

JEAN-ETIENNE BERTIN

Sur les Q-anneaux de Matlis

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 4

« Colloque d'algèbre commutative », , exp. n° 10, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__4_A6_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES Q-ANNEAUX DE MATLIS

par

Jean-Etienne BERTIN

1. GENERALITES

Notations

Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau commutatif unitaire intègre qui n'est pas un corps, Q son corps des fractions, et K le R -module Q/R . On note H l'anneau $\text{Hom}_R(K, K)$. Si M est un R -module sans torsion, on note $Q\text{-rg}(M)$ la dimension sur Q de l'espace vectoriel $M \otimes_R Q$.

Introduction

Le point de départ de la théorie des Q -anneaux se situe dans l'étude de la cohomologie singulière des groupes abéliens, pour laquelle Kan et Whitehead [3] ont montré qu'il n'existe pas de groupe abélien M tel que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = 0$ et $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Q}$. Plus généralement, existe-t-il un R -module M tel que $\text{Hom}_R(M, R) = 0$, et que $\text{Ext}_R^1(M, R)$ soit R -isomorphe à un Q -espace vectoriel non nul de dimension finie ? On montre aisément qu'il en est ainsi si et seulement si $\text{Ext}_R^1(Q, R)$ est un Q -espace vectoriel non nul de dimension finie.

Définition 1 : On dit que R est un Q -anneau si $\text{Ext}_R^1(Q, R)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur Q . Plus précisément, étant donné un entier n positif ou nul, on dit que R est un Q^n -anneau si $\text{Ext}_R^1(Q, R) \simeq Q^n$.

Proposition 1 : Etant donné $n \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) R est un Q^n -anneau.
- (ii) $Q\text{-rg}(H) = n+1$.
- (iii) $H/R \simeq Q^n$.

Cela résulte de la suite exacte suivante ([5], th. 10) :

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow H \longrightarrow \text{Ext}_R^1(Q, R) \longrightarrow 0.$$

Remarque 1 : Munissons R de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls de R forment un système fondamental de voisinages de 0 . Alors H s'identifie au complété de R pour cette topologie. Lorsque R est un anneau de valuation, la topologie décrite ci-dessus et la topologie définie par la valuation coïncident, de sorte que tout anneau de valuation complet est un Q° -anneau (pour plus de détails, voir [4]).

Exemple 1 : Soit p un nombre premier. Nagata ([8], E 3.3) a donné un exemple d'anneau de valuation discrète R ayant les propriétés suivantes :

- 1) Le corps des fractions Q de R est de caractéristique p .
- 2) Si L désigne le corps des fractions du complété H de R , on a $[L:Q] = p$, et L est une extension radicielle de Q .

Alors R est un Q^{p-1} -anneau. Pour tout entier positif s , cet exemple peut être modifié de façon à fournir un Q^{p^s-1} -anneau de valuation discrète [2].

Remarque 2 : Jensen [2] a annoncé le résultat suivant :

l'ensemble des cardinaux de la forme $[\text{Ext}_R^1(Q, R) : Q]$, où R est un anneau intègre noethérien de dimension 1 analytiquement non-ramifié en un idéal maximal au moins, et Q son corps des fractions se compose de tous les cardinaux infinis, de 0 et des nombres de la forme p^{s-1} , où p est un nombre premier, et s un entier positif. Cet ensemble reste inchangé si on impose à R d'être un anneau de valuation discrète.

2. SOUS-MODULES h -DIVISIBLES DE K ET IDEAUX PREMIERS DE H .

Dans ce numéro, R désigne un Q^n -anneau, pour $n \in \mathbb{N}$. Les résultats de ce numéro ont été démontrés par Matlis dans le cas où $n = 1$ [6].

Rappelons que H est un anneau commutatif ([5], th. 10), et notons $\text{Ass}(H)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à H (c'est-à-dire de la forme $(0:f)$ pour un élément f de H convenable).

Définition 2 : Un R -module M est dit h -divisible s'il existe un R -homomorphisme surjectif $N \rightarrow M$, où N est un Q -module.

Proposition 2 : Soit f un élément de H . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est diviseur de zéro dans H .
- (ii) $f(K) \neq K$.
- (iii) $\text{Hom}_R(Q, \text{Ker}(f)) \neq 0$.

En particulier, H est intègre si et seulement si 0 et K sont les seuls sous-modules h -divisibles de K .

Théorème 1 : Soit P un idéal premier faiblement associé à H (c'est-à-dire tel qu'il existe $f \in H$ pour lequel P soit un idéal premier minimal parmi ceux qui contiennent $(0:f)$). Alors $P \in \text{Ass}(H)$, et il existe un sous-module h -divisible D de K tel que $P = \text{Hom}_R(K, D)$.

Corollaire 1 : Supposons H réduit ; alors $\text{Ass}(H)$ a au plus $n+1$ élément, et tout élément de $\text{Ass}(H)$ est un idéal premier minimal de H .

Corollaire 2 : Supposons H non réduit ; alors $\text{Ass}(H)$ a au plus n^2 éléments.

Proposition 3 : Tout idéal J de H tel que $\text{Q-rg}(J) \leq n$ est inclus dans un élément de $\text{Ass}(H)$. A fortiori tout idéal J de H tel que $J \cap R = 0$ est inclus dans un élément de $\text{Ass}(H)$.

Proposition 4 : Soit L l'anneau total des fractions de H ; alors $L \cong H \otimes_R Q$.

3. UN CRITERE POUR QUE H SOIT UN ANNEAU REDUIT

Notons Γ la clôture intégrale de l'anneau intègre R . Supposons d'abord que R soit un anneau local noethérien intègre de dimension 1 d'idéal maximal m ; alors H n'est autre que le complété de R pour la topologie m -adique, et Krull a montré que H est réduit si et seulement si Γ est un R -module de type fini (ce qui a lieu si et seulement si $\text{Hom}_R(Q, \Gamma/R) = 0$).

Dans le cas d'un anneau intègre quelconque R , Matlis a montré que si $\text{Hom}_R(Q, \Gamma/R) = 0$, alors H est réduit ([4], 8.10). Dans le cas d'un $\mathbb{Q}$ -anneau, on a la réciproque :

Théorème 2 : Soient R un $\mathbb{Q}$ -anneau, et Γ sa clôture intégrale. Alors H est réduit si et seulement si $\text{Hom}_R(Q, \Gamma/R) = 0$.

Supposons donc H réduit, et soit $P \in \text{Ass}(H)$. Alors $P = \text{Hom}_R(K, D)$, où D est un sous-module h -divisible de K . Soient A le sous- R -module de Q tel que $R \subset A \subset Q$, et $A/R = D$; alors A est un sous-anneau de Q ([6], 1.8). Il existe donc un anneau de valuation V_P de Q tel que $A \subset V_P$. Posons $P' = \text{Hom}_R(K, V_P/R)$. Alors $P \subset P'$ et $P' \cap R = 0$. Il résulte alors de la proposition 3 et du corollaire 1 au théorème 1 que $P = P'$. On a donc :

$$\text{Hom}_R(K, \Gamma/R) \subset \text{Hom}_R(K, \bigcap_{P \in \text{Ass}(H)} V_P/R) = \bigcap_{P \in \text{Ass}(H)} P = 0$$

puisque H est réduit ([1], chap. IV, §1, exercice 17). Puisque Γ/R est un R -module de torsion, on a donc $\text{Hom}_R(Q, \Gamma/R) = 0$.

4. MODULES ETRANGERS

Dans ce numéro, A désigne un anneau unitaire, non nécessairement commutatif.

Définition 3 : Soient A un anneau, M un A -module, et $M_1, \dots, M_n$ une suite de sous- A -modules de M . On dit que $M_1, \dots, M_n$ est une suite de sous- A -modules

étrangers de M si pour i de 2 à n , on a

$$M_i + \bigcap_{1 \leq j < i} M_j = M.$$

Lemme : Soient A un anneau, M un A -module, $M_1, \dots, M_n$ une suite de sous- A -modules étrangers de M . Alors :

(i) On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^n M_i \longrightarrow M \xrightarrow{p} \bigoplus_{i=1}^n (M/M_i) \longrightarrow 0$$

où p est la somme des projections canoniques $M \rightarrow M/M_i$.

(ii) On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^n M_i \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i=1}^n M_i \xrightarrow{\alpha} M^{n-1} \longrightarrow 0$$

où δ est l'homomorphisme diagonal, et où $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_n)$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \bigoplus_{i=1}^n M_i$.

Exemple 2 : Soit $V_1, \dots, V_n$ une suite d'anneaux de valuation deux à deux indépendants d'un corps Q , et posons $R = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Alors $V_1, \dots, V_n$ est une suite de sous- R -modules étrangers de Q .

5. ANNEAUX SPECIAUX

Les résultats de ce numéro et des deux suivants relatifs aux Q^1 -anneaux ont été démontrés par Matlis [6].

Définition 4 : Soit R un Q -anneau [resp. un Q^n -anneau]. On dit que R est un Q_I -anneau [resp. Q_I^n -anneau] si H est intègre, un Q_R -anneau [resp. Q_R^n -anneau] si H est réduit sans être intègre, et un Q_N -anneau [resp. Q_N^n -anneau] si H n'est pas réduit.

Définition 5 : Un anneau intègre R est dit spécial s'il existe des sous-anneaux $A_1, \dots, A_p$ de Q vérifiant les conditions suivantes :

- 1) On a $R \subsetneq A_i \subsetneq Q$ pour i de 1 à p , et $R = \bigcap_{i=1}^p A_i$.
- 2) $A_1, \dots, A_p$ est une suite de sous- R -modules étrangers de Q .
- 3) Pour tout i de 1 à p , A_i est un Q_i -anneau.

Proposition 5 : Un anneau R est un Q_R -anneau si et seulement s'il existe un anneau spécial S tel que $R \subset S \subset Q$ et qu'il existe $r \in R - \{0\}$ tel que $r(S/R) = 0$. En particulier, tout anneau spécial est un Q_R -anneau.

Définition 6 : On dit que R est h -local s'il vérifie les conditions suivantes:

- (i) Tout idéal premier non nul de R est inclus dans un seul idéal maximal de R .
- (ii) Tout élément non nul de R n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux maximaux de R .

Par exemple, tout anneau intègre nothérien de dimension 1 est h -local.

Théorème 3 : Soit R un Q_R^n -anneau, où n est un entier positif. Soient

$P_1, \dots, P_p$ les idéaux premiers associés à H . Pour i de 1 à p , notons A_i le sous- R -module de Q tel que $R \subset A_i$, que A_i/R soit un sous- R -module h -divisible de K et que $P_i = \text{Hom}_R(K, A_i/R)$. Posons $S = \bigcap_{i=1}^p A_i$; alors :

- (i) Pour i de 1 à p , A_i est un $Q_i^{d_i}$ -anneau, l'entier d_i vérifiant

$$0 = d_i = n+1-p, \text{ et } \sum_{i=1}^p d_i = n+1-p.$$

- (ii) Pour i de 1 à p , on a un isomorphisme d'anneaux de H/P_i sur $\text{Hom}_{A_i}(Q/A_i, Q/A_i)$.

- (iii) S est un Q^n -anneau spécial, entier sur R , et il existe $r \in R - \{0\}$ tel que $r(S/R) = 0$.

- (iv) La clôture intégrale de R est l'intersection des clôtures intégrales des A_i , pour i de 1 à p .

- (v) Pour i de 1 à p , notons L_i le corps des fractions de H/P_i , et soit L l'anneau total des fractions de H . Alors $L = \bigoplus_{i=1}^p L_i$.

- (vi) Soit M un idéal maximal de R ; alors S a au plus p idéaux maximaux au-dessus de M , et S_M est un anneau h -local ayant au plus p idéaux maximaux.
- (vii) R est spécial si et seulement si S a un unique idéal maximal au-dessus de chacun des idéaux maximaux de R , auquel cas $R = S$.
- (viii) Si R est local, alors S est h -local et possède exactement p idéaux maximaux $N_1, \dots, N_p$ qu'on peut numérotter de sorte qu'on ait $A_i = S_{N_i}$ pour i de 1 à p .

Corollaire : Un anneau local intègre unibranche ne peut être un Q_R -anneau.

Proposition 6 : Un anneau intègre R est h -local et spécial si et seulement si c'est un Q^n -anneau non local (pour n entier positif convenable) et si, pour tout idéal maximal M de R , R_M est un Q_I -anneau. Si tel est le cas, R a au plus $n+1$ idéaux maximaux.

6. EXTENSIONS DE Q_I -anneaux.

Proposition 7 : Soit R un Q_I^n -anneau, pour $n \in \mathbb{N}$. Notons L le corps des fractions de H . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) H est entier sur R .
- (ii) L est une extension radicielle de Q .

Lorsque ces conditions sont vérifiées, soit $x \in H-R$ tel que $Q(x) = L$.

Alors $R[x]$ est un L_N^n -anneau.

Proposition 8 : Soient p un nombre premier, et R un Q_I^{p-1} -anneau intégralement clos ; notons Λ la fermeture intégrale de R dans le corps des fractions L de H . Si L est une extension séparable de Q , alors Λ est un L_R^{p-1} -anneau spécial.

7. CAS OU R EST NOETHERIEN DE DIMENSION 1

Soit R un $\mathbb{Q}$ -anneau noethérien de dimension 1 ; d'après Jensen [2], R est un anneau local. Si de plus, R est un $\mathbb{Q}_I^n$ -anneau pour $n \in \mathbb{N}$, d'après Matlis ([7], 7.1), la clôture intégrale $\bar{R}$ de R est un $\mathbb{Q}_I^n$ -anneau de valuation discrète et un R -module de type fini. Si de plus, R est un $\mathbb{Q}_I^n$ -anneau pour n entier positif, d'après Jensen [2], le corps résiduel de R n'est pas parfait.

Proposition 9 : Un $\mathbb{Q}$ -anneau R noethérien de dimension 1 ne peut être un $\mathbb{Q}_R$ -anneau. Autrement dit, R est analytiquement non ramifié si et seulement s'il est analytiquement irréductible.

Théorème 4 : Soient p un nombre premier, et R un $\mathbb{Q}_I^{p-1}$ -anneau noethérien de dimension 1. Alors $\mathbb{Q}$ est de caractéristique p , et le corps des fractions L de H est une extension radicielle de $\mathbb{Q}$.

8. EXEMPLES

Exemple 3 : Soient p un nombre premier, et R le $\mathbb{Q}_I^{p-1}$ -anneau de l'exemple 1. Soit $x \in H-R$; alors $\mathbb{Q}(x)$ est égal au corps des fractions L de H , et d'après la proposition 7, $R[x]$ est un $\mathbb{Q}_I^{p-1}$ -anneau noethérien de dimension 1.

Exemple 4 (Jensen) : Soient p un nombre premier, et $\mathbb{Q}_p$ le corps des fractions de l'anneau $\hat{\mathbb{Z}}_p$ des entiers p -adiques. Alors le complété $\hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ de la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ pour la valuation v prolongeant à $\bar{\mathbb{Q}}_p$ la valuation p -adique est un corps $\mathbb{Q}$ -isomorphe à $\mathbb{C}$. Donc l'anneau de valuation V_p de $\hat{\bar{\mathbb{Q}}}_p$ pour v est un anneau de valuation complet de hauteur 1 de $\mathbb{C}$ (et donc un $\mathbb{C}_I^0$ -anneau) tel que $V_p \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}_p$.

Exemple 5 : Soient $p_1, \dots, p_d$ des nombres premiers deux à deux distincts, où $d \geq 2$. Avec les notations de l'exemple 4, $V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_d}$ est un $\mathbb{C}_R^{d-1}$ -anneau spécial.

Exemple 6 : Soient $p_1, \dots, p_d$ des nombres premiers deux à deux distincts, où $d \geq 2$. Avec les notations de l'exemple 4, $V_{p_1} \cap \dots \cap V_{p_d} \cap \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}^{2d-1}$ -anneau spécial.

Exemple 7 (Jensen) : Soient p un nombre premier, et V_p l'anneau de l'exemple 4. Posons $R = V_p \cap \mathbb{R}$; alors R est un $\mathbb{R}_I^1$ -anneau pour lequel $H = V_p$, et la fermeture intégrale A de R dans $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}_R^1$ -anneau spécial.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI N. Algèbre commutative. Hermann, Paris.
- [2] JENSEN C.U. On $\text{Ext}_R(A, R)$ for torsion-free A, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 831-834.
- [3] KAN D.M. - WHITEHEAD G.W. On the realizability of singular cohomology groups, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961) 24-25.
- [4] MATLIS E. Cotorsion modules Mern. Amer. Math. Soc. n° 49 (1964).
- [5] MATLIS E. Torsion-free modules the University of Chicago Press (1972).
- [6] MATLIS E. The theory of Q-rings Troms. Amer. Math. Soc. 187 (1974) 147-181.
- [7] MATLIS E. 1-dimensional Cohen-Macaulay rings Lect. notes in Math. n° 327 Springer Verlag (1973).
- [8] NAGATA M. Local rings. Interscience Tracts in Pure an Appl. Math. n° 13 Interscience New-York (1962).

Jean-Etienne BERTIN
Université de Caen
Rue du Gaillon
14032 - CAEN-CEDEX