

J. C. NEDELEC

**Calcul par éléments finis des courants de Foucault sur
une surface conductrice de R^3**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-24

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__S5_A12_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSUMÉ

Nous étudions les courants de Foucault sur une conductrice mince dans \mathbb{R}^3 .

Nous supposons que ces courants sont créés par (différence de potentiel ou courant imposé) périodique aléatoire. Nous écrirons, alors, les équations des courants en utilisant la circulation surfacique du courant qui est un vecteur complexe tangent à la surface.

Nous montrons, d'abord, que ces équations intégrales ont une solution unique. Nous introduisons, ensuite, un schéma numérique sur une surface approchée, construits par éléments finis.

Nous étudions l'erreur d'approximation de cette méthode. Des simulations numériques ont été réalisées et comparés à des résultats de référence. Nous renvoyons, pour ces résultats, à NEDELEC-VERITE [1].

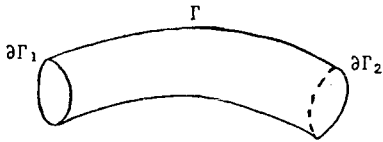
PAR ÉLÉMENTS FINIS DES COURANTS DE FOUCAULT

SUR UNE SURFACE CONDUCTRICE DE \mathbb{R}^3 ,

par J.C. NEDELEC

EN DU PROBLÈME PHYSIQUE ET FORMULATION VARIATIONNELLE.

étudions les courants dans un conducteur mince que nous
 une surface Γ de \mathbb{R}^3 . Nous supposons que cette surface est
 un cylindre, c'est-à-dire qu'elle comporte une seule nappe
 x trous. Nous noterons $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ les courbes fermées
 et les bords de ces trous.



étudions le cas de courants alternatifs, de période ω .
 du problème sont, alors, d'une part, le courant surfacique J ,
 vecteur complexe tangent à la surface Γ , et, d'autre part, le
 scalaire V , qui est une fonction complexe définie dans l'espace \mathbb{R}^3 .
 nous négligeons certains effets relativistes, nous pouvons
 le courant J est conservatif sur la surface Γ , ce que nous
 par l'équation

$$\text{div } J = 0.$$

équation de Maxwell s'écrit, dans l'espace \mathbb{R}^3 ,

$$J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} dy = -\text{grad } V,$$

la résistivité surfacique du conducteur, μ , la perméabilité
 et c , la vitesse de la lumière.

conditions aux limites, sur les bords des trous, sont de deux
 en, le potentiel V est imposé sur $\partial\Gamma$ (et il est facile de voir
 que intervient la différence de potentiel entre $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$),
 Flux de courant sortant est imposé (i.e. $J \cdot n$, où n est la
 Γ dans le plan tangent à Γ).

Remarque 1 : Nous pourrions considérer le cas d'une su
 nappes et à plus de deux trous, avec les conditions aux
 types qui peuvent être mixtes. C'est dans le souci de cl
 que nous avons considéré le cas le plus simple.

Nous allons préciser les équations (1.1) et (1.2)
 d'abord, la surface Γ . Elle est définie par la donnée
 de cartes qui sont des applications bijectives ϕ_i d'u
 sur une partie Γ_i de \mathbb{R}^3 :

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \theta_i \rightarrow \phi_i(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} x_i(\xi_1, \xi_2) \\ y_i(\xi_1, \xi_2) \\ z_i(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

telles que les applications ϕ_i soient suffisamment rég
 que les vecteurs tangents

$$e_1 = \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1}, \quad e_2 = \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2}$$

soient non co-linéaires. Nous noterons e_3 le vecteur no
 de longueur 1. D'autre part, les applications $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$
 et régulières de l'ensemble $\phi_j^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$ sur $\phi_i^{-1}(\Gamma_i \cap \Gamma_j)$.

Les bords $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ sont alors des cour
 surface Γ , dont les images par les cartes ϕ_i^{-1} sont des
 de \mathbb{R}^2 .

Nous supposons, afin de construire une triangul
 pouvons trouver, dans chaque domaine θ_i , un fermé D_i
 que

$$\bigcup_{i=1}^p \phi_i(D_i) = \Gamma$$

$\phi_i(D_i) \cap \phi_j(D_j) ; i \neq j ;$ est une courbe

vecteurs e_1, e_2 , nous permettent de définir la première forme de la surface par

$$= e_i \cdot e_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2,$$

le produit scalaire euclidien de R^3 , et également, le produit scalaire hermitien de C^3).

La matrice inverse sera notée par g^{ij} . Les vecteurs

$$= g^{ij} e_j \quad (\text{convention de sommation de l'indice répété})$$

forment la base duale de la base (e_1, e_2) du plan tangent.

D'après cela, on voit que l'élément d'aire $d\gamma$ sur la surface Γ est

$$d\gamma = \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2$$

$$g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = \det(g_{ij}).$$

Un vecteur complexe J , tangent à Γ , sera alors repéré, soit par ses coordonnées complexes dans la base e_1, e_2 , notées J^1, J^2 (coordonnées contravariantes), soit par ses coordonnées dans la base duale (coordonnées covariantes), notées J_1, J_2 . Nous avons donc :

$$\begin{aligned} J_i &= g_{ij} J^j \\ J^i &= g^{ij} J_j. \end{aligned}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs J et K , définis au même point, sera

$$g_{ij} J^i \bar{K}^j = J^i \bar{K}_i = J_i \bar{K}^i = g^{ij} J_i \bar{K}_j.$$

Nous noterons par

$$|J| = (J \cdot J)^{1/2}$$

la norme hermitienne de J .

Nous définissons le gradient d'une fonction φ comme le vecteur X de coordonnées co-variantes :

$$X_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i}.$$

Le rotationnel d'une fonction φ , définie sur Γ , est le vecteur X de coordonnées contra-variantes (noté $\text{rot } \varphi$)

$$X^1 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2}, \quad X^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^1}.$$

La divergence d'un vecteur J sera la fonction scalaire

$$\text{div } J = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} J^i).$$

Le rotationnel du vecteur X sera la fonction scalaire

$$\text{rot } X = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi^1} - \frac{\partial X_1}{\partial \xi^2} \right).$$

On vérifie, alors, facilement que

$$|\text{grad } \varphi|^2 = g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^j} = |\text{rot } \varphi|^2.$$

On définit aussi le laplacien qui est la fonction scalaire

$$\Delta \varphi = \text{div grad } \varphi = \text{rot rot } \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^i} \right).$$

Nous avons les propriétés suivantes :

1.1 : Soit J un vecteur tangent à Γ , et φ une fonction définie sur Γ tels que $J \in H^1(\Gamma)$, et $\varphi \in H^1(\Gamma)$, nous avons :

$$\int_{\Gamma} \text{div } J \, d\gamma + \int_{\Gamma} J \cdot \text{grad } \varphi \, d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \bar{\varphi} J \cdot n \, ds ;$$

$$\int_{\Gamma} \text{rot } \varphi \, d\gamma + \int_{\Gamma} \bar{\varphi} \text{rot } J \, d\gamma = \int_{\partial\Gamma} \bar{\varphi} J \cdot t \, ds ,$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Gamma$ dans le plan tangent à Γ , et t est la tangente orientée à $\partial\Gamma$.

Démonstration : Les égalités (1.3) et (1.4) sont des cas particuliers de la formule générale de Stokes pour des formes différentielles extérieures sur une variété (Cf Mme LELONG-FERRAND [2]) ;

$$\int_{\Gamma} d\omega = \int_{\partial\Gamma} \omega$$

où d désigne la différentielle extérieure de la forme ω . Nous obtenons en choisissant :

$$\omega = \bar{\varphi} \sqrt{g} \, (-J^2 \, d\xi^1 + J^1 \, d\xi^2)$$

$$\omega = \bar{\varphi} \text{div } J \cdot \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 + J^i \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi^i} \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 .$$

Il reste à vérifier que les coordonnées co-variantes du vecteur normal extérieur à Γ dans le plan tangent, sont :

$$n_1 = -\sqrt{g} \frac{d\xi^1}{ds} ; \quad n_2 = \sqrt{g} \frac{d\xi^2}{ds} .$$

Nous obtenons (1.4) en choisissant

$$\omega = \bar{\varphi} (J_1 \, d\xi^1 + J_2 \, d\xi^2) ;$$

$$\omega = \bar{\varphi} \text{rot } J \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 + J \cdot \text{rot } \varphi \sqrt{g} \, d\xi^1 \, d\xi^2 .$$

Il reste alors à vérifier que le vecteur dont les coordonnées $\frac{d\xi^1}{ds}, \frac{d\xi^2}{ds}$, est bien le vecteur unitaire tangent à Γ l'orientation étant fixée par le sens de parcours choisi.

PROPOSITION 1.2 : Soient J et X , deux vecteurs tangents à Γ . Les équivalences

$$(1.5) \quad \text{div } J = 0 \quad \text{et} \quad J \in L^2(\Gamma) \iff J = \text{rot } \varphi + \lambda J_0$$

avec $\varphi \in H^1(\Gamma)$ et $J_0 \in L^2(\Gamma)$, $\text{div } J_0 = 0$ et $\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds = 0$

$$(1.6) \quad \text{rot } X = 0 \quad \text{et} \quad X \in L^2(\Gamma) \iff X = \text{grad } V + \lambda X_0$$

avec $V \in H^1(\Gamma)$ et $X_0 \in L^2(\Gamma)$, $\text{rot } X_0 = 0$ et $\int_{\partial\Gamma_1} X_0 \cdot t \, ds = 0$

(φ et V sont uniques à une constante près si J_0 et X_0 sont nulles)

Démonstration : En choisissant $\lambda = \int_{\partial\Gamma_1} J \cdot n \, ds$, nous obtenons que

$$\int_{\partial\Gamma_1} (J - \lambda J_0) \cdot n \, ds = \int_{\partial\Gamma_2} (J - \lambda J_0) \cdot n \, ds = 0$$

L'équivalence (1.5) est alors une conséquence du théorème de Helmholtz.

L'équivalence (1.6) est analogue.

Remarque 2 : Si nous imposons $J \cdot n = 0$ sur une partie de $\partial\Gamma$, par exemple, nous obtenons une proposition analogue en remplaçant $\int_{\partial\Gamma_1} J \cdot n \, ds$ par $\int_{\partial\Gamma_1} \varphi \, ds = 0$.

Nous pouvons, maintenant, donner la formulation de l'équation (1.2). Soit H l'espace de Hilbert suivant

$$H = \left\{ K \in L^2(\Gamma) ; K \text{ tangent à } \Gamma, \text{div } K = 0 \right\}$$

Le courant J sera alors solution de (nous notons x et y des courants de Γ)

trouver $J \in H$ tel que

$$\frac{1}{\sigma} J \cdot K \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J(x) \cdot K(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = - \int_{\partial\Gamma} V_0 \, n \cdot K \, ds, \quad \forall K \in H.$$

La fonction V_0 est le potentiel imposé sur $\partial\Gamma$. Si nous choisissons J_0 régulier, avec

$$\operatorname{div} J_0 = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds = 1,$$

alors la formulation équivalente (d'après la proposition (1.2)) :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\operatorname{rot} \psi + \nu J_0) \cdot (\operatorname{rot} \psi + \nu J_0) \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{(\operatorname{rot} \psi + \nu J_0)(x) \cdot (\operatorname{rot} \psi + \nu J_0)(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y \\ & = - \int_{\partial\Gamma} V_0 \, n \cdot (\operatorname{rot} \psi + \nu J_0) \, ds, \quad \forall \psi \in H^1(\Gamma), \quad \nu \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 : Si $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$, le problème (1.7) (et donc le problème (1.8)) admet une solution unique dans $L^2(\Gamma)$, et si de plus $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$, alors la solution est dans $H^1(\Gamma)$ (donc ψ est dans $H^2(\Gamma)$ si $J_0 \in H^1(\Gamma)$).

Démonstration : Si nous notons $a(J, K)$ la forme sesquilinéaire du premier membre de (1.7), nous savons que

$$|a(J, K)| \leq M \|J\|_{L^2(\Gamma)} \|K\|_{L^2(\Gamma)};$$

d'autre part,

$$\operatorname{Re} a(J, J) = \frac{1}{\sigma} \|J\|_{L^2(\Gamma)}^2;$$

Le théorème de Lax-Milgram, appliqué dans l'espace H , nous garantit l'existence et l'unicité de J . Il suffit de vérifier que $a(\cdot, \cdot)$ est une forme linéaire continue sur l'espace H , ce qui est évident. $V_0 \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$ d'après le théorème de trace ($n \cdot K \in H^{-1/2}(\partial\Gamma)$).

Il en résulte, d'après NEDELEC-PLANCHARD [3], que la solution est vectorielle

$$\psi(y) = \int_{\Gamma} \frac{J(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x$$

est dans l'espace $H^1(\Gamma)$ (c'est encore l'intégrale sur un domaine régulier portant Γ du prolongement de J par zéro à l'extérieur).

Désignons par $P \psi(y)$, la projection du vecteur $\psi(y)$ sur le plan tangent en y à la surface Γ . Alors $P \psi(y)$ est aussi dans $H^1(\Gamma)$. Vérifions (en utilisant (1.4)) que

$$\frac{1}{\sigma} \Delta \psi = - \frac{\lambda}{\sigma} \operatorname{rot} J_0 - \frac{i\omega\mu}{c^2} \operatorname{rot} P \psi;$$

et (en utilisant la formule $\operatorname{grad} \varphi \cdot n = \operatorname{rot} \varphi \cdot t$) que

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial V_0}{\partial s} - \frac{\lambda}{\sigma} J_0 \cdot t - \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi \cdot t$$

Donc, si $V_0 \in H^{3/2}(\partial\Gamma)$, on voit que

$$\begin{cases} \Delta \varphi \in L^2(\Gamma) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \in H^{1/2}(\partial\Gamma) \end{cases},$$

ce qui entraîne

$$\varphi \in H^2(\Gamma),$$

par un résultat de régularité classique.

En ré-utilisant le même argument, on pourrait montrer que $\tilde{V} \in C^1(\Gamma)$ ($\epsilon > 0$), et en déduire une régularité correspondante pour V . A cause du terme en ψ , il semble donc que la régularité maximale soit $H^{3/2-\epsilon}(\Gamma)$ pour tout ϵ positif.

La fonction φ dépend du choix de J_0 , mais est unique pour

1.1 : Si $V_0 \in H^{3/2}(\Gamma)$, alors il existe une fonction V unique dans $H^1(\Omega)$, telle que :

$$\frac{1}{\sigma} J(x) + \frac{i\omega\mu}{c^2} P_x \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y = -\text{grad } V$$

$$V|_{\partial\Gamma} = V_0,$$

est la projection des vecteurs de R^3 sur le plan tangent à Γ , en x .

1.2 : Soit V_0 une fonction définie sur Γ , dont la trace sur $\partial\Omega$ est V_0 . Nous avons, d'après (1.3),

$$\int_{\partial\Gamma} V_0 n \cdot K ds = \int_{\Gamma} \text{grad } V_0 \cdot K d\gamma.$$

Posons

$$P \psi(x) = P_x \int_{\Gamma} \frac{J(y)}{|x-y|} d\gamma_y,$$

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot K d\gamma = 0, \forall K \in H.$$

En choisissant $K = \vec{\text{rot}} \varphi$, et en utilisant (1.4), nous

$$-\int_{\Gamma} \text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot \vec{\text{rot}} \varphi d\gamma + \int_{\partial\Gamma} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi \right) \cdot \vec{\text{rot}} \varphi d\gamma = 0$$

Nous choisissons alors, successivement, $\varphi \in H_0^1(\Gamma)$, d'où

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot t = 0,$$

puis $\varphi \in H^1(\Gamma)$,

$$\left(\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 \right) \cdot t = 0.$$

D'où, d'après (1.6),

$$\frac{1}{\sigma} J + \frac{i\omega\mu}{c^2} P \psi + \text{grad } V_0 = -\text{grad } V.$$

En choisissant alors φ avec

$$\varphi|_{\partial\Gamma_1} = 1, \quad \varphi|_{\partial\Gamma_2} = 0,$$

nous voyons que $v = 0$. Nous avons aussi

$$\text{grad } V \cdot t = 0.$$

Nous pouvons donc choisir V constant sur $\partial\Gamma_1$ et sur $\partial\Gamma_2$ (V_1 et V_2 désignent les valeurs constantes de V sur $\partial\Gamma_1$ et $\partial\Gamma_2$ respectivement)

$$0 = \int_{\Gamma} \text{grad } V \cdot J_0 ds = \int_{\partial\Gamma} V J_0 \cdot n ds = \int_{\partial\Gamma_1} V_1 J_0 \cdot n ds - \int_{\partial\Gamma_2} V_2 J_0 \cdot n ds$$

Nous pouvons donc choisir V dans $H_0^1(\Omega)$. La fonction V est alors à (1.11).

APPROXIMATION PAR ÉLÉMENTS FINIS.

Afin d'approcher la solution du problème (1.7), nous allons d'abord, une surface Γ_h , puis un espace H_h de vecteurs J_h qui approchent respectivement Γ et H .

Pour chaque domaine polyédrique D_i , nous construisons une triangulation T_{hi} (par des triangles dont le diamètre maximal est noté h et la classique condition des angles $\theta \geq \theta_0 > 0$, θ_0 indépendant de h).

Soit alors ϕ_{ih} , l'interpolé affine de l'application ϕ_i , définie par

$$\phi_{ih}(a) = \phi_i(a), \text{ pour tout sommet } a \text{ de } T_{hi};$$

ϕ_{ih} est affine sur chaque triangle de T_{hi} .

Soit F_T la restriction de l'application ϕ_{ih} à un triangle T de

Γ_h . L'image de D_i par ϕ_{ih} est alors (pour h assez petit au moins)

une surface Γ_{ih} continue, formée de triangles plats, dont les sommets sont

$$\phi_i(a), \quad a \in S_i.$$

Nous supposons les triangulations T_{hi} compatibles entre elles :

soit des triangulations Γ_{ih} et Γ_{jh} ($i \neq j$), situés sur les courbes

qui ont des sommets communs. Alors, l'union des Γ_{ih} forme une surface Γ_h qui

est homéomorphe à Γ , dont les cartes sont les applications ϕ_{ih} , qui sont

affines pour h assez petit.

Les courants approchés seront des vecteurs complexes constants

sur chaque triangle de Γ_h , vérifiant, de plus, la condition d'égalité

sur un côté commun à deux triangles T_1 et T_2 (normales n_1 et n_2

orientées dans T_1 et T_2 , respectivement)

$$J_1 \cdot n_1 + J_2 \cdot n_2 = 0.$$

Soit H_h cet espace vectoriel.

Le problème approché est alors :

$$(2.2) \quad \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot K_h \, d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot K_h(y)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y = - \int_{\partial\Gamma_h} v_{0h} \, ds$$

Soit J_{0h} dans l'espace H_h tel que

$$\int_{\partial\Gamma_{h1}} J_{0h} \cdot n \, ds = 1.$$

Nous avons alors la

PROPOSITION 2.1 :

$$J_h \in H_h \iff J_h = \lambda J_{0h} + \text{rot } \varphi_h$$

$$\varphi_h \in \hat{\phi}_h$$

$$\varphi_h = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Gamma_h) \right\}, \quad \varphi_h|_T \in P_1; \quad \forall T \subset \Gamma_h$$

Démonstration : Choisissons λ tel que

$$(2.3) \quad \int_{\partial\Gamma_{h1}} (J_h \cdot n - \lambda J_{0h} \cdot n) \, ds = \int_{\partial\Gamma_{h2}} (J_h \cdot n - \lambda J_{0h} \cdot n) \, ds$$

Alors, sur chaque facette T de Γ_h , φ_h est défini à

une constante près (dans les coordonnées locales de cette facette, J_h est

constant). La condition de raccord (2.1) de J_h sur

deux triangles T_1 et T_2 montre alors que l'on peut

choisir φ_h de telle sorte que $\varphi_h|_{T_1} = \varphi_h|_{T_2}$ sur le côté commun

à ces deux triangles. On peut alors définir φ_h sur toute la surface Γ_h de

façon continue, et la condition (2.3) montre que cette

fonction φ_h est globalement continue.

Réciproquement, la continuité de φ_h entraîne

us avons, d'après la proposition 2.1, une formulation équivalente (2.2), qui est

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_h} (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h}) d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{(\text{rot } \varphi_h + \lambda J_{0h})(x) \cdot (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h})(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y \\ & - \int_{\partial\Gamma_h} \nu_{0h} \cdot n \cdot (\text{rot } \psi_h + \nu J_{0h}) ds, \quad \forall \nu \in c, \quad \varphi_h \in \psi_h. \end{aligned} \quad (2.7)$$

in d'étudier l'erreur d'approximation, nous allons comparer, au un vecteur \tilde{J}_h lié à J_h de la façon suivante : un vecteur J_h H_h sera réperé par ses coordonnées contra-variantes dans les es mobiles associés aux différentes cartes ϕ_{hi} . Nous pouvons er, au champ de vecteurs $J_h|_{\Gamma_{hi}}$, le champ de vecteurs \hat{J}_{hi} D_i de coordonnées co-variantes ($\sqrt{g_h}$ est l'élément d'aire sur Γ_h) :

$$\begin{aligned} \hat{J}_{hi1}|_T &= J_h^1 \sqrt{g_h} \\ \hat{J}_{hi2}|_T &= J_h^2 \sqrt{g_h}. \end{aligned}$$

ropriété (2.1) nous permet de vérifier que \hat{J}_{hi} est un champ de ivergence nulle dans $L^2(D_i)$. (Si T_1 et T_2 sont deux triangles D_i , et \vec{n} la normale au côté commun, on a encore

$$(\hat{J}_{h|T_1} - \hat{J}_{h|T_2}) \cdot n = 0.$$

fin, nous définissons le champ de vecteurs \tilde{J}_h sur Γ comme le teurs dont les coordonnées contra-variantes, dans les axes associés ϕ_i , sont :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_h^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{J}_{h1} \\ \tilde{J}_h^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \hat{J}_{h2}. \end{aligned}$$

Nous vérifions alors que \tilde{J}_h est un champ de vecteurs. Nous avons le lemme suivant :

LEMME 2.1 : Soit a la forme sesquilinéaire du premier membre de (2.1), a_h la forme sesquilinéaire du premier membre de (2.1),

$$|a_h(J_h, K_h) - a(\tilde{J}_h, \tilde{K}_h)| \leq c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)}$$

Démonstration :

$$a_h(J_h, K_h) = \int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot K_h d\gamma_h + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot K_h(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y$$

Nous transformons les intégrales sur Γ_h en intégrales sur D_i par les applications $\phi_i \circ \phi_{hi}^{-1}$. D'où

$$a_h(J_h, K_h) = \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} J_h(x_h) \cdot K_h(x_h) \sqrt{\frac{g_{hi}}{g}} d\gamma + \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J_h(x_h) \cdot K_h(y_h)}{|x_h - y_h|} d\gamma_x d\gamma_y$$

avec

$$\begin{aligned} x &= \phi_i \circ \phi_{hi}^{-1}(x_h) \quad , \quad \text{si } x \in \Gamma_i \\ y &= \phi_j \circ \phi_{hi}^{-1}(y_h) \quad , \quad \text{si } y \in \Gamma_j. \end{aligned}$$

Comparons, maintenant, $J_h(x_h)$ et $\tilde{J}_h(x)$:

$$\begin{aligned} J_h(x_h) &= J_h^1 \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^1} + J_h^2 \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^2} \\ \tilde{J}_h(x) &= \sqrt{\frac{g_{hi}(x_h)}{g(x)}} \left(J_h^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^1} + J_h^2 \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^2} \right) \end{aligned}$$

Mais nous savons que

$$\left| \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi^1} - \frac{\partial \phi_{hi}}{\partial \xi^1} \right| \leq c h \max_{x \in D_i} |D^2 \phi_i(\xi)|$$

duisons

$$\left| \sqrt{\frac{g_h(x_h)}{g(x)}} - 1 \right| \leq c h .$$

$\phi_{hi}^{-1}(x_h)$

$$|J_h(x_h) - \tilde{J}_h(x)| \leq c h |\tilde{J}_h| .$$

duisons

$$\left| \int_{\Gamma} K_h(x_h) \sqrt{\frac{g_h}{g}} d\gamma - \int_{\Gamma} \frac{1}{\sigma} \tilde{J}_h(x) \cdot \tilde{K}_h(x) d\gamma \right| \leq c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

comparons, maintenant, le second terme de a_h au second membre de a .

une erreur supplémentaire, due au terme

$$\left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_h-y_h|} \right| = \frac{||x-y| - |x_h-y_h||}{|x_h-y_h| |x-y|} \leq \frac{|x-y-x_h+y_h|}{|x_h-y_h| |x-y|} .$$

ons alors deux cas :

$$|x-y| \geq c h ,$$

$$|x-x_h| \leq c h^2 \quad (\text{car } |\phi_i - \phi_{hi}| \leq c h^2) ,$$

ons (2.9) par $\frac{c h}{|x-y|}$;

$$|x-y| \leq c h ,$$

s pouvons considérer que, dans un voisinage de $\xi = \phi_i^{-1}(x)$,

ξ) est une fonction lipschitzienne à dérivée bornée par $c h$.

$$|x_h - (y - y_h)| \leq c h |x - y| \quad (\Rightarrow |x - y| \leq c |x_h - y_h|) .$$

D'où, dans les deux cas,

$$\left| \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x_h-y_h|} \right| \leq \frac{c h}{|x-y|} .$$

Nous en déduisons une majoration :

$$\left| \iint_{\Gamma_h \times \Gamma_h} \frac{J_h(x_h) \cdot K_h(y_h)}{|x_h - y_h|} d\gamma_x d\gamma_y - \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{\tilde{J}_h(x) \cdot \tilde{K}_h(y)}{|x - y|} d\gamma_x d\gamma_y \right| \leq c h$$

En utilisant, alors, NEDELEC-PLANCHARD [3], nous savons

est majoré par

$$c h |\tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} |\tilde{K}_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

Utilisant cette majoration et (2.8), nous en déduisons (2)

THEOREME 2.1 : Nous supposons connus $J_0 \in H^1(\Gamma)$ et J_{0h}

(2.10)

$$|J_0 - \tilde{J}_{0h}|_{L^2(\Gamma)} \leq c h ;$$

alors, nous avons la majoration d'erreur

(2.11)

$$|J - \tilde{J}_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c \left[h |J|_{H^1(\Gamma)} + |v_0 - \tilde{v}_{0h}|_{H^{1/2}(\Gamma)} \right]$$

où $\tilde{v}_{0h}(x) = v_{0h}(x_h)$, $\phi_i^{-1}(x) = \phi_{ih}^{-1}(x_h)$.

Démonstration : Soit J_0 dans $H^1(\Gamma)$, choisi tel que

$$\int_{\partial\Gamma_1} J_0 \cdot n \, ds = 1 .$$

Nous supposons connu J_{0h} dans H_h tel que

$$|J_0 - \tilde{J}_{0h}|_{L^2(\Gamma)} \leq c h .$$

ès la proposition 1.2, pour $J \in H^1(\Gamma)$, il existe $\varphi \in H^2(\Gamma)$,

$$J = \lambda J_0 + \text{rot } \varphi .$$

définir, sur Γ_h , l'interpolé φ_h de φ , tel que

$$\begin{aligned} \varphi_h(a) &= \varphi(a) \text{ , pour tout sommet d'un triangle de } \Gamma_h ; \\ \varphi_h &\text{ affine sur chaque triangle de } \Gamma_h . \end{aligned}$$

$\pi_h J$ l'interpolé de J défini sur Γ_h par

$$\pi_h J = \lambda J_{0h} + \text{rot } \varphi_h .$$

maintenant, la quantité

$$a(J_h - \pi_h J, J_h - \pi_h J) .$$

$$a(J_h - \pi_h J) = -a(J, J_h - \pi_h J) + a(J - \pi_h J, J_h - \pi_h J) + a(J_h, J_h - \pi_h J) - a_h(J_h, J_h - \pi_h J) + a_h(J_h, J_h - \pi_h J)$$

es (1.10) et (2.7),

$$c \left[|J - \pi_h J|_{L^2(\Gamma)} |J_h - \pi_h J|_{L^2(\Gamma)} + h |J_h|_{L^2(\Gamma)} |J_h - \pi_h J|_{L^2(\Gamma)} + a_h(J_h, J_h - \pi_h J) - a(J, J_h - \pi_h J) \right]$$

aisons

$$c \left[|J - \pi_h J|_{L^2(\Gamma)} + h |J_h|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{K_h \in \mathbb{H}_h} \frac{|a_h(J_h, K_h) - a(J, K_h)|}{|K_h|_{L^2(\Gamma)}} \right] .$$

successivement, les trois termes du second membre. L'erreur

tion, d'abord ;

Soit $J \in H^1(\Gamma)$, nous avons .

$$|J - \pi_h J|_{L^2(\Gamma)} \leq c h |J|_{H^1(\Gamma)} .$$

Démonstration : Il nous faut évaluer

$$\text{rot } \varphi - \text{rot } \varphi_h .$$

Mais, on vérifie, en utilisant les définitions de $\text{rot } \varphi$ que

$$\text{rot } \varphi_h = \text{rot } \tilde{\varphi}_h ; \quad \tilde{\varphi}_h(x) = \varphi_h(x_h) ; \quad x = \phi_i \circ \dots$$

Soit, maintenant, $\hat{\varphi}|_T = \varphi \circ \phi_i^{-1}$:

$$\hat{\varphi}_h|_T = \varphi_h \circ F_T^{-1} ;$$

alors, par construction de la triangulation et de φ_h , $\hat{\varphi}_h$ est l'interpolé affine de $\hat{\varphi}$ sur T . Donc, d'après le c Bramble-Hilbert, nous avons

$$|\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_h|_{H^1(T)} \leq c h |\hat{\varphi}|_{H^2(T)} .$$

Par retour à Γ , nous en déduisons

$$|\varphi - \varphi_h|_{H^1(\Gamma)} \leq c h |\varphi|_{H^2(\Gamma)} .$$

D'où, en particulier,

$$|\text{rot } \varphi - \text{rot } \varphi_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c h |\varphi|_{H^2(\Gamma)} .$$

D'où le lemme, en utilisant (2.11) et la proposition 1.2.

Considérons, maintenant, le second terme de (2.11) que $|J_h|_{L^2(\Gamma)}$ est borné, il suffit de montrer que $|J_h|_{L^2(\Gamma)}$ Mais, nous avons

$$R e a_h(J_h, J_h) = \frac{1}{\sigma} \int_{\Gamma_h} |J_h(x)|^2 dx = \int_{\partial \Gamma_h} v_{0h} n_h$$

ns que, dans le changement de variable,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \phi_i \circ \phi_{ih}^{-1}(x_h) ; \\ n_h \cdot J_h \, ds_h &= n \cdot \tilde{J}_h \, ds ; \end{aligned}$$

$$V_{0h} n_h \cdot J_h \, ds_h = \int_{\partial\Gamma} \tilde{V}_{0h} n \cdot \tilde{J}_h \, ds ,$$

$$\tilde{V}_{0h} = V_{0h} \circ F_{ih} \circ \phi_i^{-1} .$$

utilisons la continuité dans $H^{-1/2}(\partial\Gamma)$ de la trace $n \cdot \tilde{J}_h$

$$|J_h|_{L^2(\Gamma)} \leq c |V_{0h}|_{H^{-1/2}(\partial\Gamma)} .$$

nous reste à évaluer le dernier terme de l'erreur dans (2.12) ;

$$(J_h, K_h) - a(J, K_h) = \int_{\partial\Gamma} (\tilde{V}_{0h} - V_0) n \cdot \tilde{K}_h \, ds .$$

isant à nouveau la continuité de l'application trace,

$$(J_h, K_h) - a(J, K_h) \leq c |V_{0h} - V_0|_{H^{-1/2}(\partial\Gamma)} |K_h|_{L^2(\Gamma)} .$$

(2.11) est alors une conséquence de (2.12) et des majorations

Le choix de J_{0h} peut, éventuellement, se faire de la façon

t une coupure de Γ , c'est-à-dire une courbe S qui joint

Soit Γ' la surface coupée ainsi construite. Alors, il

$H^2(\Gamma')$ telle que

$$= \text{rot } \varphi_0 , \quad \varphi_0^+ - \varphi_0^- = \text{constante le long de } S ,$$

où φ_0^+ (resp. φ_0^-) désigne la valeur de φ_0 d'un côté

A cette coupure de Γ correspond une coupure de sommets de la triangulation sont bien choisis.

L'interpolé affine φ_{0h} de φ_0 sur Γ'_h véri

$$\varphi_{0h}^+ - \varphi_{0h}^- = \text{constante} .$$

Et alors

$$J_{0h} = \text{rot } \varphi_{0h}$$

vérifie l'inégalité (2.10) et appartient à l'espace H_h .

Nous allons indiquer, maintenant, une méthode p valeur approchée du potentiel scalaire V sur la surface d'abord que que nous avons

$$(2.14) \quad \int_{\Gamma} \text{grad } V \cdot \text{grad } V' \, d\gamma = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J(y) \cdot \text{grad } V'(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y$$

Nous considérons l'espace de fonctions approché

$$\phi_h^0 = \left\{ V_h \in C^0(\Gamma_h) ; V_h|_T \in P_1 ; \forall T \subset \Gamma_h , V_h|_T \right.$$

Nous définissons V_h comme solution de

$$(2.15) \quad \int_{\Gamma_h} \text{grad } V_h \cdot \text{grad } V'_h \, d\gamma = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(y) \cdot \text{grad } V'_h(x)}{|x-y|} \, d\gamma_x \, d\gamma_y$$

$$\forall V'_h \in H_0^1(\Gamma) , \quad V_h \in \phi_h , \quad V_h|_{\partial\Gamma_h} = V_{0h}$$

Il est facile de voir que V_h est ainsi défini de façon

Le théorème suivant donne l'erreur entre V et

$$\tilde{V}_h(x) = V_h \circ \phi_{ih}^{-1} \circ \phi_i(x) , \quad \forall x \in \phi_i(D_i) .$$

: Sous les hypothèses du théorème 2.1, et si nous supposons

v_{0h} est l'interpolé affine sur $\partial\Gamma_h$ de v_0 , nous avons

suivante :

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq c h$$

solution de (2.14) et v_h la solution de (2.15).

: Soit la forme bilinéaire

$$a(v, v') = \int_{\Gamma} \text{grad } v \cdot \text{grad } v' \, dy$$

$$a_h(v_h, v'_h) = \int_{\Gamma_h} \text{grad } v_h \cdot \text{grad } v'_h \, dy_h$$

enc, de façon analogue à (2.7),

$$|a_h(v_h, v'_h)| \leq c h |\text{grad } \tilde{v}_h|_{L^2(\Gamma)} |\text{grad } \tilde{v}'_h|_{L^2(\Gamma)}$$

et πv l'interpolé affine de v défini sur Γ_h . Nous remarquons

est l'interpolé affine de v_0 sur $\partial\Gamma$,

$$\pi v|_{\partial\Gamma_h} = v_{0h},$$

$$\pi v - v_h \in H_0^1(\Gamma_h).$$

ons, maintenant, successivement les termes :

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq |v - \pi v|_{H^1(\Gamma)} + |\pi v - \tilde{v}_h|_{H_0^1(\Gamma)}$$

$$|\pi v - \tilde{v}_h|_{H_0^1(\Gamma)}^2 \leq c |\text{grad}(\pi v - \tilde{v}_h)|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq c |a(\pi v - \tilde{v}_h, \pi v - \tilde{v}_h)|$$

$$\pi v - \tilde{v}_h = a(\pi v - v, \pi v - \tilde{v}_h) + a(v, \pi v - \tilde{v}_h) - a(\tilde{v}_h, \pi v - \tilde{v}_h),$$

d'où en regroupant les majorations et en utilisant (2.17)

$$|v - \tilde{v}_h|_{H^1(\Gamma)} \leq c |v - \pi v|_{H^1(\Gamma)} + c h |\text{grad } \tilde{v}_h|_{L^2(\Gamma)} + \sup_{\Gamma_h} \frac{a}{\phi_h}$$

$$a(v, \tilde{v}_h) - a_h(v_h, \tilde{v}_h) = - \frac{i\omega\mu}{c^2} \left[\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{J(y) \cdot \text{grad } \tilde{v}'_h(x)}{|x - y|} dy_x dy_y - \int_{\Gamma_h} \right]$$

Si nous transformons alors les intégrales sur Γ_h en int

il apparaît trois termes d'erreur, l'un que l'on majorer

$$c |J - J_h|_{L^2(\Gamma)} |\text{grad } \tilde{v}'_h|_{L^2(\Gamma)},$$

les deux autres, provenant de la géométrie, que l'on majo

$$c h |J_h|_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant, alors, le théorème 2.1, nous obtenons (2.16)

CONCLUSIONS

On va donner quelques indications sur la mise en oeuvre de la méthode pour laquelle nous renvoyons à NEDELEC-VERITE [1].

La formulation qui apparaît la plus commode est la formulation par éléments finis. Les fonctions de base en φ_h sont connues et à support "local". Par conséquent, le choix de la fonction de base J_{0h} est facile. Il faut faire attention au fait qu'il faut supprimer l'une des fonctions de base pour rendre l'espace Φ_h , car φ_h est défini à une constante près. (On fixe la valeur de φ_h en un noeud).

Le calcul des coefficients du système provenant de la partie

$$\int_{\Gamma_h} \frac{1}{\sigma} J_h \cdot J'_h \, dy$$

est un assemblage pour un opérateur elliptique et nous donne la partie réelle de la matrice. Le calcul des coefficients de la partie imaginaire

$$\frac{i\omega\mu}{c^2} \int_{\Gamma_h} \int_{\Gamma_h} \frac{J_h(x) \cdot J'_h(y)}{|x-y|} \, dy_x \, dy_y$$

en utilisant la primitive explicite de

$$\int_{\Gamma} \frac{dy_x}{|x-y|}$$

est donnée par une formule d'intégration numérique. Nous renvoyons à

la référence de DJAOUA [5], pour des précisions sur ces calculs de

l'introduction des éléments finis à divergence nulle utilisés ici, par RAVIART-THOMAS [6]. Il est possible d'utiliser des éléments finis d'ordre plus élevé. L'étude d'erreur est analogue. Mais alors, pour augmenter le degré d'approximation de la surface Γ et

les calculs des coefficients provenant de la partie intégrale de l'opérateur sont très compliqués. D'autre part, la solution n'est pas très régulière, au moins au voisinage du bord $\partial\Gamma$, le gain de précision réel serait faible.

Par ailleurs, nous renvoyons au petit ouvrage de R.L. STOLL pour une étude assez complète des équations et des propriétés de la méthode de Foucault.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.C. NEDELEC, J.C. VERITE, à paraître.
- [2] Mme LELONG-FERRAND, Géométrie Différentielle, Masson, Paris.
- [3] J.C. NEDELEC, J. PLANCHARD, Une méthode variationnelle des éléments finis pour la résolution numérique d'un problème de Dirichlet dans R^3 , R.A.I.R.O., 7 (1973), R3, 105-129.
- [4] J.C. NEDELEC, Curved finite elements method for the solution of integral equations on surfaces in R^3 , à paraître.
- [5] M. DJAOUA, Rapport Interne du Centre de Mathématiques A. Poincaré, Ecole Polytechnique, 91120 PALAISEAU.
- [6] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS, A mixed finite element method for elliptic problems.
- [7] R.L. STOLL, The analysis of Eddy currents, Clarendon Press, Oxford.