

B. MERCIER

**Régularisation, approximation et résolution du problème
des charges limites**

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5

« Journées « éléments finis » », , p. 1-30

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976____S5_A11_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DU PROBLÈME DES CHARGES LIMITES

B. MERCIER

Avril 1976

RESUMÉ

On définit le problème des charges limites dans un cadre général. On introduit un problème pénalisé, qui apparait comme le problème visco-plastique associé.

Le dual de ce problème est un problème aux vitesses, dont la résolution donne un moyen de détermination des charges limites.

On donne un procédé d'approximation par éléments finis pour de tels problèmes, et un résultat de convergence. On indique, enfin, un algorithme de résolution.

ABSTRACT

We consider a perfectly plastic structure subjected to a load L . We wish to determine whether the load L is admissible, i.e. whether the set of plastically stress fields, which equilibrate the load L , is non empty.

We show that this problem is equivalent to that of finding whether the solution of Bingham problem is exactly equal to zero. The interest of this remark is that this Bingham problem is regular and easy to solve numerically.

Then, we give a convergence result and some error estimates for the determination of the set of admissible loads, when the velocities are approximated by special piecewise linear finite elements, and we give some numerical results.

INTRODUCTION

On s'intéresse à un problème d'existence de solutions en plasticité parfaite. Etant donnée une charge L pour un milieu continu, existe-t-il un champ de contraintes σ plastiquement admissible, et qui soit en équilibre pour la charge L (statiquement admissible) ? [19].

Dans l'affirmative, on dira qu'une telle charge est *admissible*, et sinon, *excessive*. Le problème des charges limites est de déterminer l'ensemble C des charges admissibles [10].

On va montrer que la résolution du dual du problème initial, pénalisé dans un certain sens, (qui n'est autre qu'un problème de fluides de Bingham, si le critère de plasticité est celui de Von Misès) permet de donner des indications sur cet ensemble et de le déterminer de manière assez précise.

On donne un résultat d'existence dans le cas où le critère de plasticité ne porte que sur le déviateur (ce qui est le cas pour le critère de Von Misès). Il apparaît, alors, que le problème dual est soumis à une contrainte de divergence nulle.

On montre, dans un cadre d'approximation interne, un résultat de convergence de C_h vers C , où C_h est l'ensemble des charges admissibles du problème approché, et un résultat d'estimation d'erreur.

On introduit, ensuite, un élément fini P_1 à divergence nulle, qui est bien adapté à ce type de problèmes.

Pour cet élément, on obtient une estimation d'erreur en $O(\sqrt{h})$ pour la distance entre C et C_h , dans le cas d'un maillage uniforme.

C_h est une approximation de C par l'extérieur, c'est-à-dire que $C_h \supset C$, $\forall h$.

On donne, enfin, quelques résultats numériques, annoncés dans [16].

PLAN

- 1 - Position du problème.
- 2 - Régularisation et dualité.
- 3 - Cas d'un critère de plasticité ne portant que sur le déviateur.
- 4 - Caractérisation des charges admissibles.
- 5 - Approximation.
- 6 - Estimation d'erreur.
- 7 - Résultats numériques.

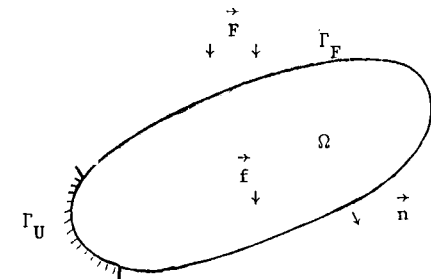


Figure 1 : Milieu continu Ω

1 - POSITION DU PROBLEME.

Considérons un milieu continu occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (Fig. 1). On suppose qu'il est soumis à des forces de masse f_i et à des forces de surface F_i sur une partie Γ_F de sa frontière. Sur l'autre partie Γ_U , on suppose qu'il est fixé.

Le tenseur des contraintes doit être en équilibre :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^M \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 & \text{dans } \Omega, \text{ pour } i = 1, \dots, N; \\ \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j = F_i & \text{sur } \Gamma_F, \text{ pour } i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

où $(n_i)_{1 \leq i \leq N}$ désignent les composantes du vecteur normal à la frontière de Ω (dirigé extérieurement).

Introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} V &= \left\{ v \in (H^1(\Omega))^N \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_U \right\}; \\ Y &= \left\{ \tau \mid \tau_{ij} \in L^2(\Omega); \tau_{ij} = \tau_{ji}; i, j = 1, \dots, N \right\}. \end{aligned}$$

V sera l'espace des champs de vitesses, et Y sera l'espace des champs de contraintes symétriques.

On définit l'opérateur des taux de déformation :

$$\begin{aligned} \epsilon : V &\rightarrow Y \\ v &\sim \epsilon(v) \quad \text{avec} \quad \epsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

On munit Y du produit scalaire

$$(\sigma, \tau) = \int \sum_{i,j} \sigma_{ij} \tau_{ij} dX.$$

et on note $\| \cdot \|$ la norme associée. On note enfin $\|v\|_V = \|\epsilon(v)\|$ la norme de V , qui est bien une norme sur V , d'après l'inégalité de Korn [6].

On appelle charge L , l'élément de V' (dual de V), tel que la puissance des forces extérieures pour un champ de vitesses $v \in V$ soit

$$(1.2) \quad L(v) = \int_{\Omega} f_i v_i dX + \int_{\Gamma_F} F_i v_i d\gamma.$$

THEOREME 1.1 : (des "puissances virtuelles").

Soit

$$M(L) = \left\{ \tau \in Y \mid (\tau, \epsilon(v)) = L(v), \forall v \in V \right\},$$

on a l'équivalence :

$$\sigma \text{ en équilibre (ou (1.1) vérifié)} \iff \sigma \in M(L).$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la formule de Green [6] :

$$(1.3) \quad (\sigma, \epsilon(v)) = \int_{\Gamma_F} \sum_{i,j=1}^N \sigma_{ij} n_j v_i d\gamma - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dX. \quad \square$$

On vérifie que $M(L)$ est une variété linéaire affine fermée de Y .

Critère de plasticité : On dira que σ est plastiquement admissible si

$$(1.4) \quad \sigma \in K = \left\{ \tau \in Y \mid f(\tau) \leq 0 \text{ p.p.} \right\},$$

où f est une fonction convexe de $\mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée critère de plasticité.

Exemple : Critère de Von Misès : On a

$$(1.5) \quad f(\sigma) = |\sigma^D| - g \quad \text{où } \sigma^D \text{ est le déviateur de } \sigma :$$

$$(1.6) \quad \sigma_{ij}^D \equiv \sigma_{ij} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_{kk} \right) \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{ tenseur de Kronecker})$$

et

$$|\tau| \equiv \sqrt{\sum_{i,j=1}^N \tau_{ij} \tau_{ij}} \quad \text{est la norme euclidienne de } \mathbb{R}^{N^2}. \quad \blacksquare$$

DEFINITION : On dira que L est charge admissible si et seulement si

$$K \cap M(L) \neq \emptyset,$$

et excessive dans le cas contraire.

Le problème des charges limites est donc de déterminer l'ensemble C des charges admissibles.

Remarquons que, plus généralement, on pourrait chercher à savoir si $K \cap M(L) \neq \emptyset$ dans d'autres situations, où V et Y seraient différents, ainsi que l'opérateur ε : c'est le cas, par exemple, pour les plaques.

LEMME 1.1 : C est convexe. [19].

En effet, soient L_1 et L_2 deux charges admissibles, alors $\exists \sigma_1, \sigma_2$

avec

$$\sigma_1 \in K \cap M(L_1) \quad \text{et} \quad \sigma_2 \in K \cap M(L_2);$$

visiblement, K étant convexe,

$$\alpha \sigma_1 + (1-\alpha) \sigma_2 \in K \cap M(\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2) \quad \text{pour } \alpha \in [0, 1],$$

et donc $\alpha L_1 + (1-\alpha) L_2$ est admissible. $\blacksquare$

2 - RÉGULARISATION ET DUALITÉ.

On va déduire des conséquences importantes de la remarque suivante :

Considérons le problème (pour $\mu > 0$)

$$(P) \quad \sup_{\sigma \in M(L)} - \frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2,$$

où P_K désigne l'opérateur de projection sur K . La quantité $\|\sigma - P_K(\sigma)\|$ est évidemment la distance de σ au convexe K , et le problème (P) est, en quelque sorte, le pénalisé du problème des charges limites.

On remarque alors que

$$L \text{ charge admissible} \iff \exists \sigma \text{ solution de } (P) \text{ et } \sup (P) = 0.$$

On ne sait pas, en général, si le problème (P) admet une solution, à moins que K ne soit borné, auquel cas (P) est visiblement coercif.

On va évaluer le problème dual de (P) :

THEOREME 2.1 : Le problème dual de (P) est :

$$(P^*) \quad \inf_{v \in V} \mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)) - L(v),$$

où j_K est la fonction d'appui du convexe K : $j_K(e) \equiv \sup_{\tau \in K} (e, \tau)$. Il admet toujours une solution que l'on appellera u .

Démonstration : On remarque, tout d'abord, que

$$\inf_{v \in V} [(\sigma, \varepsilon(v)) - L(v)] = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma \in M(L) \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

{P} peut donc s'écrire :

$$\sup_{\sigma \in Y} \inf_{v \in V} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) - L(v) \right].$$

Le problème dual est donc :

$$\inf_{v \in V} \sup_{\sigma \in Y} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) - L(v) \right].$$

Pour expliciter ce problème, on remarque que

$$\|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 = \inf_{e \in K} \|\sigma - e\|^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \sup_{\sigma \in Y} \left[-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 + (\sigma, \varepsilon(v)) \right] &= \sup_{\sigma \in Y} \sup_{e \in K} \left[(\sigma, \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|\sigma - e\|^2 \right] \\ &= \sup_{e \in K} \sup_{\sigma \in Y} \left[(\sigma, \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|\sigma - e\|^2 \right]. \end{aligned}$$

En permutant les deux "sup", ce qui est toujours licite; le "sup" en σ est atteint pour $\sigma = e + 2\mu \varepsilon(v)$, et vaut

$$(e + 2\mu \varepsilon(v), \varepsilon(v)) - \frac{1}{4\mu} \|2\mu \varepsilon(v)\|^2 = (e, \varepsilon(v)) + \mu \|\varepsilon(v)\|^2,$$

d'où, finalement, la valeur de l'expression (2.1) :

$$\mu \|\varepsilon(v)\|^2 + \sup_{e \in K} (e, \varepsilon(v)) = \mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)),$$

par définition de la fonction d'appui j_K du convexe K , d'où le résultat.

L'existence de la solution u est enfin une conséquence du fait que $\|\varepsilon(v)\|$ est une norme sur V . ■

Remarques :

1) Ce résultat est très général, et ne dépend pas du choix particulier que l'on a fait de l'opérateur ε .

2) Indiquons, brièvement, la dépendance de u en μ (μ apparaît comme une viscosité).

Appelons, momentanément, u_μ la solution du problème {P*} pour indiquer qu'elle dépend de μ ; u_μ est solution de l'inéquation variationnelle

$$(2.2) \quad \mu(\varepsilon(u_\mu), \varepsilon(v) - \varepsilon(u_\mu)) + j_K(\varepsilon(v)) - j_K(\varepsilon(u_\mu)) + L(v - u_\mu) \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

Multiplions (2.2) par $\mu(>0)$, j_K étant positivement homogène de degré 1, et V étant un espace vectoriel, on a

$$(\varepsilon(\mu \cdot u_\mu), \varepsilon(v) - \varepsilon(\mu \cdot u_\mu)) + j_K(\varepsilon(v)) - j_K(\varepsilon(\mu \cdot u_\mu)) + L(v - \mu \cdot u_\mu) \geq 0, \quad \forall v \in V,$$

qui montre que

$$\mu \cdot u_\mu = u_1$$

solution du problème {P*} où la viscosité est prise égale à 1.

3) Le fait d'avoir pénalisé le problème {P} apparaît comme une régularisation du dual {P*}. ■

COROLLAIRE 2.1 : Si {P} admet une solution σ , alors σ et u sont liés par la relation d'extrémalité

$$(2.3) \quad \varepsilon(u) = \frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K(\sigma)).$$

Démonstration : La relation d'extrémalité [7] exprime que $\varepsilon(u)$ appartient au sous-gradient de la fonctionnelle $\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2$. Or cette fonctionnelle est différentiable et son gradient vaut $\frac{1}{2\mu} (\sigma - P_K(\sigma))$. ■

Remarque : On peut se servir des résultats qui précèdent pour démontrer certains résultats classiques de la théorie des charges limites : [19]

PROPOSITION 2.2 : Dire que L est charge excessive équivaut à

$$(2.4) \quad \exists v_0 \in V \quad \text{avec} \quad j_K(\varepsilon(v_0)) < L(v_0).$$

Démonstration : Le théorème 2.1 montre que

$$\inf_{v \in V} [\mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)) - L(v)] = \sup_{\sigma \in M(L)} [-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2].$$

Par ailleurs, on a trivialement l'inégalité

$$\mu \|\varepsilon(v)\|^2 + j_K(\varepsilon(v)) - L(v) \geq j_K(\varepsilon(v)) - L(v),$$

d'où

$$(2.5) \quad \sup_{\sigma \in M(L)} [-\frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2] \geq \inf_{v \in V} [j_K(\varepsilon(v)) - L(v)].$$

Si (comme on le fait dans la suite) on a prouvé que le sup en σ est atteint (existence d'une solution pour (P)), alors L , charge excessive, entraîne que ce sup est négatif, d'où (2.4).

Réciproquement, supposons (2.4) vérifié ; alors, on choisit

$$0 < \mu_0 < \frac{j_K(\varepsilon(v_0)) - L(v_0)}{\|\varepsilon(v_0)\|^2};$$

on a, alors,

$$\mu_0 \|\varepsilon(v_0)\|^2 + j_K(\varepsilon(v_0)) - L(v_0) < 0,$$

ce qui prouve que la solution du problème $(P_{\mu_0}^*)$ correspondant est différente de 0, donc que L est charge excessive. ■

3 - CAS D'UN CRITÈRE DE PLASTICITÉ NE PORTANT QUE SUR LE DÉVIATEUR.

On va envisager ici le cas où le critère de plasticité ne porte que sur le déviateur. On suppose que

$$(3.1) \quad f(\tau) = \varphi(\tau^D) \quad (\tau^D \text{ défini en (1.6)})$$

où $\varphi : \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe telle que

$$(3.2) \quad \{e \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \varphi(e) \leq 0\} \text{ soit borné}$$

(c'est le cas pour le critère de Von Mises, et aussi de Tresca).

Evidemment, le convexe K lui-même n'est pas borné, car le déviateur est invariant par l'addition d'une pression arbitraire :

$$(\tau_{ij} + p \delta_{ij})^D = \tau_{ij}^D, \quad \forall p \in L^2(\Omega), \quad p.p.$$

L'existence d'une solution pour le problème (P) n'est plus immédiate comme dans le cas où K est borné.

On va montrer le

THEOREME 3.1 : Si Ω est assez régulier, alors, sous les hypothèses (3.1) et (3.2), le problème (P) admet une au moins une solution σ .

Ce résultat s'appuie sur les deux lemmes suivants :

LEMME 3.1 : Si Ω est un ouvert à frontière Lipschitz, alors, on a la majoration

$$(3.3) \quad |p|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \leq C |\text{grad } p|_{(H^{-1}(\Omega))^N}.$$

Démonstration : Dans le cas où Ω est régulier, on se réfère à MAGENES-STAMPACCHIA [15], et dans le cas général, à BOLLEY-CAMUS [3].

LEMME 3.2 : Soit (R) la relation d'équivalence sur Y :

$$(R) : \quad \tau \sim \sigma \iff \exists C \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} + C \delta_{ij} \quad \text{p.p.}$$

Si Ω est "Lipschitz", et si

$$(3.4) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

alors, on a la majoration

$$(3.5) \quad |\sigma|_{Y/R} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y).$$

Démonstration : Posons

$$(3.6) \quad C_i = f_i - \sum_{j \neq i} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N;$$

et

$$(3.7) \quad b_{ij} = \sigma_{ii}^D \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad 1 \leq j \leq N.$$

La dérivation des distributions étant continue de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$|C_i|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y)$$

(en effet, les éléments hors-diagonale de σ et σ^D sont égaux), et

$$|b_{ij}|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C |\sigma^D|_Y.$$

Or, il résulte de (1.6), (3.4), (3.6), (3.7), que les N^2 quantités $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq N$, sont solutions du système linéaire (dans $H^{-1}(\Omega)$)

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} = C_i \quad 1 \leq i \leq N;$$

$$\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_j} - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial x_j} \right) = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N.$$

Ce système de N^2 équations à N^2 inconnues est inversible (comme on peut le vérifier pour $N = 2$ ou 3), on a ainsi

$$|\text{grad } \sigma_{ii}|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C (1 + |\sigma^D|_Y).$$

En appliquant alors le lemme 3.1 à chacun des σ_{ii} , on obtient la majoration annoncée. ■

Démonstration du théorème 3.1 : On applique, d'abord, le théorème 1.1.

Le lemme 3.2 montre, ensuite, la coercivité du problème (P) sur Y/R , et, par conséquent, l'existence d'une solution σ , dont la trace (pression) sera définie à une constante additive près, si $\Gamma_F = \emptyset$. Si Γ_F est de mesure non nulle, la condition aux limites $\sum_{j=1}^N \sigma_{ij} n_j = F_i$ sur Γ_F , fixe la constante. ■

Remarques :

1) Condition d'incompressibilité.

Dans le cas, où l'on s'est placé, d'un critère de plasticité ne dépendant que du déviateur, on voit que

$$\begin{aligned} j_K(e) &= \sup_{\tau \in K} (\tau, e) \\ &= \sup_{\varphi(\tau^D) \leq 0} (\tau^D, e) + \sup_{p \in L^2(\Omega)} (p, \sum_{k=1}^N e_{kk}). \end{aligned}$$

En effet, si $\tau^D \in K$, alors $\tau_{ij}^D + p \delta_{ij} \in K$ aussi.

On voit que le premier terme est borné d'après (3.2), mais que le second terme n'est autre que la fonction indicatrice du sous-espace des tenseurs à trace nulle

$$Y_1 = \{ e \in Y \mid \sum_{k=1}^N e_{kk} = 0 \}.$$

On voit donc que le problème (P^*) est en fait un problème avec contrainte de divergence nulle.

2) Cas du critère de Von Misès.

On peut particulariser le calcul précédent au critère de Von Misès.

On obtient alors :

$$j_K(e) = g \int_{\Omega} |e| \, dX + \psi_1(e)$$

où

$$\psi_1(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in Y_1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases},$$

est la fonction indicatrice de Y_1 .

Le problème $\{P^*\}$ apparaît, alors, comme un problème de Bingham stationnaire [12] [6] (sans termes d'accélération).

Le problème $\{P\}$ s'écrit ([16]) :

$$\sup_{\sigma \in M(L)} - \frac{1}{4\mu} \|(|\sigma^D| - g)^+\|^2,$$

et la relation d'extrémalité (2.3) apparaît, alors, comme la loi de comportement du fluide de Bingham.

$$\varepsilon(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\sigma^D| \leq g \\ \frac{\sigma^D}{2\mu} \left(1 - \frac{g}{|\sigma^D|}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \blacksquare$$

4 - CARACTÉRISATION DES CHARGES ADMISSIBLES.

On se place dans un cas où le problème $\{P\}$ admet au moins une solution, $\forall L \in V'$ (c'est le cas dans la situation du paragraphe précédent, ou si K est borné).

Pour une charge $L \in V'$, on note σ_L et u_L les solutions des problèmes $\{P\}$ et $\{P^*\}$ associés (σ_L peut ne pas être unique).

THEOREME 4.1 : On a la suite d'équivalences ;

$$L \text{ charge admissible } (L \in C) \iff \sigma_L \in K \iff u_L = 0.$$

Démonstration : Montrons la propriété aller.

Si L est charge admissible, alors $\exists \sigma_1 \in K \cap M(L)$. On a alors

$$\sigma_1 = P_K(\sigma_1) \quad \text{et} \quad \sigma_1 \text{ est une solution de } \{P\},$$

car

$$- \frac{1}{4\mu} \|\sigma_1 - P_K(\sigma_1)\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_1 \in M(L);$$

or

$$- \frac{1}{4\mu} \|\sigma - P_K(\sigma)\|^2 \leq 0, \quad \forall \sigma.$$

Donc, toute solution σ_L de $\{P\}$ vérifie $\sigma_L - P_K(\sigma_L) = 0$, donc $\sigma_L \in K$.

La relation d'extrémalité (2.3) montre, alors, que $\varepsilon(u_L) = 0$, et l'inégalité de Korn et les conditions aux limites montrent que $u_L = 0$.

Réciproquement, si $u_L = 0$, alors l'existence d'une solution σ_L au problème $\{P\}$, et la relation d'extrémalité (2.3) montrent que $\sigma_L \in K$.

Par conséquent, $\sigma_L \in K \cap M(L)$, et donc L est charge admissible. $\blacksquare$

La portée pratique de ce résultat est très intéressante : pour savoir si une charge est admissible, il suffit de résoudre le problème $\{P^*\}$, et de voir si la solution correspondante est nulle.

COROLLAIRE 4.1 : Si $u_L \neq 0$, alors L est charge excessive ($L \notin C$), et, de plus, on a

$$(4.1) \quad \langle u_L, L - L_1 \rangle_{V'} \geq 0, \quad \forall L_1 \in C.$$

(c'est-à-dire que u_L est le vecteur normal à un hyperplan séparant L de C).

Démonstration : La première partie résulte immédiatement de ce qui précède.

Démontrons la relation (4.1) :

D'après la relation d'extrémalité (2.3), on a

$$(\epsilon(u_L), \sigma_L - \tau) = \frac{1}{2\mu} (\sigma_L - P_K(\sigma_L), \sigma_L - \tau) \geq 0, \quad \forall \tau \in K;$$

si l'on choisit $\tau \in K \cap M(L_1)$ (ce qui est possible $\forall L_1 \in C$), on a donc, en remontant à la définition de $M(L)$,

$$(\epsilon(u_L), \sigma_L - \tau) = \langle u_L, L - L_1 \rangle_{V'} \geq 0, \quad \forall L_1 \in C. \quad \blacksquare$$

Remarque 4.1 : Si l'on se restreint à ne considérer que des charges appartenant à un sous-espace de dimension finie H (par exemple 2 ou 3), le résultat précédent permet de tracer, pour toute charge excessive, un hyperplan extérieur à C , ce qui permet d'avoir une idée, peut-être plus précise, du convexe C .

5 - APPROXIMATION.

On se place dans la situation (plus difficile) du paragraphe 3, où le critère de plasticité ne porte que sur le déviateur (le cas où K serait borné, serait traité de façon analogue, mais plus simple).

Pour se ramener en dimension finie, on va approximer, de façon interne, les espaces V et Y par $V_h \subset V$ et $Y_h \subset Y$.

Comme on l'a vu, le critère de plasticité ne portant que sur le déviateur, les champs de vitesse à divergence nulle joueront un rôle particulier :

$$V_1 = \left\{ v \in V \mid \operatorname{div} v = 0 \right\};$$

soit, alors,

$$W_h = \left\{ v \in V_h \mid \operatorname{div} v = 0 \right\}.$$

On suppose que V_h , W_h et Y_h sont des approximations convergentes de V , V_1 et Y , ce qui s'écrit, dans le cas de W_h ,

$$(5.1) \quad \forall v \in V_1, \quad \exists v_h \in W_h \quad \text{avec} \quad v_h \rightarrow v \quad \text{dans} \quad V.$$

On fait l'hypothèse de compatibilité entre V_h et Y_h :

$$(5.2) \quad \epsilon(V_h) \subset Y_h.$$

On approche, alors, le problème aux vitesses (P^*) par

$$(P_h^*) : \quad \inf_{v \in V_h} \mu \|\epsilon(v)\|^2 + j_K(\epsilon(v)) - L(v).$$

THEOREME 5.1 : Soit u_h la solution du problème (P_h^*)

1) On a $u_h \rightarrow u$ quand $h \rightarrow 0$.

2) On a l'estimation d'erreur

$$\|u_h - u\|^2 \leq C (\|v_h - u\|^2 + \|v_h - u\|), \quad \forall v_h \in W_h.$$

Démonstration: 1) Puisque l'on est dans la situation du paragraphe 3, la première partie résulte de l'hypothèse (5.1), et d'un résultat de GLOWINSKI-LIONS-TREMOLIERES [14].

2) De façon analogue à GLOWINSKI [13], on écrit que u et u_h sont solutions des inéquations variationnelles

$$(5.3) \quad (\varepsilon(u), \varepsilon(v) - \varepsilon(u)) + j(\varepsilon(v)) - j(\varepsilon(u)) + L(v - u) \geq 0, \quad \forall v \in V_1;$$

$$(5.4) \quad (\varepsilon(u_h), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u_h)) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u_h)) + L(v_h - u_h) \geq 0, \quad \forall v_h \in W_h,$$

où l'on a posé

$$j(e) = \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e).$$

On additionne alors (5.3), écrit pour $v = u_h$, à (5.4), d'où

$$(\varepsilon(u) - \varepsilon(u_h), \varepsilon(u_h) - \varepsilon(u)) + (\varepsilon(u_h), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) + L(v_h - u) \geq 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\|u - u_h\|_V^2 \leq (\varepsilon(u_h) - \varepsilon(u), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) + L(v_h - u) + j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) + (\varepsilon(u), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)).$$

On remarque alors que

$$(5.5) \quad j(e_1) - j(e_2) \leq j(e_1 - e_2).$$

En effet,

$$j(e_2 + e_3) = \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e_2 + e_3) \leq \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e_2) + \sup_{\varphi(\tau) \leq 0} (\tau, e_3) \leq j(e_2) + j(e_3).$$

d'où (5.5) en posant

$$e_3 = e_1 - e_2.$$

En appliquant (5.5), on a

$$j(\varepsilon(v_h)) - j(\varepsilon(u)) \leq j(\varepsilon(v_h - u)) \leq C \int_{\Omega} |\varepsilon(v_h - u)| dX \leq C (\text{mes } (\Omega))^{1/2} \|v_h - u\|.$$

Par ailleurs, on a

$$(5.6) \quad (\varepsilon(u_h) - \varepsilon(u), \varepsilon(v_h) - \varepsilon(u)) \leq C \left(\frac{\alpha}{2} \|u_h - u\|^2 + \frac{1}{2\alpha} \|v_h - u\|^2 \right),$$

et

$$(5.7) \quad L(v_h - u) \leq \|L\|_* \|v_h - u\|_V, \quad (\| \cdot \|_* \text{ désigne la norme duale de } V),$$

d'où le résultat, en choisissant α assez petit. ■

Problème primal approché.

On vérifie, facilement, grâce à l'hypothèse (5.2), que $\{P_h^*\}$ est le dual du problème

$$\{P_h\} \quad \sup_{\tau \in M_h(L)} - \frac{1}{4\mu} \|\tau - P_K(\tau)\|^2$$

où

$$M_h(L) = \left\{ \tau \in Y_h \mid (\tau, \varepsilon(v_h)) = L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \right\},$$

qui apparaît comme un discrétisé du problème $\{P\}$.

Soit

$$Z_h = \left\{ p \in L^2(\Omega) \mid \exists \tau \in Y_h \text{ avec } p = \sum_{k=1}^N \tau_{kk} \right\}$$

l'espace des traces des éléments de Y_h , on est conduit à faire l'hypothèse supplémentaire

$$(5.8) \quad \text{div} : V_h \rightarrow Z_h \text{ est surjective.}$$

THEOREME 5.2 : Sous l'hypothèse (5.8), le problème (P_h) admet au moins une solution σ_h , liée à u_h par la relation d'extrémalité

$$(5.9) \quad \varepsilon(v_h) = \frac{1}{2\mu} (\sigma_h - P_K(\sigma_h)).$$

Démonstration : Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\|\tau^D\|$ est une norme sur $M_h(0)$ (en effet, puisque l'on est dans la situation du paragraphe 3, on a

$$\|\tau - P_K(\tau)\|^2 \geq C \|\tau^D\|^2 - C).$$

Supposons donc que $\tau^D = 0$. On a alors

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad p.p. \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z}_h$$

d'où

$$(\tau, \varepsilon(v_h)) = -(p, \operatorname{div} v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h,$$

et

$$p = 0$$

grâce à l'hypothèse (5.8). ■

Remarque 5.1 : Si K était borné, la coercivité du problème (P_h) serait assurée, et l'hypothèse (5.8) serait inutile. ■

Approximation des charges limites.

On appelle C_h le convexe des charges admissibles "approchées" :

$$C_h = \left\{ L \in V' \mid K \cap M_h(L) \neq \emptyset \right\}$$

Comme dans le cas continu, on montrerait le

THEOREME 5.3 : On a la suite d'équivalences

$$L \in C_h \iff \sigma_h \in K \iff u_h = 0.$$

Pour obtenir une estimation d'erreur, on établit, d'abord, les majorations suivantes :

THEOREME 5.4 : Etant donnée une charge L , on appelle u la solution du problème (P^*) associé.

Si $L \notin C$, alors on a

$$(5.10) \quad d(L, C) \equiv \inf_{L_1 \in C} \|L - L_1\|_* \leq C \mu \|u\|_V$$

Démonstration : Soit σ une solution du problème (P) associé à L , et $\sigma_0 = P_K(\sigma)$.

La forme linéaire $L_0 : v \in V \rightsquigarrow L_0(v) = (\sigma_0, \varepsilon(v))$ étant continue, $L_0 \in V'$, et on a

$$\begin{aligned} \|L - L_0\|_* &\equiv \sup_{v \in V} \frac{|L(v) - L_0(v)|}{\|v\|_V} \\ &= \sup_{v \in V} \frac{|(\sigma - \sigma_0, \varepsilon(v))|}{\|v\|_V} \leq \|\sigma - \sigma_0\|. \end{aligned}$$

Mais, d'après la relation d'extrémalité (2.3), on a $\sigma - \sigma_0 = 2\mu \varepsilon(u)$, d'où (5.10), en remarquant que $\tau \in M(L_0) \cap K \Rightarrow L_0 \in C$.

Remarque : La propriété (5.10) est un résultat qui n'a rien à voir avec l'approximation. Cela étant, pour une charge L , la seule chose dont on puisse être sûr numériquement est que la solution u_h du problème approché est nulle. Comme on sait que $\|u - u_h\| \rightarrow 0$, on voit qu'à ce moment-là, pour h assez petit, on ne sera pas trop loin de C .

On verra, par la suite, que si V_h est un espace d'éléments finis linéaires par morceaux, alors $C \subset C_h$. On aura donc, dans ce cas, un résultat de convergence de C_h vers C :

$$(5.11) \quad C \subset C_h \quad \text{et} \quad \forall L \in C_h, \text{ alors } \exists h_0 \text{ avec } h \leq h_0 \Rightarrow L \notin C.$$

On va voir, maintenant, que l'on peut même obtenir, sous une hypothèse de régularité, une estimation d'erreur pour la distance entre C_h et C .

Estimation d'erreur.

On va supposer que l'on a un résultat de régularité pour le problème

(P*) :

$$(5.12) \quad \|u\|_{2,\Omega} \leq C |L|_H$$

(où $|L|_H$ peut être égal à $(|f_1|_{0,\Omega}^2 + |F_1|_{1/2,\Gamma}^2)^{1/2}$, si l'on est dans le cas du paragraphe 1, ou à une autre norme) ($\|\cdot\|_{s,H}$ désigne la norme de $H^s(\Omega)$).

Remarquons que si les conditions aux limites sont vraiment de type "mêlées", on ne peut pas, en général, s'attendre à un tel résultat. Néanmoins, si tel est le cas, alors,

COROLLAIRE 5.1 : Si l'approximation de V_1 par W_h est en " $O(h)$ " :

$$(5.13) \quad \inf_{v_h \in W_h} \|u - v_h\|_V \leq C h \|u\|_{2,\Omega},$$

alors l'approximation de C par C_h est en $O(\sqrt{h})$:

$$(5.14) \quad \text{si } L \in C_h, \quad d(L, C) \leq C \sqrt{h} |L|_H.$$

6 - APPLICATION A UN ÉLÉMENT FINI DU PREMIER DEGRÉ.

On pourrait traiter, très facilement, le cas où K est borné, et tout marcherait bien. Dans le cas du paragraphe 3, des difficultés surviennent du fait qu'il faut approcher des champs de vitesse à divergence nulle.

On suppose, maintenant, que l'on est en dimension 2 ($N=2$). On va appliquer les résultats qui précèdent à un élément fini du premier degré à divergence nulle, particulièrement adapté à ce genre de situations. Malheureusement, on ne sait démontrer les propriétés de convergence (5.1) ou (5.13) que dans le cas d'un maillage uniforme. On le décrira, néanmoins, dans le cas général.

On désignera par P_1 l'espace des polynômes de degré au plus égal à 1.

6.1 - Description de l'élément.

On considère un quadrilatère convexe, que l'on découpe en 4 triangles, en traçant ses 2 diagonales (Fig. 2) ([17]).

On va construire, sur ce quadrilatère, un champ de vecteurs $\vec{u}$ continu, et linéaire sur chaque triangle, et à divergence constante.

a) sur le triangle I (Fig. 2), on pose $\vec{u} = \vec{p}_1$, avec $\vec{p}_1 \in (P_1)^2$ quelconque.

b) sur le triangle II, on pose $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ avec $\vec{p}_2 \in (P_1)^2$, $\vec{p}_2 = 0$ sur la diagonale $m_2 m_4$ (Fig), $\text{div } \vec{p}_2 = 0$.

c) sur le triangle III, on pose, de même, $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ avec $\vec{p}_3 \in (P_1)^2$, $\vec{p}_3 = 0$ sur $m_1 m_3$, $\text{div } \vec{p}_3 = 0$.

d) on choisit alors $\vec{u} = \vec{p}_1 + \vec{p}_3$ sur IV, et on vérifie que le champ de vecteurs $\vec{u}$, ainsi construit, a bien une divergence constante sur le quadrilatère, qu'il est continu et P_1 par morceaux. De plus, il dépend de 8 paramètres arbitraires. On vérifie, alors, qu'on peut se donner

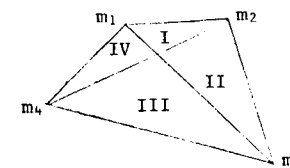


Figure 2

comme degrés de liberté, les valeurs de $\vec{u}$ aux 4 sommets du quadrilatère (Fig. 3) : ce qui achève la description de notre élément fini.

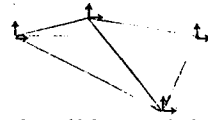


Figure 3 : élément fini utilisé.

6.2 - Approximation de V .

On se donne, maintenant, une famille T_h de découpages de Ω en quadrilatères ($0 < h < 1$), et on appellera V_h l'espace des champs de vitesse qui sont continus, P_1 sur chacun des 4 triangles de chaque quadrilatère et dont la divergence est constante sur chaque quadrilatère, comme dans la construction précédente (on vérifie que $V_h \subset V$).

On appellera Y_h le sous-espace de Y , de tenseurs constants par morceaux (sur chaque triangle), et dont la trace est constante par quadrilatère.

On vérifie que ε applique V_h dans Y_h .

On démontre, facilement, que, dans ce cas, $C \subset C_h$, $\forall h$, en utilisant [8].

Si le maillage T_h est assez régulier, on peut démontrer la propriété de surjectivité (5.8) (l'espace des pressions, Z_h , est un espace de constantes par quadrilatère) [17].

Enfin, si le maillage T_h est uniforme, et constitué de parallélogrammes, on sait démontrer les propriétés de convergence (5.1) et (5.13) [20], et donc, comme $C_h \supset C$, on a le résultat de convergence suivant de C_h vers C :

$$\forall L \notin C, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } h < h_0 \Rightarrow L \notin C_h,$$

et ceci est également vrai si l'on se restreint à ne considérer des charges que dans un sous-espace de dimension finie.

Si l'on a, maintenant, un résultat de régularité du type (5.12) (ce qui est vrai dans le cas particulier du problème de Mossolov, Cf [4]), alors, on a l'estimation d'erreur (5.14) dans V .

7 - RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

On a étudié le problème de la hauteur limite d'un talus de terre, soumis à son propre poids (Fig. 4). Soit H_0 la hauteur du talus, γ l'accélération de la pesanteur (Fig 4). On suppose que le matériau satisfait au critère de Von Mises (1.5). On s'intéresse, en fait, à la valeur limite du rapport $\beta = \frac{H_0 \gamma \sqrt{2}}{g}$ [19]. Dans nos expériences, nous avons pris $H_0 = \gamma = 1$, et fait seulement varier g . Les essais numériques ont été faits en collaboration avec P. LORBER.

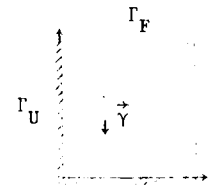


Figure 4

7.1 - Approximations utilisées.

Numériquement, le problème consiste essentiellement à résoudre le problème aux vitesses (P_h^*) pour g donné. Dans le cas où les conditions aux limites sont entièrement de type Dirichlet ($\Gamma_F = \emptyset$), on trouvera des résultats numériques, pour ce type de problème, par différences finies [1], ou par éléments finis de degré 2 [9]. Le fait que Γ_F soit non vide, empêche, malheureusement, l'utilisation d'éléments non conformes [5], car alors la matrice discrétisant $\|\varepsilon(v)\|^2$ n'est plus nécessairement définie positive.

On a, d'abord, utilisé une approximation par éléments finis Q_1 (Q_1 est l'espace des polynômes du 1er degré en chacune des variables), avec intégration numérique, au centre de chaque élément. Bien que l'on ne sache pas démontrer de convergence en général pour cette méthode, on l'a cependant essayée, car elle est couramment utilisée [2] [18].

Ayant constaté des instabilités pour les ordres de grandeur des vitesses obtenues, sur deux réseaux décalés (comme les cases noires et les cases blanches d'un damier), nous avons aussi utilisé l'approximation décrite au paragraphe 6. C'est d'ailleurs ce fait qui constitue notre motivation profonde pour son étude.

Les maillages utilisés étaient uniformes, de pas $h = \frac{1}{n}$.

7.2 - Algorithmes de résolution.

On a utilisé deux algorithmes différents : le premier est un algorithme de type Uzawa, décrit dans [9], le deuxième, un algorithme de pénalisation-dualité, décrit dans [11], [16].

L'expérience acquise avec le deuxième algorithme nous a permis d'accélérer beaucoup la convergence du premier, en pénalisant fortement la contrainte $\text{div } u_h = 0$. Les performances des deux algorithmes se sont, alors, révélées comparables.

En effet, les difficultés du problème (P_h^*) sont de deux ordres : la première est la contrainte d'incompressibilité $\text{div } u_h = 0$; la deuxième, la non-différentiabilité de la fonctionnelle j_K . L'algorithme d'Uzawa est très efficace pour la non-différentiabilité, mais peu pour la contrainte d'incompressibilité, d'où l'idée de la pénaliser fortement.

Algorithme d'Uzawa :

$\alpha, \rho_1, \rho_2 > 0$ donnés, p^n et σ^n étant donnés par récurrence,
Déterminer v^{n+1} minimisant sur V_h :

$$(7.1) \quad \mu \|\varepsilon(v)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\text{div } v\|^2 + g(\sigma^n, \varepsilon(v)) + \int_{\Omega} p^n \text{div } v \, dX - L(v).$$

Calculer

$$\begin{aligned} \sigma^{n+1} &= p_K (\sigma^n + \rho_1 \varepsilon^D(v^{n+1})) \\ p^{n+1} &= p^n + \rho_2 \text{div } v^{n+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Algorithme de pénalisation-dualité :

$\alpha, r > 0$ étant donnés, e^n et σ^n étant donnés par récurrence,
Déterminer v^{n+1} minimisant sur V_h :

$$(7.2) \quad \frac{r}{2} \|\varepsilon(v)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\text{div } v\|^2 + (\sigma^n - r e^n, \varepsilon(v)) - L(v).$$

Calculer

$$\psi = r \varepsilon(v^{n+1}) + \sigma^n$$

$$e^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } |\psi^D| \leq g \\ \frac{\psi^D}{2\mu + r} (1 - \frac{g}{|\psi^D|}) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\sigma^{n+1} = \sigma^n + r (\varepsilon(v^{n+1}) - e^{n+1}) + \alpha \text{div } v^{n+1} \cdot \delta$$

(δ désigne le tenseur de Kronecker).

L'algorithme de pénalisation-dualité est, en effet, une variante [11] de l'algorithme d'Uzawa appliqué au Lagrangien augmenté

$$\mathcal{L}(v, e; \sigma) = \mu \|e\|^2 + j(e) - L(v) + (\sigma, \varepsilon(v) - e) + \frac{r}{2} \|\varepsilon(v) - e\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|\text{div } v\|^2$$

7.3 - Résultats.

1) Eléments finis Q_1 avec intégration numérique

a) $h = 1/4$ (32 variables, 16 éléments).

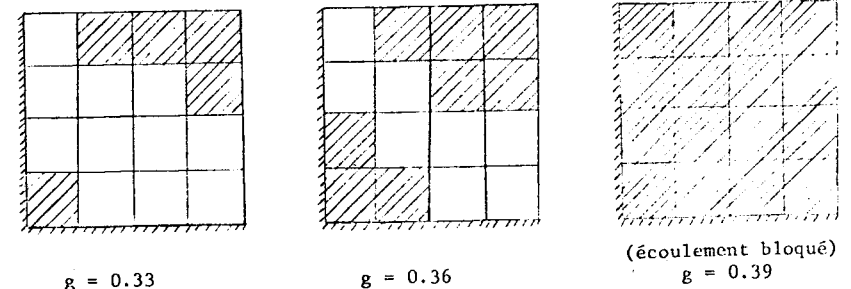
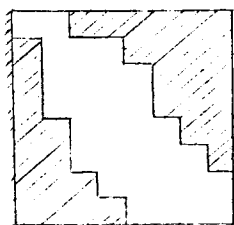
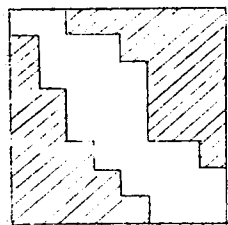


Figure 5 : Tracé des zones rigides (hachurées)
pour diverses valeurs de g ($h = 1/4$)

b) $h = 1/8$ (128 variables, 64 éléments)



$g = 0.36$



$g = 0.365$

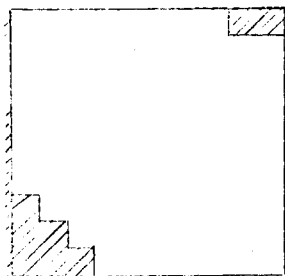
écoulement bloqué

$g = 0.37$

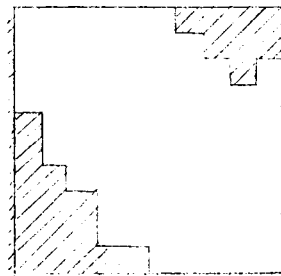
Figure 6 : répartition des zones rigides (hachurées) pour $h = 1/8$ (éléments Q_1)

2) Eléments finis P_1 à divergence nulle.

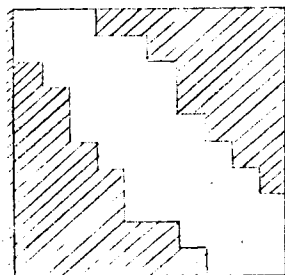
(Essais effectués par P. LORBER). Les essais ont été effectués avec $h = 1/10e$ ce qui correspond à 100 éléments (coupés chacun en 4), et 200 variables.



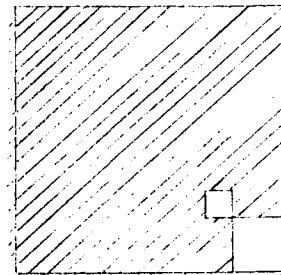
$g = 0.1$



$g = 0.2$



$g = 0.3$



$g = 0.4$

(écoulement bloqué)

Figure 7 : Répartition des zones rigides (hachurées) pour $h = 1/10e$ (éléments P_1 à divergence nulle).

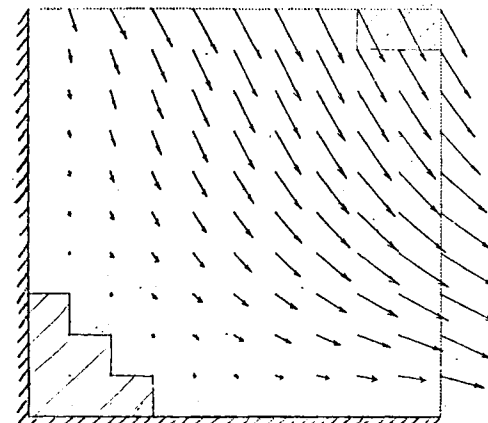


Figure 8 : Champs de vitesse ($g = 0.1$, $h = 1/10e$) (élément fini P_1 à divergence nulle).

Chacun des deux algorithmes utilisés convergeait en un nombre d'itérations inférieur à 100, et l'on avait pénalisé assez fortement la contrainte de divergence nulle ($\alpha = 100$), ce qui se révèle très important. Le temps machine pour 128 variables est 5" sur IBM 370/165.

Insistons, enfin, sur le fait que l'élément fini P_1 à divergence nulle supprime les instabilités en vitesse, observées avec l'élément Q_1 + intégration numérique.

Pour le rapport β , on obtient la majoration 3.87, lorsque $h = 1/8e$, ce qui, compte-tenu des simplifications apportées au domaine Ω (théoriquement infini), semble satisfaisant [19].

Remarquons, enfin, qu'il n'y a pas de difficulté pour caractériser la nullité d'un champ de vitesse en pratique : par exemple, dans l'algorithme de pénalisation-dualité, on voit que la nullité de la solution sera caractérisée par $|\psi^D| \leq g$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BEGIS, Thèse de 3ème cycle, Paris (1972).
- [2] M. BERCOVIER, Thèse (à paraître).
- [3] P. BOLLEY, J. CAMUS, Régularité pour des systèmes à coefficients constants, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 282, Série A, 1975, 45-47.
- [4] H. BREZIS, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to non linear partial differential equations, Contributions to non linear functional analysis, E. Zarantonello (ed.), Academic Press, New York (1971), 101-156.
- [5] M. CROUZEIX, P.A. RAVIART, Conforming and non conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, R.A.I.R.O., R-3, Déc. 1973, 33-76.
- [6] G. DUVAUT, J.L. LIONS, Les inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, Paris, 1972.
- [7] I. EKKLAND, R. TEMAM, Analyse convexe et problèmes variationnels, Dunod, Paris, 1973.
- [8] R.S. FALK, B. MERCIER, Estimation d'erreur en élasto-plasticité, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 282, Série A, 645-648 (1976).
- [9] M. FORTIN, Thèse d'Etat, Paris (1972).
- [10] M. FREMOND, M. PECKER, J. SALENÇON, Méthode variationnelle pour le matériau rigide-plastique, Rapport interne, Ecole Polytechnique, Laboratoire de Mécanique des Solides (1975).
- [11] D. GABAY, B. MERCIER, A dual algorithm for the solution on nonlinear variational problems via finite element approximation, Comp. and Math. with Applications (à paraître).
- [12] P. GERMAIN, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Masson, Paris, 1962.
- [13] R. GLOWINSKI, Sur l'approximation d'une inéquation variationnelle elliptique de type Bingham, R.A.I.R.O. (à paraître).
- [14] R. GLOWINSKI, J.L. LIONS, R. TREMOLIERES, Approximation des inéquations variationnelles, Dunod, Paris (1976, sous presse).
- [15] E. MAGENES, G. STAMPACCHIA, I problema al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Série III, Vol. XII, fasc. III (1958), 247-357, note 27, p. 320.
- [16] B. MERCIER, Une méthode de résolution du problème des charges limites utilisant les fluides de Bingham, C.R. Acad. Sc. Paris, T. 281, Série A, 1975, 525-527.
- [17] B. MERCIER, non publié.
- [18] J.C. NACTEDAAL, D.M. PARKS, J.R. RICE, On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, Comp. Meth. Applied Mech. and Eng., 4 (1974), 153-177.
- [19] J. SALENÇON, Théorie de la plasticité, Eyrolles, Paris, 1973.
- [20] R. TEMAM, On the theory and numerical analysis of the Navier-Stokes equations, Université Paris XI, Orsay, France.