P. LESAINT

P. A. RAVIART

Résolution numérique de l'équation de continuité par une méthode du type éléments finis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule S5
« Journées « éléments finis » », , p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___S5_A10_0>

RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE CONTINUITE PAR UNE METHODE DU TYPE ELEMENTS FINIS

P. LESAINT et P.A. RAVIART

1 - POSITION DU PROBLEME ET DESCRIPTION DES SCHEMAS NUMERIQUES

On considère le problème suivant :

$$(1.1) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \qquad ,$$

$$(1.2) \qquad \rho(x,o) = \rho_o(x) \qquad .$$

Dans le cas du problème de Cauchy pur, on suppose que $\rho_o(x)$ est à support compact (donc aussi $\rho(x,t)$). Lorsque le domaine spatial est l'intervalle $]0,1[$, on impose des conditions aux limites en $x = 0$ pour $u(0,t) > 0$ et en $x = 1$ pour $u(1,t) < 0$.

Description des méthodes

On considère d'abord, pour simplifier, le cas où la vitesse u est constante, soit

$$(1.3) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

On découpe la droite en intervalles $[y_i, y_{i+1}]$ non nécessairement égaux. Soit V_h^1 (resp. V_h^2) l'espace des fonctions v_h dont la restriction à chaque intervalle $[y_i, y_{i+1}]$ est un polynôme de P_k, et continues (resp. non nécessairement continues) aux points y_i.

Problème de Cauchy

Soit $\rho_h^n \in V_h (V_h^1$ ou $V_h^2)$ l'approximation de la solution à l'instant $n\,\Delta\,t$. Pour définir la solution à l'instant $(n+1)\,\Delta t$, on procède en deux étapes :

1) On définit une fonction $\rho^*(x)$, transportée de ρ_h^n de façon Lagrangienne, c'est-à-dire

$$(1.4) \qquad \rho^*(x) = \rho_h^n(x - u\Delta t) \quad .$$

2) On définit ρ_h^{n+1} par projection (interpolation) de $\rho^*(x)$ sur V_h par

$$(1.5) \qquad \int \rho_h^{n+1}\, v\, dx = \int \rho^*\, v\, dx = \int \rho^n(x - u\Delta t)\, v\, dx \ , \qquad \text{pour tout } v \in V_h.$$

Cas des conditions aux limites

On suppose $u > 0$. La condition aux limites pour $x = 0$ s'écrit :

$$(1.6) \qquad \rho(0,t) = g(t).$$

Pour définir la solution à l'instant $(n+1)\Delta t$, on procède en deux étapes :

1) On définit $\rho^*(x)$ (transportée de ρ_h^n) par

$$(1.7) \qquad \rho^*(x) = \begin{cases} \rho_h^n(x-u\Delta t) & \text{pour } u\Delta t \leq x \leq 1 \\ \rho\left(0,(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) & \text{pour } 0 \leq x \leq u\Delta t \end{cases}$$

2) On définit $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par

$$(1.8) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v\, dx = \int_0^1 \rho^*\, v\, dx = \int_0^{u\Delta t} \rho\left(0,(n+1)\,\Delta t - \frac{x}{u}\right) v\, dx + \int_{u\Delta t}^1 \rho_h^n\,(x-u\Delta t)\, v\, dx,$$

pour tout $v \in V_h$.

Remarque 1.1 : Dans le schéma précédent, la condition aux limites est traitée de façon discontinue, même si $V_h = V_h^1$. On peut traiter cette condition de façon continue : on définit $\rho_h^{n+1} \in V_h^1$ par

(1.9) $\rho_h^{n+1}(0) = \rho\left(0, (n+1)\,\Delta t\right)$,

(1.10) $\int_0^1 \rho_h^{n+1} v\, dx = \int_0^1 \rho^* \, v\, dx$ pour tout $v \in V^0_{h,1} = \{v_h \in V_h^1 \; ; \; v_h|_{[0,h]} \in P_{k-1}\}$

Remarque 1.2 : Pour calculer ρ_h^{n+1} par le schéma (1.7), (1.8), il faut inverser une matrice de masse (2k+1) diagonale lorsque $V_h = V_h^1$, et (k+1) diagonale lorsque $V_h = V_h^2$. On a donc une méthode implicite. La méthode peut être rendue explicite si on calcule l'intégrale du 1er membre de (1.8) en utilisant une formule de quadrature comportant k+1 points distincts par intervalle, ces points étant ceux auxquels sont attachés les degrés de liberté de V_h.

Dans le cas où $V_h = V_h^1$, la formule de quadrature sur un intervalle donné comporte donc nécessairement les points extrémités de cet intervalle.

Soit la formule de quadrature sur $[y_i, y_{i+1}]$.

(1.11) $$\int_{y_i}^{y_{i+1}} f(t)\, dy \sim \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i \, f(b_\ell^i)$$

Cette formule de quadrature permet de définir le produit scalaire discret

(1.12) $$<f,g> = \sum_i \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i \,(fg)\,(b_\ell^i).$$

Dans le cas du problème avec conditions aux limites, on suppose que l'intervalle $[0,1]$ est divisé en I intervalles. Le produit scalaire discret s'écrit alors :

(1.13) $$<f,g> = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i \,(fg)\,(b_\ell^i).$$

On note $|.|$ la norme correspondant au produit scalaire $<.,.>$. On définit l'opérateur A de V_h dans V_h par

(1.14) $$<Af,g> = <f,g> - \int fg\, dx.$$

Lorsqu'on calcule le membre de gauche de (1.5) en utilisant la formule (1.11), on peut écrire

(1.15) $$<\rho_h^{n+1}, v> = \int \rho^* \, v\, dx, \text{ pour tout } v \in V_h$$

Remarque 1.3 : Soit $V_h = V_h^1$, k=1, $y_{i+1} - y_i = y_i - y_{i-1}$, pour tout i. On utilise sur chaque intervalle la formule des trapèzes. Le problème (1.15) s'écrit alors :

(1.16) $\rho_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int \rho^* \, v_i(x)\, dx.$, $\forall i$, où les $v_i(x)$ désignent les fonctions chapeaux.

Le problème (1.5) s'écrit :

(1.17) $$\rho_i^{n+1} + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1} - 2\,\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}\right) = \frac{1}{\Delta x}\int \rho^* v_i(x)\, dx \quad \text{, pour tout i.}$$

L'utilisation de formules de quadrature induit le terme de dissipation (diffusion) suivant :

(1.18) $$-\frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1} - 2\,\rho_i^{n+1} + \rho_{i-1}^{n+1}\right) = \frac{1}{h} < A\,\rho^{n+1}, v_i> \quad \text{, pour tout i analogue}$$

discret de $-\dfrac{\Delta x^2}{6}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$, l'opérateur A étant ici défini positif. Ce terme de dissipation se manifeste encore de la façon suivante :

On suppose que la vitesse u est nulle. On a donc :

$$(1.19) \qquad \rho(x,(n+1)\Delta t) = \rho(x,n\Delta t).$$

Lorsqu'on effectue les calculs de façon exacte (problème (1.5)), on a :

$$\rho_h^{n+1}(x) = \rho_h^n(x).$$

Lorsqu'on effectue les calculs de façon approchée (problème (1.15)), on a

$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n\right)$, pour tout i, ce qui correspond à une diffusion en :

$$-\frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$$

Pour supprimer ce terme de dissipation parasite, on est amené à introduire un terme d'antidiffusion [2] , caractérisé par la différence entre $\int \rho^{n+1} v\,dx$ et $<\rho^{n+1}, v>$.

Soit donc <u>le schéma</u> :

1) On définit $\rho^*(x)$ (transportée de ρ_h^n) comme en (1.4) (ou en (1.7)) dans le cas des conditions aux limites)

2) On définit $\rho^{n+1/2} \in V_h$ par (interpolation)

$$(1.20) \quad <\rho^{n+1/2}, v> = \int \rho^*(x) v\,dx \,.$$

3) On définit $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par (antidiffusion)

$$(1.21) \quad <\rho_h^{n+1}, v> = <\rho^{n+1/2}, v> - \left(\int \rho^{n+1/2} v\,dx - <\rho^{n+1/2}, v>\right).$$

<u>Remarque 1.4</u> : Lorsque l'on a u = 0, $y_{i+2} - y_i = \Delta x \quad \forall i$, et k = 1 , il vient :

$$\rho_i^{n+1/2} = \rho_i^n + \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^n - 2\rho_i^n + \rho_{i-1}^n\right)$$
$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1/2} - \frac{1}{6}\left(\rho_{i+1}^{n+1/2} - 2\rho_i^{n+1/2} + \rho_{i-1}^{n+1/2}\right) \quad ,$$

ou encore, en éliminant $\rho^{n+1/2}$:

$$(1.22) \quad \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{1}{36}\left(\rho_{i+2}^n - 4\rho_{i+1}^n + 6\rho_i^n - 4\rho_{i-1}^n + \rho_{i-2}^n\right) ,$$

ce qui correspond à une diffusion en $\dfrac{\Delta x^4}{36}\dfrac{\partial^4\rho}{\partial x^4}$

Si on veut pouvoir obtenir rigoureusement

$$(1.23) \quad \rho_i^{n+1} = \rho_i^n \quad , \quad \text{si } u = 0 \quad ,$$

il faut compliquer légèrement le schéma. On obtient alors <u>le schéma (Phénix [2])</u> :

1) On définit $\rho^*(x)$ comme en (1.4)

2) On définit $\rho^{n+1/2}$, $\tilde{\rho}^{n+1/2}$ et $\rho_h^{n+1} \in V_h$ par

$$(1.24) \quad <\rho^{n+1/2}, v> = \int \rho^*(x) v\,dx$$
$$(1.25) \quad <\tilde{\rho}^{n+1/2}, v> = <\rho^{n+1/2}, v> - \left(\int \rho^n v\,dx - <\rho^n, v>\right) ,$$
$$(1.26) \quad <\rho_h^{n+1}, v> = <\rho^{n+1/2}, v> - \left(\int \tilde{\rho}^{n+1/2} v\,dx - <\tilde{\rho}^{n+1/2}, v>\right) .$$

Pour u = 0, on vérifie que l'on a $\rho_h^{n+1} = \rho_h^n$.

Définition 1.1 : Soit Π l'opérateur de projection sur V_h pour la produit scalaire L^2 : $\Pi v \in V_h$

$$(1.27) \qquad \int (\Pi v) w \, dx = \int v \, w \, dx \qquad \text{pour tout } w \in V_h .$$

Les schémas (1.8), {(1.18), (1.19)} et {(1.22), à (1.24)} s'écrivent, respectivement, avec ρ^* définie comme en (1.4) ou (1.7)

$$(1.28) \qquad \rho^{n+1} = \Pi \rho^* ,$$

$$(1.29) \qquad \rho^{n+1} = (I-A^2)\, \Pi \rho^* ,$$

$$(1.30) \qquad \rho^{n+1} = (I-A^2) \Pi \rho^* + A^2 \rho^n .$$

Remarque 1.5 : Dans le cas du problème avec conditions aux limites, on peut toujours utiliser les schémas (1.20), (1.21) et (1.24), (1.25), (1.26). Il suffit de remplacer $\int dx$ par $\int_0^1 dx$. On peut aussi traiter de façon exacte la condition à la limite (1.6) lorsqu'on cherche la solution approchée ρ_h dans l'espace V_h^1 ; on fait alors décrire à la fonction test v l'espace $V_{h,1}^0$ défini à la Remarque 1.1.

Remarque 1.6 : Le schéma (1.8) est conservatif, et on a :

$$(1.31) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} dx = \int_0^{1-u\Delta t} \rho_h^n \, dx + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t) dt .$$

Si on suppose que la formule de quadrature (1.11) est exacte pour les polynômes de degré $\leq k$, alors les schémas {(1.20), (1.21)} et {(1.24) à (1.26)} sont conservatifs ; en effet, dans ces schémas, on peut remplacer v par la constante 1, et on peut écrire :

$$(1.32) \qquad \int_{y_i}^{y_{i+1}} \rho_h \, dx = \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i \, \rho_h(b_\ell^i) \quad , \text{ pour tout } \rho_h \in V_h$$

On obtient alors aisément la relation (1.31).

2 - RESULTATS DE STABILITE

Lemme 2.1. Dans le cas du problème de Cauchy, le schéma (1.5) est stable pour la norme L^2 et on a :

$$(2.1) \qquad ||\rho_h^n||_{L^2} \leq ||\rho_h^0||_{L^2}$$

Démonstration

On a $\int \rho_h^{n+1} v \, dx = \int \rho^* v \, dx$ pour tout $v \in V_h$. On en déduit en remplaçant v par ρ_h^{n+1}

$$\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx \leq \left(\int (\rho^*)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx\right)^{1/2} ,$$

$$\int (\rho_h^{n+1})^2 \, dx \leq \int (\rho^*)^2 dx = \int (\rho_h^n)^2 dx .$$

L'inégalité (2.1) en découle immédiatement.

Lemme 2.2. Dans le cas du problème avec conditions aux limites, le schéma (1.8) est stable pour la norme L^2 et on a :

$$(2.2) \qquad ||\rho_h^n||_{L^2(0,1)} \leq ||\rho_h^0||^2_{L^2(0,1)} + \int_0^{n\Delta t} u\big(\rho(0,s)\big)^2 \, ds.$$

Démonstration

On a

$$(2.3) \qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v \, dx = \int_0^1 \rho^* \, v \, dx \quad , \text{ pour tout } v \in V_h \quad \text{avec :}$$

$$(2.4) \qquad \rho^*(x) = \begin{cases} \rho\left(0, (n+1)\Delta t - \dfrac{x}{u}\right) & \text{si } 0 < x < u\Delta t \\ \rho^n(x - u\Delta t) & \text{si } u\Delta t < x < 1 \end{cases}$$

Comme dans le lemme 2.1, on peut écrire :

$$(2.5)\qquad \|\rho_h^{n+1}\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \int_0^1 \big(\rho^*(x)\big)^2\,dx.$$

On a : $\displaystyle\int_0^1 \big(\rho^*(x)\big)^2 dx = \int_0^{u\Delta t}\Big(\rho\big(0,(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\big)\Big)^2 + \int_{u\Delta t}^1 (\rho_h^n)^2\,dx$, d'où en faisant le changement de variable $s = (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}$:

$$(2.6)\qquad \int_0^1 \big(\rho^*(x)\big)^2 dx \leqslant u\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \big(\rho(0,s)\big)^2 ds + \int_0^1 (\rho_h^n)^2\,dx$$

En combinant les inégalités (2.5) et (2.6) et en sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.2).

Remarque 2.1 : On se place dans le cadre de la Remarque 1.1. On suppose que l'espace V_h^1 est construit avec des polynômes de degré $\leqslant 1$. Le schéma (1.9), (1.10) donne

$$\frac{h}{2}\rho_0^{n+1} + \frac{5}{6}h\,\rho_1^{n+1} + \frac{h}{6}\rho_2^{n+1} = \int_0^{2h}\rho^*(x)\,v_1(x)\,dx \quad ,$$

$$\frac{h}{6}\rho_{i-1}^{n+1} + \frac{4}{6}h\,\rho_i^{n+1} + \frac{h}{6}\rho_{i+1}^{n+1} = \int_{(i-1)h}^{(i+1)h}\rho^*(x)\,v_i(x)\,dx, \quad 2 \leqslant i \leqslant I-1 \quad ,$$

$$\rho_0^{n+1} = \big(0,(n+1)\Delta t\big) \quad ,$$

où $v_i \in V_h$, et $v_i(x_j) = \delta_{ij}$, pour $0 \leqslant j$, $2 \leqslant i$,
$v_1(x_j) = 0$ pour $j \geqslant 2$, $v_1(x_1) = v_1(x_0) = 1$.

On a alors le résultat suivant, lorsque les intervalles sont égaux.

Lemme 2.3. Lorsque $k = 1$, le schéma (1.9), (1.10) est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a :

$$(2.7)\qquad \int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 \leqslant C\Bigg(\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^0)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^0)^2 + \\ + \frac{3u}{2}\int_0^{n\Delta t}\big(g(t)\big)^2 dt + u\,\frac{\lambda^2}{6}\sum_{r=0}^{n}\Delta t\big(g(r\Delta t)\big)^2 + \frac{h(1+\lambda)^2}{4}\sum_{r=1}^{n} t\Big(\frac{g(r\Delta t)-g(r-1)\Delta t)}{\Delta t}\Big)^2\Bigg)$$

lorsque $\lambda = u\,\frac{\Delta t}{h} \leqslant 1$.

$$(2.8)\qquad \int_0^1 (\rho_h^n)^2 dx \leqslant \int_0^1 (\rho_h^0)^2\,dx + \frac{2u}{3}\Delta t \sum_{r=1}^{n}\big(g(r\Delta t)\big)^2 + 3u\int_0^{n\Delta t}\big(g(t)\big)^2 dt$$

lorsque $\lambda = u\,\frac{\Delta t}{h} > 1$.

Démonstration

On a $$(2.9)\qquad \int_0^1 \rho_h^{n+1} v\,dx = \int_0^1 \rho^* v\,dx \qquad \text{pour tout } v \in V_{h,0}^1 , \quad \rho_h^{n+1}(0) = \rho\big(0,(n+1)\Delta t\big).$$

Soit v la fonction de $V_{h,0}^1$ définie par

$$(2.10)\qquad v = \begin{cases} \rho_h^{n+1}(x) & \text{pour } h \leqslant x \leqslant 1 \\ \rho_1^{n+1} & \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant h \;. \end{cases}$$

On a :

$$(2.11)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \rho_h^{n+1}\, v\, dx = \int_0^h \rho_h^{n+1}\, \rho_1^{n+1}\, dx + \int_h^1 (\rho_h^{n+1})^2\, dx \\ \displaystyle\int_0^1 \rho_h^{n+1}\, v\, dx = \frac{h}{2}\Big((\rho_1^{n+1})^2 + \rho_0^{n+1}\, \rho_1^{n+1}\Big) + \int_h^1 (\rho_h^{n+1})^2\, dx \end{cases}$$

On considère le cas où $u\,\Delta t \leqslant h$ et on a

$$\int_0^1 \rho^* \, v\, dx = \int_h^1 \rho_h^n(x-u\Delta t)\, \rho_h^{n+1}(x)\,dx + \int_{u\Delta t}^h \rho^n(x-u\ t)\rho_1^{n+1}\, dx + $$
$$+ \int_0^{u\Delta t} \rho_1^{n+1}\, \rho\Big(0, (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\Big)dx.$$

$$(2.12)\quad \int_0^1 \rho^* \, v\, dx \leqslant \frac{1}{2}\int_h^1 \Big(\rho_h^{n+1}(x)\Big)^2 dx + \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} \Big(\rho_h^n(x)\Big)^2 dx + \rho_1^{n+1}\int_0^{h-u\Delta t} \rho_h^n(x)\,dx + $$
$$+ u\,\rho_1^{n+1}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t)\,dt\ .$$

Un calcul simple montre que :

$$(2.13)\quad \int_0^{h-u\Delta t} \rho_h^n(x)\,dx = \frac{h}{2}\Big((1-\lambda^2)\rho_0^n + (1-\lambda)^2\, \rho_1^n\Big)$$

$$(2.14)\quad \int_{h-u\Delta t}^h \Big(\rho_h^{n+1}(x)\Big)^2 dx = h\,\frac{\lambda}{6}\Big(\Big(3-3\lambda + \lambda^2\Big)(\rho_1^{n+1})^2 + \lambda(3-2\lambda)\rho_0^{n+1}\rho_1^{n+1} + \lambda^2(\rho_0^{n+1})^2\Big)$$

En combinant les relations (2.9), (2.11), (2.12), (2.13) et (2.15), il vient :

$$\frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{2}\,\Big(1-\lambda + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3}\Big)(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h}{6}(3-3\lambda^2 + 2\lambda^3)\rho_0^{n+1}\rho_1^{n+1} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{2}(1-\lambda)^2\rho_1^n\, \rho_1^{n+1} + \frac{h}{2}(1-\lambda^2)\rho_0^n\, \rho_1^{n+1} + h\,\frac{\lambda^3}{6}\,(\rho_0^{n+1})^2 + u\rho_1^{n+1}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} g(t)\,dt\ ,$$

ou encore :

$$\frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\lambda}{6}(3-\lambda^2)\,(\rho_1^{n+1})^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 +$$
$$+ \frac{h}{2}(1-\lambda^2)\rho_1^{n+1}(\rho_0^n - \rho_0^{n+1}) + h\,\frac{\lambda^3}{3}\rho_0^{n+1}\,\rho_1^{n+1} + \frac{\lambda}{6}\,(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\Big(g(t)\Big)^2 dt\ .$$

Le terme $\frac{h}{2}\,(1-\lambda^2)\rho_1^{n+1}(\rho_0^n - \rho_0^{n+1})$ est majoré par $C\,\frac{h}{4}\,\Delta t(1-\lambda)^2(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\Delta t}{4C}\,(1+\lambda)^2\Big(\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\Delta t}\Big)^2$,

où C est une constante > 0. D'autre part, on a $\frac{h}{3}\,\lambda^3\,\rho_0^{n+1}\,\rho_1^{n+1} \leqslant \frac{h}{6}\,\lambda^3(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h}{6}\,\lambda^3\,(\rho_1^{n+1})^2$

En combinant les trois dernières inégalités, on obtient :

$$(2.15)\quad \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{h}{4}\,(1-\lambda)^2(1-c\Delta t)\,(\rho_1^{n+1})^2 + \frac{h\lambda}{3}\,(1-\lambda^2)\,(\rho_1^{n+1})^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{h-u\Delta t}^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 + \frac{h}{4}(1-\lambda)^2(\rho_1^n)^2 + \frac{h\lambda^3}{6}\,(\rho_0^{n+1})^2 + \frac{3u}{2}\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t}\Big(g(t)\Big)^2 dt +$$
$$+ \frac{h\Delta t}{4C}\,(1+\lambda)^2\Big(\frac{\rho_0^{n+1} - \rho_0^n}{\Delta t}\Big)$$

En sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.7). On considère maintenant le cas où $u\Delta t \geqslant h$. On a :

$$\int_0^1 \rho^* \, v\, dx = \int_{u\ t}^1 \rho_h^n(x-u\Delta t)\rho_h^{n+1}(x)\,dx + \int_h^{u\Delta t} \rho_h^{n+1}(x)\rho\Big(0, (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\Big)\, dx + \int_0^h \rho_1^{n+1}\rho\Big(0, (n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\Big)dx.$$

$$(2.16) \quad \int_0^1 \rho^* v \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{u\Delta t}^1 (\rho_h^{n+1})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{1}{2} \int_h^{u\Delta t} (\rho_h^{n+1})^2 + \\ + \frac{h}{6} (\rho_1^{n+1})^2 + \frac{3u}{2} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \big(g(t)\big)^2 \, dt \; .$$

D'autre part, on a :

$$(2.17) \quad \int_0^h (\rho_h^{n+1})^2 dx = \frac{h}{3} \Big((\rho_0^{n+1})^2 + \rho_0^{n+1} \rho_1^{n+1} + (\rho_1^{n+1})^2 \Big) \; .$$

Des relations (2.9), (2.11), (2.16) et (2.17), on déduit :

$$(2.18) \quad \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho_h^{n+1})^2 \, dx + \frac{h}{6} \big(\rho_1^{n+1} + \rho_0^{n+1}\big)^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^{1-u\Delta t} (\rho_h^n)^2 dx + \frac{h}{3} (\rho_0^{n+1})^2 \\ + \frac{3u}{2} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \big(g(t)\big)^2 dt$$

En sommant sur les indices n, on obtient l'inégalité (2.8).

On suppose que l'opérateur A défini en (1.14) satisfait l'hypothèse suivante :

$$(2.19) \quad (Av, v) \geq 0 \qquad \text{pour tout} \quad v \in V_h.$$

<u>Lemme 2.4. On suppose que l'hypothèse (2.9) est satisfaite. Le schéma (1.20) (1.21) dans le cas du problème de Cauchy est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a</u>

$$(2.20) \quad \|\rho_h^n\|_{L^2}^2 \leq \|\rho_h^0\|_{L^2}^2$$

<u>Démonstration</u>

On a $\quad < \rho^{n+1/2}, v > = \int \rho(x-u\Delta t) v \, dx \qquad$ pour tout $v \in V_h$

En remplaçant v par $\rho^{n+1/2}$, on a : $|\rho^{n+1/2}|^2 \leq \|\rho^n\|_{L^2} \|\rho^{n+1/2}\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\rho^n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\rho^{n+1/2}\|_{L^2}^2$

Or, pour tout $v \in V_h$, on a

$$(2.21) \quad \|v\|_{L^2}^2 = |v|^2 - \langle Av, v \rangle$$

On en déduit l'inégalité

$$(2.22) \quad |\rho^{n+1/2}|^2 + \langle A \rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2} \rangle \leq \|\rho^n\|_{L^2}^2$$

D'autre part, on a $\rho^{n+1} = (I+A)\rho^{n+1/2}$, donc :

$$\|\rho^{n+1}\|_{L^2}^2 = |(I+A)\rho^{n+1/2}|^2 - \langle (A+A^2)\rho^{n+1/2}, (I+A)\rho^{n+1/2} \rangle$$

En développant le second membre, on obtient :

$$(2.23) \quad \|\rho^{n+1}\|_{L^2}^2 = |\rho^{n+1/2}|^2 + \langle A \rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2} \rangle - \langle A^2 \rho^{n+1/2}, A\rho^{n+1/2} \rangle - |A\rho^{n+1/2}|^2$$

En combinant avec l'inégalité (2.22), on obtient (2.20)

<u>Lemme 2.5. On suppose que l'hypothèse (2.19) est satisfaite. Le schéma (1.18),(1.19) dans le cas du problème avec conditions aux limites (traitées de façon discontinue) est stable pour la norme $L^2(0,1)$ et on a :</u>

$$(2.24) \quad \|\rho_h^n\|_{L^2(0,1)}^2 \leq \|\rho_h^0\|_{L^2(0,1)}^2 + u \int_0^{n\Delta t} (g(t))^2 dt \; .$$

Démonstration

On a : $\langle \rho^{n+1/2}, v \rangle = \int_0^1 \rho^*(x) v \, dx$ pour tout $v \in V_h$,

$$|\rho^{n+1/2}|^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho^*(x))^2 dx + \frac{1}{2} ||\rho^{n+1/2}||^2_{L^2}$$

Or, on peut écrire

$$\int_0^1 (\rho^*(x))^2 dx = \int_0^{1-u\Delta t} (\rho_h^n(x))^2 dx + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (g(t))^2 \, dt.$$

En utilisant l'inégalité (2.21), on en déduit

$$|\rho^{n+1/2}|^2 + \langle A\rho^{n+1/2}, \rho^{n+1/2} \rangle \leq ||\rho_h^n||^2_{L^2} + u \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} (g(t))^2 \, dt$$

La fin de la démonstration est identique à celle du lemme 2.4.

Lemme 2.6. On suppose que les points b_ℓ^i, $1 \leq \ell \leq k+1$, de la formule de quadrature (1.11) sont les abscisses de Gauss Lobatto pour le segment $[y_i, y_{i+1}]$, pour tout i. L'hypothèse (2.19) est alors satisfaite.

Démonstration

La restriction de $v \in V_h$ au segment $[y_i, y_{i+1}]$ est un polynôme de degré $\leq k$ que l'on peut écrire :

$$v = \sum_{m=0}^{k} v^{(m)} x^m$$

On pose : $\langle v,w \rangle_i = \sum_{\ell=1}^{k+1} \omega_\ell^i (vw)(b_\ell^i)$

On a : $$\langle v,v \rangle_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} v^2 \, dx = \sum_{m,n=0}^{k} v^{(m)} v^{(n)} \left(\langle x^m, x^n \rangle_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{m+n} \, dx \right)$$

La formule de quadrature (1.11) est exacte pour les polynômes de degré $\leq 2k-1$, on a donc :

$$\langle v,v \rangle_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} v^2 \, dx = (v^{(k)})^2 \left(\langle x^k, x^k \rangle_i - \int_{y_i}^{y_{i+1}} x^{2k} \, dx \right) .$$

Cette dernière quantité est $>$ 0 d'après [3, page 80] . En sommant sur les indices i, on obtient le lemme 2.6.

3 - QUELQUES MAJORATIONS D'ERREUR

Définition 3.1 : A toute fonction continue $\rho(x,t)$, on associe la fonction $\sigma(x,t)$, V_h^1- interpolée de ρ . On pose :

(3.1) $\sigma^n(x) = \sigma(x, n\Delta t)$

Théorème 3.1. On suppose que la solution exacte du problème (1.1), (1.2) appartient à $L^2((0,T) ; H^{k+1})$. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.9), (1.10) pour le problème de Cauchy. On a la majoration d'erreur suivante :

(3.2) $$||\rho_h^n - \rho(.,n\Delta t)||_{L^2} \leq ||\rho_h^0 - (.,0)||_{L^2} + C\, h^k \left(\int_0^T |\rho(.,t)|^2_{k+1,01} \, dt \right)^{1/2}$$

Démonstration

On a $\int \rho_h^{n+1} v \, dx = \int \rho_h^n (x-u\Delta t) v \, dx$ pour tout $v \in V_h$,

$$\int \sigma^{n+1} v \, dx = \int \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)\right) v \, dx + \int \sigma^n(x-u\Delta t) v \, dx$$

En retranchant membre à membre, il vient

$$\int (\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1}) v \, dx = \int (\rho_h^n - \sigma^n)(x-u\Delta t) v \, dx - \int \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n \left(x-u\Delta t\right)\right) v \, dx,$$

Le dernier terme du membre de droite peut s'écrire :

$$\int \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n\left(x-u\Delta t\right)\right) v \, dx = \int \left[(\sigma^{n+1}(x) - \rho(x,(n+1)\Delta t) - (\sigma^n(x) - \rho(x,n\Delta t))\right] v \, dx \; +$$
$$+ \left(\int_{x-u\Delta t}^{x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma^n(y) - \rho(y,n\Delta t)\right) dy \right) v \, dx$$

On en déduit :

$$||\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1}||_{L^2} \leqslant ||\rho_h^n - \sigma^n||_{L^2} + \sup_{v \in V_h} \frac{\left|\int \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)\right) v \, dx\right|}{||v||_{L^2}}$$

La quantité $\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)$ est identiquement nulle pour tout ρ appartenant à

$$\{x^\ell \, t^r\}_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant k \\ r \geqslant 0}} \bigcup \{ x^{k+1} \, t \} \; .$$

En utilisant une variante [4] du lemme de Bramble et Hilbert [1] , on en déduit la majoration (3.2)

<u>Théorème 3.2. On suppose que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.9), (1.10) pour le problème avec conditions aux limites (traitées de façon implicite). On a la majoration d'erreur suivante</u> :

$$||\rho_h^n - \rho(.,n\Delta t)||_{L^2} \leqslant ||\rho_h^0 - \rho(.,0)||_{L^2} + O(h^k + \Delta t^{k+1})$$

<u>Démonstration</u>

On a $\displaystyle\int_0^1 \rho_h^{n+1} v \, dx = \int_{u\Delta t}^1 \rho_h^n (x - u\Delta t) v \, dx + \int_0^{u\Delta t} g(n+1)\Delta t - \frac{x}{u}) v \, dx$

On peut donc écrire :

$$\int_0^1 (\rho_h^{n+1} - \sigma^{n+1}) v \, dx = \int_{u\Delta t}^1 \left(\rho_h^n(x-u\Delta t) - \sigma^n(x-u\Delta t)\right) v \, dx - \int_{u\Delta t}^1 \left(\sigma^{n+1}(x) - \sigma^n(x-u\Delta t)\right) v \, dx \; +$$
$$+ \int_0^{u\Delta t} \left(g\left((n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) - \sigma^{n+1}(x)\right) v \, dx$$

Le dernier terme du membre de droite est majoré par

$$\int_0^{u\Delta t} \left(g\left((n+1)\Delta t - \frac{x}{u}\right) - \sigma^{n+1}(x)\right) v \, dx \leqslant C \, u\Delta t^{k+1} \left(\int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \left(\frac{d^{k+1} g}{dt^{k+1}}\right)^2 dt \right)^{1/2} ||v||_{L^2(0,1)}$$

On termine la démonstration comme dans le théorème 3.1

<u>Théorème 3.3. On suppose que les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites. Soit $\rho_h^n \in V_h$ la solution du schéma (1.20), (1.21) pour le problème avec conditions aux limites (traitées de façon implicite). On a la majoration d'erreur suivante</u>

$$||\rho_h^n - \rho(.,n\,t)||_{L^2} \leqslant ||\rho_h^0 - \rho(.,0)||_{L^2} + O\left(h^k + \frac{h^{k+1}}{\Delta t} + \Delta t^k\right)$$

Démonstration

On procède comme dans les théorèmes précédents.

Remarque 3.1 : La présence du terme $\frac{h^{k+1}}{\Delta t}$ provient du terme de diffusion "parasite" indépendante de la vitesse u.

4 - REMARQUES DIVERSES

Dans le cas où la vitesse u n'est pas constante, on peut définir des schémas numériques de façon un peu plus compliquée ([2] , [5]) pour lesquels on obtient encore [5] des résultats de stabilité. Il est aussi possible d'introduire un second membre f et de considérer un système d'équations non linéaires. Dans ce cas, le terme d'antidiffusion introduit au paragraphe 1 est défini de façon plus sophistiquée [2] .

Les schémas décrits ici peuvent être définis de la même façon en dimension 2, mais la mise en oeuvre semble être assez lourde.

REFERENCES

[1] BRAMBLE J.H., HILBERT S.H *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation,* Numer. Math. 16 (1971), 362-369.

[2] BORIS J.P., BOOK D.L. *Flux corrected Transport. SHASTA, A fluid Transport Algorithm that works,* J. Comput. Phys. II, 36-69, (1973)

[3] DAVIS Ph.J., RABINOWITZ Ph. *Methods of Numerical Integration,* Académic Press (1975)

[4] LESAINT P. *Sur la résolution des systèmes hyperboliques du premier ordre par des méthodes d'éléments finis,* Thèse Paris (1975)

[5] LESAINT P., RAVIART P.A. A paraître

[6] THOMEE V., *Stability of difference schemes in the maximum-norm.* Journal of differential equations, 1, 273-292 (1965)