|\alpha} + b_{\lambda\alpha} B^\lambda)\vec{a}^3.$$

Il convient donc de montrer que $\Phi(\vec{v}) = 0$ et $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ impliquent :

$$(5.1\text{-}13)\qquad \begin{cases} B^{\lambda}|_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha} B^3 = 0, \\ B^3|_{\alpha} + b_{\lambda\alpha} B^{\lambda} = 0, \end{cases}$$

au sens des distributions. Pour allèger la démonstration nous établissons séparément, dans les Lemmes 5.1-1 et 5.1-2 ci-après, que l'on a, au sens des distributions

$$(5.1\text{-}14)\qquad \begin{cases} B^{\lambda}|_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha} B^3 = \varepsilon^{\lambda\beta}[\bar{\rho}_{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\nu\beta}], \\ B^3|_{\alpha} + b_{\lambda\alpha} B^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta|\lambda}, \end{cases}$$

pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$. Mais la condition $\Phi(\vec{v}) = 0$ équivaut à $\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0$ et $\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0$ dans $L^2(\Omega)$. Par suite $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ sont des distributions nulles. La relation

$$\gamma_{\alpha\beta|\lambda} = \gamma_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\gamma_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda}\gamma_{\alpha\nu},$$

déduite de la relation (1.3-6) et la régularité de $\vec{\phi}$ entraînent que le tenseur $\gamma_{\alpha\beta|\lambda}$ est également une distribution nulle. Dès lors, les relations (5.1-13) sont vérifiées, d'où $\vec{B}_{,\alpha} = 0$ en reportant dans la relation (5.1-12). <u>Ainsi le vecteur $\vec{B}$ est constant</u> (au sens usuel).

Montrons maintenant que $\vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi}$ où $\vec{A}, \vec{B}$ sont deux vecteurs constants. Pour cela on calcule les produits vectoriels $\vec{B}\times\vec{a}_{\gamma}$. Avec les relations (1.2-4) donnant les produits vectoriels des vecteurs de base $\vec{a}_i$, on obtient :

$$\vec{B}\times\vec{a}_{\gamma} = B^i\,\vec{a}_i\times\vec{a}_{\gamma} = \varepsilon_{\gamma\nu}B^3\vec{a}^{\nu} + \varepsilon_{\lambda\gamma}B^{\lambda}\vec{a}^3.$$

Avec les relations (5.1-10) et (5.1-11) :

$$\vec{B}\times\vec{a}_{\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\nu}\,\varepsilon^{\lambda\beta}\,v_{\beta|\lambda}\,\vec{a}^{\nu} + (v_{3|\gamma} + b^{\nu}_{\gamma}v_{\nu})\vec{a}^3,$$

en observant que $\varepsilon_{\lambda\gamma}\,\varepsilon^{\lambda\beta} = \delta^{\beta}_{\gamma}$. Mais l'utilisation des propriétés d'antisymétrie des $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ et de l'égalité

$$\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = 0 \longleftrightarrow \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta} + v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\,v_3 = 0$$

entraînent

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{\gamma\nu}\,\varepsilon^{\lambda\beta}\,v_{\beta|\lambda}\,\vec{a}^{\nu} = (v_{\nu|\gamma} - b_{\nu\gamma}\,v_3)\vec{a}^{\nu}.$$

D'où

$$\vec{B}\times\vec{a}_{\gamma} = (v_{\nu|\gamma} - b_{\nu\gamma}\,v_3)\vec{a}^{\nu} + (v_{3|\gamma} + b^{\nu}_{\gamma}\,v_{\nu})\vec{a}^3,$$

considérée comme égalité de deux distributions. La relation (5.1-8) entraîne alors

$$\vec{B}\times\vec{a}_{\gamma} = \vec{v}_{,\gamma},$$

ou, comme $\vec{a}_{\gamma} = \vec{\phi}_{,\gamma}$ (cf.(1.1-3)) et comme $\vec{B} = \text{cte}$

$$(\vec{v} - \vec{B}\times\vec{\phi})_{,\gamma} = \vec{0}.$$

La distribution $\vec{v} - \vec{B}\times\vec{\phi}$ a toutes ses dérivées partielles nulles. Elle est donc constante. Soit $\vec{A}$ cette constante :

$$\vec{v} = \vec{A} + \vec{B}\times\vec{\phi},$$

d'où (5.1-5). Ainsi $\vec{v}$ est une fonction au sens ordinaire qui a la même régularité que la fonction $\vec{\phi}$ ici $\vec{v} \in C^3(\bar{\Omega})$. ■

<u>Remarque 5.1-1</u> : Ce raisonnement s'applique à des fonctions $\vec{v}$ plus générales. En particulier, si $\vec{\phi} \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ alors $\vec{v}$ peut être une distribution quelconque. ■

<u>Lemme 5.1-1</u> : <u>Pour</u> $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ <u>on a, au sens des distributions</u>

$$B^{\lambda}|_{\alpha} - b^{\lambda}_{\alpha}B^3 = \varepsilon^{\lambda\beta}[\bar{\rho}_{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\nu\beta}],$$

<u>où</u> $\varepsilon^{\lambda\beta}$, $\gamma_{\nu\beta}$, $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ <u>sont définies par les relations (1.2-5), (5.1-2) et (5.1-3), respectivement</u>.

<u>Démonstration</u> :

Les règles usuelles de dérivation d'un produit sont valables pour la dérivation covariante. De la relation (1.3-8), i.e., $\varepsilon^{\lambda\beta}|_{\alpha} = 0$ on déduit la dérivée covariante des composantes B^{λ} données par la relation (5.1-10) :

$$B^{\lambda}|_{\alpha} = \varepsilon^{\lambda\beta}[v_{3|\beta\alpha} + b^{\nu}_{\beta|\alpha}v_{\nu} + b^{\nu}_{\beta}v_{\nu|\alpha}]$$

$$= \varepsilon^{\lambda\beta}[\bar{\rho}_{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\alpha}v_{\nu|\beta} + c_{\alpha\beta}v_3] \quad \text{avec (5.1-3)}.$$

La relation (1.2-13), i.e., $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha} = b^{\nu}_{\alpha}b_{\nu\beta}$, et la relation (5.1-2) conduisent à

$$B^{\lambda}|_{\alpha} = \varepsilon^{\lambda\beta}[\bar{\rho}_{\alpha\beta} - b^{\nu}_{\alpha}\gamma_{\nu\beta}] + \frac{1}{2}b^{\nu}_{\alpha}\,\varepsilon^{\lambda\beta}(v_{\beta|\nu} - v_{\nu|\beta}).$$

Mais les propriétés d'antisymétrie de $\varepsilon^{\lambda\beta}$ jointes à la relation (5.1-11) montrent que

$$\frac{1}{2}b^{\nu}_{\alpha}\,\varepsilon^{\lambda\beta}(v_{\beta|\nu} - v_{\nu|\beta}) = b^{\lambda}_{\alpha}B^3,$$

d'où la relation cherchée. ■

<u>Lemme 5.1-2</u> : <u>Pour</u> $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ <u>on a, au sens des distributions</u>

$$(5.1\text{-}15)\qquad B^3|_{\alpha} + b_{\lambda\alpha}B^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\beta}\gamma_{\alpha\beta|\lambda},$$

<u>où</u> $\varepsilon^{\lambda\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ <u>sont définis par les relations</u> (1.2-5) <u>et</u> (5.1-2), <u>respectivement</u>.

<u>Démonstration</u> :

La composante B^3 donnée par (5.1-11) est une fonction de $L^2(\Omega)$, donc une distribution. Sa dérivée covariante, au sens des distributions, a pour expression :

$$(5.1\text{-}16)\qquad B^3|_{\alpha} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\nu\beta}\,v_{\beta|\nu\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(v_{2|1\alpha} - v_{1|2\alpha}),$$

en remarquant que $\varepsilon^{\nu\beta}\big|_{\alpha} = 0$. Par ailleurs, la relation (5.1-10) entraîne

$$b_{\lambda\alpha} B^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[b_{1\alpha} v_{3|2} - b_{2\alpha} v_{3|1} + (b_{1\alpha} b_{2\lambda} - b_{2\alpha} b_{1\lambda}) v^{\lambda} \right] .$$

Mais la relation (1.3-7) s'écrit ici

$$v_{\alpha|21} - v_{\alpha|12} = (b_{\alpha 1} b_{\lambda 2} - b_{\alpha 2} b_{\lambda 1}) v^{\lambda},$$

d'où

(5.1-17) $$b_{\lambda\alpha} B^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[b_{1\alpha} v_{3|2} - b_{2\alpha} v_{3|1} + v_{\alpha|21} - v_{\alpha|12} \right] .$$

Par ailleurs, la relation (5.1-2) implique que

(5.1-18) $$\varepsilon^{\lambda\beta} \gamma_{\alpha\beta|\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\gamma_{\alpha|21} + \gamma_{2|\alpha 1} - \gamma_{\alpha|12} - \gamma_{1|\alpha 2} \right] + \frac{1}{\sqrt{a}} \left[b_{\alpha 1} v_{3|2} - b_{\alpha 2} v_{3|1} \right] .$$

En rassemblant les égalités (5.1-16) (5.1-17) (5.1-18), il suffit pour établir la relation (5.1-15), de montrer que

$$\gamma_{2|1\alpha} - \gamma_{1|2\alpha} + 2\gamma_{\alpha|21} - 2\gamma_{\alpha|12} = \gamma_{\alpha|21} + \gamma_{2|\alpha 1} - \gamma_{\alpha|12} - \gamma_{1|\alpha 2} ,$$

ce qui est immédiat en considérant successivement les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. ■

Remarque 5.1-2 :

Il est signalé dans KOITER [1] [2] qu'il peut être intéressant dans certains cas de remplacer le tenseur de changement de courbure $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ (cf (5.1-3)) par le tenseur "modifié" de changement de courbure

(5.1-19) $$\rho_{\alpha\beta} = \bar{\rho}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(b_{\alpha}^{\nu} \gamma_{\nu\beta} + b_{\beta}^{\nu} \gamma_{\nu\alpha}).$$

Dans son analyse W.T. KOITER souligne que les termes complémentaires ainsi introduits n'apportent que des contributions "négligeables" à l'intégrale d'énergie. Ce tenseur $\rho_{\alpha\beta}$ a été utilisé indépendamment par SANDERS [1] et les avantages de cette définition sont discutés par BUDIANSKY-SANDERS [1].

Dans ce cas, le théorème du mouvement rigide reste valable. Il suffit d'observer que la relation (5.1-19) entraîne l'équivalence

$$\{\gamma_{\alpha\beta} = 0 \text{ et } \bar{\rho}_{\alpha\beta} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)\} \Longleftrightarrow \{\gamma_{\alpha\beta} = 0 \text{ et } \rho_{\alpha\beta} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)\}. \ ■$$

5.2. CONSEQUENCE DU THEOREME DU MOUVEMENT RIGIDE :

Comme conséquence du théorème du mouvement rigide nous montrons que pour $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, la nullité des tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}$ et $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ jointe à la condition d'encastrement (4.1-1) entraîne $\vec{v} = \vec{0}$.

Théorème 5.2-1 : Soit l'espace $\vec{V}$ défini en (4.1-2) et la fonctionnelle Φ définie en (5.1-1). Alors

(5.2-1) $$\{\vec{v} \in \vec{V},\ \Phi(\vec{v}) = 0\} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{0}.$$

Démonstration :

L'hypothèse $\Phi(\vec{v}) = 0$, $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ entraîne, d'après le Théorème 5.1-1, que $\vec{v}$ est de la forme

(5.2-2) $$\vec{v} = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi},$$

où $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux vecteurs constants. Plus précisément les composantes du vecteur $\vec{B}$ sur la base $\vec{a}_i$ sont données par les relations (5.1-10) (5.1-11), i.e.,

(5.2-3) $$B^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\beta}(v_{3|\beta} + b_{\beta}^{\nu} v_{\nu}),\ B^3 = \frac{1}{2} \varepsilon^{\nu\beta} v_{\beta|\nu} .$$

Les conditions aux limites (4.1-1), i.e.,

(5.2-4) $$\vec{v}\big|_{\Gamma_0} = \vec{0},\quad \partial_{\nu} v_3\big|_{\Gamma_0} = 0,$$

traduisent l'encastrement de la surface moyenne S sur son bord $\vec{\phi}(\Gamma_0)$. L'hypothèse $\vec{v} \in \vec{V}$ entraîne $\vec{v}\big|_{\Gamma_0} \in (L^2(\Gamma_0))^2 \times H^1(\Gamma_0)$ et c'est au sens de $L^2(\Gamma_0)$ que les conditions (5.2-4) sont vérifiées, c'est-à-dire presque partout . Alors si τ désigne la tangente unitaire à $\Gamma = \partial\Omega$, la condition $v_3\big|_{\Gamma_0} = 0$ entraîne $\partial_{\tau} v_3\big|_{\Gamma_0} = 0$. Cette dernière condition, jointe à $\partial_{\nu} v_3\big|_{\Gamma_0} = 0$ implique alors $v_{3,\alpha}\big|_{\Gamma_0} = 0$, $\alpha = 1,2$, presque partout. La relation (5.2-3) entraîne $B^{\lambda}\big|_{\Gamma_0} = 0$ p.p., d'où

(5.2-5) $$\vec{B} = B^3 \vec{a}_3 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_0.$$

Soient deux points quelconques distincts P_1 et P_2 de Γ_0 dont les images par la carte $\vec{\phi}$ sont deux points distincts de ∂S. Les relations (5.2-2) et (5.2-4) donnent :

$$\vec{v}(P_1) = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi}(P_1) = \vec{0},$$
$$\vec{v}(P_2) = \vec{A} + \vec{B} \times \vec{\phi}(P_2) = \vec{0} ,$$

soit, en effectuant la différence :

(5.2-6) $$B \times [\vec{\phi}(P_2) - \vec{\phi}(P_1)] = \vec{0} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_0 .$$

Deux cas sont alors possibles

(i) $\vec{B} = \vec{0}$. Dans ce cas la relation (5.2-2) écrite pour $(\xi^1, \xi^2) \in \Gamma_0$ entraîne $\vec{A} = \vec{0}$ p.p. sur Γ_0. Comme Γ_0 est mesurable de mesure strictement positive et comme $\vec{A}$ est constant, alors $\vec{A} = \vec{0}$ (partout) d'où $\vec{v} = \vec{0}$ sur $\bar{\Omega}$. Le Théorème 5.2-1 est établi dans ce cas.

(ii) $\vec{B} \neq \vec{0}$. La relation (5.2-6) implique que presque tous les points de $\vec{\phi}(\Gamma_0)$ sont situés sur une droite fixe (Δ) de l'espace $\mathcal{E}^3$, de direction $\vec{B}$. Par suite le vecteur $\vec{B}$ se trouve dans le plan tangent à la surface S en presque tous les points de $\vec{\phi}(\Gamma_0)$, c'est-à-dire, avec (5.2-5), $B^3 = 0$ presque partout sur Γ_0. Ainsi $\vec{B} = \vec{0}$

presque partout sur Γ_0. Comme $\vec{B}$ est constant et comme Γ_0 est mesurable, de mesure non nulle on a $\vec{B} = \vec{0}$ (partout), ce qui contredit l'hypothèse $\vec{B} \neq \vec{0}$. ■

Un corollaire immédiat du Théorème 5.2-1 est le suivant :

Corollaire 5.2-1 : La fonctionnelle Φ définie en (5.1-1) est une norme sur l'espace de Hilbert $\vec{V}$. ■

Remarque 5.2-1 :

L'équation (5.2-1) est un système homogène de six équations aux dérivées partielles aux trois fonctions inconnues v_1, v_2, v_3. Ce système est donc surdéterminé. Si l'on peut extraire de ce système trois équations constituant un système elliptique au sens de HÖRMANDER [1, Définition 10.6-1], alors, pour des coefficients du système appartenant à $C^\infty(\Omega)$ (c'est le cas lorsque $\vec{\phi} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^3$), la solution $\vec{v}$ du système extrait appartient à $(C^\infty(\Omega))^3$, d'après HÖRMANDER [1, Théorème 7.5-1 et page 269]. Il en irait alors de même des solutions éventuelles du système complet. Mais il n'est pas possible d'extraire de sous-système elliptique et il faut donc abandonner cette voie. C'est pourquoi, faute de pouvoir aborder directement l'étude de ce système, nous avons plutôt cherché à tenir compte de l'origine mécanique du problème. Cette observation nous a essentiellement suggéré l'introduction des "bons" changements de fonction qui, en fin de compte nous ont ramenés à des intégrations de systèmes d'équations aux dérivées partielles de forme très simple. ■

CHAPITRE 6 : $\vec{V}$-ELLIPTICITE DU MODELE LINEAIRE DE W.T. KOITER

ORIENTATION : Nous établissons dans ce Chapitre un théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème (4.2-2) ou (4.2-3). L'étape essentielle est naturellement la démonstration de la $\vec{V}$-ellipticité de la forme $a(.,.)$.

6.1. $\vec{V}$-ELLIPTICITE DE LA FORME $a(.,.)$:

La $\vec{V}$-ellipticité de la forme $a(.,.)$ établie au Théorème 6.1-3 repose sur l'équivalence de normes étudiée dans le Théorème 6.1-1 et sur l'inégalité $a(\vec{u},\vec{u}) \geq K(\Phi(\vec{u}))^2$ démontrée au Théorème 6.1-2.

Théorème 6.1-1 : Sur l'espace de Hilbert $\vec{V}$ les applications ψ et Φ respectivement définies par (3.4-3) et (5.1-1) définissent des normes équivalentes.

Démonstration :

Rappelons les définitions de ψ et Φ. Pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ on a posé en (3.4-3) et (5.1-1), respectivement :

$$(6.1\text{-}1)\quad \begin{cases} \psi(\vec{v}) = \{|v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 + |v_{1|1}|^2 + |v_{1|2}+v_{2|1}|^2 + |v_{2|2}|^2 + \\ \qquad + |v_{3|1}|^2 + |v_{3|2}|^2 + |v_{3|11}|^2 + |v_{3|12}|^2 + |v_{3|22}|^2\}^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

et

$$(6.1\text{-}2)\quad \Phi(\vec{v}) = \{|\gamma_{11}(\vec{v})|^2 + |\gamma_{12}(\vec{v})|^2 + |\gamma_{22}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{11}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{12}(\vec{v})|^2 + |\bar{\rho}_{22}(\vec{v})|^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Les tenseurs de déformation de la surface moyenne $\gamma_{\alpha\beta}$ et de changement de courbure $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ sont donnés par les relations (2.2-14) et (2.2-16), i.e.,

$$(6.1\text{-}3)\qquad \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v}) = \frac{1}{2}(v_{\alpha|\beta}+v_{\beta|\alpha}) - b_{\alpha\beta}\, v_3,$$

$$(6.1\text{-}4)\qquad \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v}) = v_{3|\alpha\beta} + b^{\lambda}_{\beta|\alpha}\, v_\lambda + b^{\lambda}_{\beta}\, v_{\lambda|\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha}\, v_{\lambda|\beta} - c_{\alpha\beta}\, v_3 .$$

La démonstration du Théorème 6.1-1 comporte les cinq étapes suivantes :

Etape 1 : Il existe une constante $K > 0$ telle que $\Phi(\vec{v}) \leq K\psi(\vec{v})$, $\forall \vec{v} \in \vec{V}$:

Les relations (6.1-3) (6.1-4) et les inégalités (3.1-1) (3.1-2) entraînent

$$(6.1\text{-}5)\qquad |\gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})| \leq k\|\vec{v}\|, \quad |\bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v})| \leq k\|\vec{v}\|,$$

où k désigne une constante > 0. L'inégalité cherchée est obtenue en reportant les inégalités (6.1-5) dans la relation (6.1-2) et en utilisant l'équivalence des normes ψ et $\|.\|$ du Lemme 3.4-2.

Remarque 6.1-1 : On observera que l'inégalité $\Phi(\vec{v}) \leq K\psi(\vec{v})$ est vérifiée pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$. ■

Etape 2 : Il existe deux constantes $L > 0$ et $M > 0$ telles que, $\forall \vec{v} \in \vec{V}$, on ait

$$\psi^2(\vec{v}) \leq L\Phi^2(\vec{v}) + M(|v_1|^2+|v_2|^2+|v_3|^2) + |v_{3|1}|^2+|v_{3|2}|^2 . \tag{6.1-6}$$

La démonstration de ce résultat repose sur l'inégalité suivante :

$$\begin{cases} \forall a, b_1, \ldots, b_n \in L^2(\Omega), \ \forall \beta \in R, \ \beta > 0, \\ |a+b_1+\ldots+b_n|^2 \geq \frac{\beta}{1+\beta}|a|^2 - n\beta(|b_1|^2+\ldots+|b_n|^2). \end{cases} \tag{6.1-7}$$

Cette inégalité est une conséquence directe des inégalités usuelles

$$|a+b|^2 \geq \frac{\beta}{1+\beta}|a|^2 - \beta|b|^2,$$

$$|b_1+\ldots+b_n|^2 \leq n(|b_1|^2+\ldots+|b_n|^2).$$

La relation (6.1-3), les inégalités (3.1-1) et (6.1-7) dans laquelle on prend $\beta = 1$, entraînent (pour abréger on note $\rho_1^2 = (\rho_1)^2$, ρ_1 étant défini en (3.1-1)) :

$$\begin{cases} |\gamma_{11}|^2 \geq \frac{1}{2}|v_{1|1}|^2 - \rho_1^2|v_3|^2 , \\ |\gamma_{12}|^2 \geq \frac{1}{8}|v_{1|2}+v_{2|1}|^2 - \rho_1^2|v_3|^2 , \\ |\gamma_{22}|^2 \geq \frac{1}{2}|v_{2|2}|^2 - \rho_1^2|v_3|^2 . \end{cases} \tag{6.1-8}$$

De la même façon les inégalités (3.1-1) et (6.1-7) conduisent pour l'expression (6.1-4) de $\bar{\rho}_{\alpha\beta}$ aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |\bar{\rho}_{11}|^2 \geq \frac{\beta}{1+\beta}|v_{3|11}|^2 - 5\rho_1^2\beta\{4(|v_{1|1}|^2 + |v_{2|1}|^2) + |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2\} , \\ |\bar{\rho}_{12}|^2 \geq \frac{\beta}{1+\beta}|v_{3|12}|^2 - 7\rho_1^2\beta\{|v_{1|1}|^2 + |v_{1|2}|^2 + |v_{2|1}|^2 + |v_{2|2}|^2 + |v_1|^2 + \\ \qquad + |v_2|^2 + |v_3|^2\} , \\ |\bar{\rho}_{22}|^2 \geq \frac{\beta}{1+\beta}|v_{3|22}|^2 - 5\rho_1^2\beta\{4(|v_{1|2}|^2 + |v_{2|2}|^2) + |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2\} . \end{cases} \tag{6.1-9}$$

En ajoutant les inégalités (6.1-8) (6.1-9) il vient en utilisant la Définition (6.1-2) de Φ et le Lemme 3.3-5 (k désigne une constante) :

$$\begin{aligned} \Phi^2(\vec{v}) \geq \frac{\beta}{1+\beta}\{|v_{3|11}|^2 + |v_{3|12}|^2 + |v_{3|22}|^2\} &+ (\tfrac{1}{8} - 27\rho_1^2\beta k)|v_{1|2}+v_{2|1}|^2 \\ &+ (\tfrac{1}{2} - 27\rho_1^2\beta(1+k))\{|v_{1|1}|^2 + |v_{2|2}|^2\} \\ &- \rho_1^2(3+17\beta)|v_3|^2 - \rho_1^2\beta(17+27k)\{|v_1|^2 + |v_2^2|\}. \end{aligned}$$

Remplaçons $|v_{3|11}|^2 + |v_{3|12}|^2 + |v_{3|22}|^2$ par son expression en fonction de $\psi^2(\vec{v})$ tirée de la Définition (6.1-1) :

$$\begin{aligned} \Phi^2(\vec{v}) \geq \frac{\beta}{1+\beta}\psi^2(\vec{v}) &+ (\tfrac{1}{8} - \frac{\beta}{1+\beta} - 27\rho_1^2\beta k)|v_{1|2}+v_{2|1}|^2 \\ &+ \left[\tfrac{1}{2} - \frac{\beta}{1+\beta} - 27\rho_1^2\beta(1+k)\right]\{|v_{1|1}|^2 + |v_{2|2}|^2\} \\ &- \frac{\beta}{1+\beta}\{|v_{3|1}|^2 + |v_{3|2}|^2\} - \left[\frac{\beta}{1+\beta} + \rho_1^2(3+17\beta)\right]|v_3|^2 \\ &- \left[\frac{\beta}{1+\beta} + \rho_1^2\beta(17+27k)\right]\{|v_1|^2 + |v_2|^2\} . \end{aligned}$$

Il est loisible de supposer

$$0 < \beta \leq \frac{1}{8}\min\{\frac{1}{1+27\rho_1^2 k} , \frac{4}{1+27\rho_1^2(1+k)}\}$$

ce qui conduit pour $\Phi^2(\vec{v})$ à l'inégalité

$$\begin{aligned} \Phi^2(\vec{v}) \geq \frac{\beta}{1+\beta}\psi^2(\vec{v}) &- \frac{\beta}{1+\beta}\{|v_{3|1}|^2 + |v_{3|2}|^2\} \\ &- [\beta + \rho_1^2(3+17\beta)]|v_3|^2 - \beta[1+\rho_1^2(17+27k)]\{|v_1|^2 + |v_2|^2\}. \end{aligned}$$

On obtient alors l'inégalité (6.1-6) en posant

$$\begin{cases} L = \frac{1+\beta}{\beta} , \\ M = (1+\beta)\left[1+\rho_1^2\{17 + \max(\frac{3}{\beta}, 27k)\}\right]. \end{cases}$$

Etape 3 : L'application $\Phi : \vec{v} \in \vec{V} \to \Phi(\vec{v})$ est faiblement semi-continue inférieurement.

Pour démontrer ce résultat, il nous suffit de montrer que l'application $\Phi : \vec{v} \in \vec{V} \to R$ est convexe et (fortement) continue sur $\vec{V}$.

(i) Φ est une application convexe sur $\vec{V}$: Cela résulte de ce que l'application Φ est deux fois dérivable dans $\vec{V}$ et la dérivée seconde est semi-définie positive pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$. L'étude de l'application Φ définie en (6.1-2) et la linéarité des applications $\vec{v} \to \gamma_{\alpha\beta}(\vec{v})$ et $\vec{v} \to \bar{\rho}_{\alpha\beta}(\vec{v})$ entraînent

$$\Phi''(\vec{v}).(\vec{w},\vec{w}) = [\Phi(\vec{w})]^2 \geq 0, \quad \forall \vec{v},\vec{w} \in \vec{V}.$$

Remarquons que le Théorème 5.2-1 entraîne même la stricte convexité de Φ sur $\vec{V}$.

(ii) Φ est continue sur $\vec{V}$:

Nous avons montré à l'Etape 1 que pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$ il existe $K > 0$ tel que $\Phi(\vec{v}) \leq K\psi(\vec{v})$. Le Lemme 3.4-2 entraîne l'existence d'une constante $K_1 > 0$ telle que, pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$, on ait $\psi(\vec{v}) \leq K_1\|\vec{v}\|$. D'où $\Phi(\vec{v}) \leq KK_1\|\vec{v}\|$ pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$.

Etape 4 : Toute suite $\{\vec{v}_n\}$ d'éléments de $\vec{V}$ vérifiant pour tout n

$$\psi(\vec{v}_n) = 1 , \tag{6.1-10}$$

$$\Phi(\vec{v}_n) < \frac{1}{n} , \tag{6.1-11}$$

converge vers $\vec{0}$, faiblement dans $\vec{V}$, fortement dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$.

La démonstration comporte les quatres points suivants :

(i) Il existe une sous-suite extraite $\{\vec{v}_{n'}\}$ de $\{\vec{v}_n\}$ faiblement convergente dans $\vec{V}$:

Le Lemme 3.4-2 et l'égalité (6.1-10) entraînent que la suite $\{\vec{v}_n\}$ est fortement bornée dans $\vec{V}$. Cet espace étant de Hilbert pour le produit scalaire (4.1-3), est donc réflexif. Le théorème d'EBERLEIN-SHMULYAN (cf. YOSIDA [1, page 141]) entraîne l'existence d'une sous-suite extraite de la suite $\{\vec{v}_n\}$, soit $\{\vec{v}_{n'}\}$, faiblement convergente dans $\vec{V}$ vers $\vec{v} \in \vec{V}$.

(ii) Il existe une sous-suite extraite $\{\vec{v}_{n''}\}$ de $\{\vec{v}_{n'}\}$ fortement convergente dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$:

L'ouvert Ω étant supposé borné et suffisamment régulier, l'injection de $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ est compacte (cf. LIONS-MAGENES [1, Chapitre 1, Théorème 16-1]). De la suite $\{\vec{v}_{n'}\}$ bornée dans $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $\{\vec{v}_{n''}\}$ fortement convergente dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ vers $\vec{w} \in (L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$.

(iii) Les limites $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égales :

La convergence faible de la suite $\{\vec{v}_{n''}\}$ vers $\vec{v}$ dans $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ entraîne la convergence faible de la suite $\{\vec{v}_{n''}\}$ vers $\vec{v}$ dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Mais la suite $\{\vec{v}_{n''}\}$ converge fortement, donc faiblement, vers $\vec{w}$ dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. L'unicité de la limite d'une suite faiblement convergente entraîne l'égalité $\vec{v} = \vec{w}$.

(iv) Les limites $\vec{v} = \vec{w}$ sont nulles :

Nous avons montré à l'Etape 3 que l'application ϕ est faiblement semi-continue inférieurement sur $\vec{V}$. Ce résultat joint à l'inégalité (6.1-11) entraîne que la limite faible $\vec{v}$ de la sous-suite $\{\vec{v}_{n'}\}$ est l'élément $\vec{0}$ de $\vec{V}$. Ainsi les limites $\vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$ sont indépendantes des sous-suites extraites; c'est donc la suite $\{\vec{v}_n\}$ "entière" qui converge vers $\vec{0}$, faiblement dans $\vec{V}$, fortement dans $(L^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$.

Etape 5 : $\exists K > 0$, K constant, tel que pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$, on ait :

(6.1-12) $$\psi(\vec{v}) \leq K\, \phi\, (\vec{v}).$$

Si l'inégalité (6.1-12) n'est pas vérifiée pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$, alors il existe une suite d'éléments $\vec{v}_n \in \vec{V}$ telle que, pour tout n,

$$\begin{cases} \psi(\vec{v}_n) = 1, \\ \phi(\vec{v}_n) < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'inégalité (6.1-6) s'écrit, pour les éléments de la suite $\{\vec{v}_n\}$:

$$\psi^2(\vec{v}_n) = 1 \leq L\phi^2(\vec{v}_n) + M(|v_{1n}|^2 + |v_{2n}|^2 + |v_{3n}|^2) + |v_{3n|1}|^2 + |v_{3n|1}|^2 .$$

Avec les résultats de l'Etape 4 et l'inégalité $\phi(\vec{v}_n) < \frac{1}{n}$ on aboutit à une contradiction lorsque n tend vers l'infini. L'inégalité (6.1-12) est donc bien vérifiée. ■

Théorème 6.1-2 : Il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, on ait :

(6.1-13) $$a(\vec{v},\vec{v}) \geq K\,[\phi(\vec{v})]^2,$$

où la forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie en (4.2-1) et l'application ϕ en (6.1-2).

Démonstration :

Soit les applications ϕ_1 et ϕ_2 : $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega) \to R$ définies par

$$\phi_1(\vec{v}) = \int_S \frac{Ee}{1-\nu^2} \{(1-\nu)\gamma^\alpha_\beta \gamma^\beta_\alpha + \nu\, \gamma^\alpha_\alpha \gamma^\beta_\beta\} dS,$$

$$\phi_2(\vec{v}) = \frac{1}{12}\int_S \frac{Ee^3}{1-\nu^2} \{(1-\nu)\bar{\rho}^\alpha_\beta \bar{\rho}^\beta_\alpha + \nu\, \bar{\rho}^\alpha_\alpha \bar{\rho}^\beta_\beta\} dS,$$

où, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, on écrit simplement $\gamma^\alpha_\beta, \bar{\rho}^\alpha_\beta$ au lieu de $\gamma^\alpha_\beta(\vec{v})$ et $\bar{\rho}^\alpha_\beta(\vec{v})$ respectivement.

Nous envisageons ici le cas le plus simple c'est-à-dire celui où

(i) le matériau est homogène et isotrope, i.e., E et ν sont des constantes. Rappelons que ces constantes vérifient les inégalités $E > 0$, $0 < \nu < \frac{1}{2}$.

(ii) l'épaisseur e de la coque est constante.

L'analyse qui suit s'applique cependant aux cas plus généraux pour lesquels les coefficients E,ν ainsi que l'épaisseur peuvent varier le long de la surface moyenne de la coque.

Moyennant les hypothèses (i) et (ii) ci-dessus, on obtient :

$$\int_S \frac{Ee}{1-\nu^2}\, \gamma^\alpha_\alpha \gamma^\beta_\beta\, dS \geq 0.$$

Par ailleurs, le Lemme 3.2-4, les hypothèses (i) et (ii) ci-dessus et la symétrie du tenseur $\gamma_{\alpha\beta}$ entraînent l'existence d'une constante $K_1 > 0$ telle que

(6.1-14) $$\int_S \frac{Ee}{1+\nu}\, \gamma^\beta_\alpha(\vec{v})\gamma^\alpha_\beta(\vec{v}) dS \geq K_1(|\gamma_{11}|^2+|\gamma_{12}|^2+|\gamma_{22}|^2).$$

En ajoutant ces deux dernières inégalités, il vient, pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$,

$$\phi_1(\vec{v}) \geq K_1(|\gamma_{11}|^2+|\gamma_{12}|^2+|\gamma_{22}|^2).$$

Par analogie on montre que, pour tout $\vec{v} \in (H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$, il existe une constante $K_2 > 0$ telle que

$$\phi_2(\vec{v}) \geq K_2(|\bar{\rho}_{11}|^2+|\bar{\rho}_{12}|^2+|\bar{\rho}_{22}|^2).$$

Il suffit alors d'ajouter ces deux dernières inégalités pour obtenir l'inégalité (6.1-13). ■

Remarque 6.1-1 :

La démonstration du Lemme 3.2-4 proposée par ROUGEE [1] fait appel à des considérations topologiques. On peut démontrer directement des résultats du type (6.1-14) par une voie purement algébrique. ■

En rassemblant les résultats du Lemme 3.4-2 et des théorèmes 6.1-1 et 6.1-2 on obtient immédiatement :

Théorème 6.1-3 : La forme bilinéaire a(.,.) définie en (4.2-1) est $\vec{V}$-elliptique, i.e., il existe une constante $\alpha > 0$ telle que, pour tout $\vec{v} \in \vec{V}$,

$$a(\vec{v},\vec{v}) \geq \alpha \|\vec{v}\|^2 .$$

■

Remarque 6.1-2 :

Pour établir la $\vec{V}$-ellipticité de la forme bilinéaire a(.,.) la seule hypothèse faite sur la géométrie de la surface moyenne est sa définition à l'aide d'une carte $\vec{\phi} \in C^3(\bar{\Omega})$. En particulier, il n'est fait aucune hypothèse sur des bornes éventuelles de variations des courbures normales. ■

Remarque 6.1-3 :

Nous venons d'établir la $\vec{V}$-ellipticité de la forme bilinéaire a(.,.) sur le sous-espace $\vec{V}$ de $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ correspondant à une coque encastrée sur une partie Γ_0 de son bord. Pour des conditions aux limites plus générales on pourra, par exemple, envisager de transposer au cas des coques les résultats de HLAVÁČEK-NEČAS [1] établis pour les équations de l'élasticité. ■

6.2. LA FORME BILINEAIRE a(.,.) EST CONTINUE SUR $\vec{V}\times\vec{V}$:

Théorème 6.2-1 : la forme bilinéaire a(.,.) définie en (4.2-1) est continue sur $\vec{V}\times\vec{V}$.

Démonstration :

Soit à montrer l'existence d'une constante $M > 0$ telle que

$$a(\vec{u},\vec{v}) \leq M \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{V}. \tag{6.2-1}$$

Les hypothèses sur les quantités E,ν,e étant les mêmes que celles du Théorème 6.1-2, l'inégalité de Schwarz et le Lemme 3.2-4 appliqués à la Définition (4.2-1) de la forme bilinéaire a(.,.), entraînent l'existence d'une constante M_1 telle que

$$|a(\vec{u},\vec{v})| \leq M_1 \, \Phi(\vec{u})\Phi(\vec{v}), \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{V},$$

où la fonctionnelle Φ est définie en (6.1-2).

Grâce au Lemme 3.4-2 et au Théorème 6.1-1 la fonctionnelle Φ est une norme sur $\vec{V}$ équivalente à la norme usuelle, d'où le résultat. ■

6.3. LA FORME LINEAIRE f(.) EST CONTINUE SUR $\vec{V}$:

Théorème 6.3-1 : La forme linéaire f(.) définie en (2.6-3) et (4.1-5) est continue sur $\vec{V}$.

Démonstration :

Rappelons la définition de f(.). Nous avons désigné par $t \to \xi^\alpha = f^\alpha(t)$ les équations paramétriques de la partie Γ_1 de la frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Alors pour $\vec{v} \in \vec{V}$,

$\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$, $\vec{N} \in (L^2(\Gamma_1))^3$, $\vec{M} \in (L^2(\Gamma_1))^3$ la forme linéaire f(.) est définie par

$$f(\vec{v}) = \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 + \int_{\Gamma_1} [N^i v_i + M^\beta (v_{3|\beta} + b^\alpha_\beta v_\alpha)] \sqrt{a_{\nu\lambda}(f^\nu)'(f^\lambda)'}\, dt.$$

L'hypothèse $\vec{p} \in (L^2(\Omega))^3$ et la propriété d'injection continue de $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ dans $(L^2(\Omega))^3$ entraînent l'existence d'une constante c telle que

$$\left| \int_\Omega p^i v_i \sqrt{a}\, d\xi^1 d\xi^2 \right| \leq c \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}.$$

D'autre part, les hypothèses $\vec{N}$, $\vec{M} \in (L^2(\Gamma_1))^3$ et la propriété d'injection continue de $(H^1(\Omega))^2 \times H^2(\Omega)$ dans $(L^2(\Gamma_1))^2 \times H^1(\Gamma_1)$ entraînent l'existence d'une nouvelle constante c telle que

$$\left| \int_{\Gamma_1} [N^i v_i + M^\beta (v_{3|\beta} + b^\alpha_\beta v_\alpha)] \sqrt{a_{\nu\lambda}(f^\nu)'(f^\lambda)'}\, dt \right| \leq c \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}.$$

D'où le résultat cherché en rassemblant les deux inégalités précédentes.

6.4. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE :

Grâce aux Théorèmes 6.1-3, 6.2-1, 6.3-1 on peut appliquer le Lemme de Lax-Milgram à notre problème. On obtient ainsi

Théorème 6.4-1 : Le problème (4.2-2) admet une solution unique. ■

BIBLIOGRAPHIE

ADAMS, R.A.,
[1] Sobolev spaces. Academic Press, New York, 1975.

ARGYRIS, J.H., HAASE, M., MALEJANNAKIS, G.A.,
[1] Natural geometry of surfaces with specific reference to the matrix displacement analysis of shells, I, II and III. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B 76 (1973), 361-410.

BERNADOU, M.,
[1] Intégration numérique et éléments finis isoparamétriques pour les problèmes de coques. A paraître.

BUDIANSKY, B., SANDERS, J.L.,
[1] On the "best" first-order linear shell theory. Progr. in Appl. Mech. (W. PRAGER Anniversary Volume), pp. 129-140, Macmillan, New York, 1967.

CIARLET, P.G.,
[1] Numerical Analysis of the Finite Element Method. Presses de l'Université de Montréal, 1976.

[2] Numerical Analysis of the Finite Element Method for Elliptic Boundary Value Problems. North-Holland, 1977.

[3] Conforming finite element methods for the shell problem. Proc. of the "Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Brunel University, April 07-10, (1975).

COSSERAT, E., et F.
[1] Théorie des Corps Déformables. Hermann, Paris, 1909.

COUTRIS, N.,
[1] Flexions élastique et élastoplastique d'une coque mince. Journal de Mécanique 12 (1973), 463-475.

DUVAUT, G., LIONS, J.L.,
[1] Les Inéquations en Mécanique et en Physique. Dunod, Paris, 1972.

GORDEZIANI, D.G.,
[1] On the solvability of some boundary value problems for a variant of the theory of thin shells. Dokl. Akad. Nauk SSSR 215 (1974), traduit dans Soviet Math. Dokl. 15 (1974), 677-680.

GOUYON, R.,
[1] Calcul Tensoriel. Vuibert, Paris, 1963.

GREEN, A.E., ZERNA, W.,
[1] Theoretical Elasticity. Oxford University Press, 2nd Edition, 1968.

HLAVÁČEK, I., NEČAS, J.
[1] On inequalities of Korn's type I and II. Arch. Rational Mech. Anal. 36 (1970), 305-334.

HORMANDER, L.
[1] Linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin 1964.

KOITER, W.T.,
[1] On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B 69 (1966), 1-54.

[2] On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B 73 (1970), 169-195.

KOITER, W.T., SIMMONDS, J.G.,
[1] Foundations of shell theory. Proceedings of Thirteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. MOSCOW, AUGUST 1972, pp. 150-176. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

LELONG-FERRAND, J.,
[1] Géométrie Différentielle. Masson, Paris, 1963.

LICHNEROWICZ, A.,
[1] Eléments de Calcul Tensoriel. Armand Colin, Paris, 1967 (8ème édition).

LIONS, J.L., MAGENES, E.,
[1] Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Paris, 1968 (Volume 1).

NAGHDI, P.M.,
[1] Foundations of elastic shell theory. Progress in Solid Mechanics, vol. 4, pp. 1-90. North-Holland, Amsterdam, 1963.

[2] The theory of Shells and Plates. Handbuch der physik, vol. VI a-2, pp. 425-640, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

NEČAS, J.
[1] Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Masson, Paris, 1967.

NOVOZHILOV, V.V.,
[1] Thin Shell Theory. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1970.

ROUGEE, P.,
[1] Equilibre des Coques Elastiques Minces Inhomogènes en Théorie non Linéaire. Thèse, Université de Paris, 1969.

SANDERS, J.L.,
[1] An improved first-approximation theory for thin shells. NASA Report, 24 (1959).

SCHWARTZ, L.,
[1] Théorie des Distributions. Hermann, Paris, 1966.

SHOIKHET, B.A.,
[1] On existence theorems in linear shell theory PMM 38 (1974), 567-571. Traduit en anglais dans Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 38, (1974), 527-531.

VALIRON, G.
[1] Equations Fonctionnelles, Applications. Masson, Paris, 1950 (2ème édition).

VEKUA, I.N.,
[1] Theory of thin shallow shells of variable thickness. Akad. Nauk Gruzin. SSR Trudy Tbilissi Mat. Inst. Razmadze 30 (1965), 3-103 (Russian).

YOSIDA, K.,
[1] Functional Analysis. Grundleheren B. 123, Springer, Berlin, 1968 (2ème edition).