RAYMOND MARIE

Un modèle de stock à point de commande avec délais de livraison dépendants

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. n° 7, p. 41-43
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A7_0>

UN MODELE DE STOCK A POINT DE COMMANDE AVEC DELAIS DE LIVRAISON DEPENDANTS.

par Raymond MARIE

A - INTRODUCTION

Soit un modèle de stock possédant les caractéristiques suivantes :

a) le niveau maximal est M.

b) la quantité de commande est Q.

c) le processus des demandes est poissonnien. (de taux λ).

d) les délais de livraison sont des variables aléatoires indépendantes.

e) en cas de rupture de stock, on peut, soit considérer que les demandeurs s'addressent alors chez un concurent (hypothèse : "ventes perdues"), soit que les demandeurs attendent que le stock soit réapprovisionné (hypothèse : "demandes différées").

f) le niveau net est défini comme égal au stock disponible diminué des demandes différées. Les commandes de réapprovisionnement sont passées à chaque fois que le niveau net atteint la valeur (M-kQ), k = 1,2,... .

Ce modèle de stock est bien connu [HAY-66].

Le modèle présenté dans cette note diffère du précédent par l'hypothèse suivante : les délais de livraison sont des variables aléatoires dépendantes. Le cas où ces délais de livraison sont des variables indépendantes fait l'objet d'une remarque à la fin du paragraphe B.

Le paragraphe B est consacré à la modélisation du système à l'aide d'un réseau de file d'attente non markovien. La résolution mathématique des grandeurs caractéristiques étant présentée dans le paragraphe C.

B - MODELISATION DU SYSTEME

Soit un réseau de files d'attente fermé R, de M stations, tel que :

a) la station n°1 est une station de type Erlang-k à serveur unique.

b) les stations n°2 à T sont des stations de type exponentiel à r serveurs.

c) les autres stations ont des lois de service à transformées de Laplace rationnelles ; leur nombre de serveurs est supérieur au nombre de clients potentiels.

d) la matrice de transition $\mathcal{P} = (p_{ij})$ est indépendante de l'état du réseau.

e) la discipline d'attente est "premier arrivé-premier servi".

f) le nombre de clients est N.

Ce réseau modélise un système de gestion de stock.

On suppose dans un premier temps que le système fonctionne en "ventes perdues" et que M (niveau disponible maximal) est un multiple de Q :

$M = \ell . Q$

Dans un tel cas, ℓ sera le nombre maximal de commandes de réapprovisionnement en cours de livraison.

On sait qu'une station d'Erlang-k peut s'étudier asymptotiquement par l'intermédiaire d'un graphe markovien à états fictifs (cf. [MAE-76], §B) ; la station d'Erlang est dans l'état (i,j) lorsqu'elle contient i clients et que celui faisant l'objet du service se trouve dans la phase j, j=1,...,k. A l'état (i,j) correspond une probabilité p(i,j). On peut donc modéliser l'état du niveau net du stock par une station d'Erlang telle que :

$k = Q$

$\mu = \lambda$ (μ étant le taux de transition de l'état (i,j) à l'état (i,j+1).

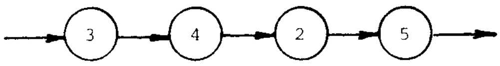
A l'état (i,j) de la station d'Erlang correspond l'état du stock disponible :

$n_d = M - (\ell-i)\, Q - (j-1)$

Vis-à-vis du réseau de files d'attente, la variable d'état est i = nombre de commandes potentielles non lancées. Ainsi, $(\ell-i)$ étant le nombre de commandes en cours de livraison, N (nombre de "clients" du réseau fermé) est toujours égal à ℓ.

D'autre part, soit $R_{\overline{1}}$ le sous-réseau complémentaire à la station d'indice 1 par rapport à R.

Ce sous-réseau est construit en fonction du processus réel de livraison ; ainsi, dans le sous-réseau suivant où T = 2 :



les stations d'indice 3, 4, 5 peuvent représenter respectivement des délais de transport, administratifs et à nouveau de transport ; la station d'indice 2 représentant la fabrication de la commande dans le cas d'une exécution "à la demande".

Le sous-réseau $R_{\overline{I}}$ est équivalent à un sous-réseau exponentiel $S_{\overline{I}}$ puisque la station 2 est une station exponentielle et que les stations 3,...,M possèdent plus de serveurs que de clients potentiels (cf. [COX-55]).

Soit $\nu(j)$ le flux de sortie conditionnel $\nu(j)$ représentant asymptotiquement le taux de livraison d'une commande sachant qu'il en existe j en attente. Ce flux $\nu(j)$ est tel que (cf. [MAE-75]) :

a) il est indépendant du flux d'entrée

b) il est identique au flux sortant du sous-réseau exponentiel $S_{\overline{I}}^{1}$ formé uniquement de T stations d'indice 2,...,T et Z ; la nouvelle station Z étant une station de loi de service exponentielle de moyenne :

$$\overline{U}_Z = \frac{\sum_{v=T+1}^{M} x_v \overline{U}_v}{\sum_{v=T+1}^{M} x_v (p_{v1}+p_{v2} \cdots + p_{vT})}$$

où les termes x_v sont les composantes du vecteur x solution positive de l'équation matricielle $x.\mathcal{P} = x$.

Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, $x_v=1$, $v=2,\ldots,M$, et :

$$\overline{U}_Z = \frac{\overline{U}_3+\overline{U}_4+\overline{U}_5}{2}$$

On a donc ainsi une méthode rapide pour calculer la suite $\{\nu(j)\}_{j=1,\ldots,N}$

Soit $\mu(i)$ le taux d'entrée poissonnien dans la station d'Erlang sachant que cette station est dans l'état E_i où :

$$E_i = \{(i,j) : j=1,\ldots,Q\}$$

On a :

$$\mu(i) = \nu(N-i)$$

Il suffit donc d'étudier la file d'attente $\mu(i)/E_Q/1$ pour obtenir les probabilités d'état du stock et donc les grandeurs caractéristiques du système.

On passe du modèle à "ventes perdues" au modèle à "demandes différées" en faisant tendre N vers l'infini. Il est évident qu'au niveau des calculs, on aura une approximation aussi faible que l'on voudra en choisissant N tel que :

$$\text{Prob}\ \{1_{E_1}\} < \varepsilon$$

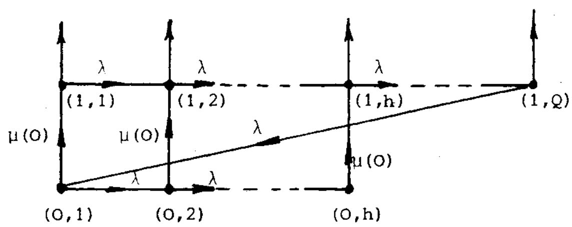
ε étant pris suffisamment petit (e.g. : $\varepsilon = 10^{-6}$)

Dans le modèle à "ventes perdues", lorsque M n'est pas un multiple de Q, le système ne constitue pas exactement une station d'Erlang-Q.

Soit :

$M = \ell Q + (h-1)$, $\quad h=2,\ldots,Q$

Dans ce cas, le graphe des états fictifs diffère du précédent par l'existence des états (O,2)...,(O,h) et donc des taux de transition entre les états (O,j) et (1,j), j=2,...,h. On a, dans ce cas, le graphe suivant :



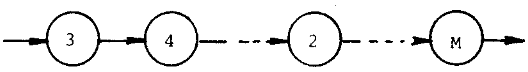
Il sera donc nécessaire d'effectuer une initialisation particulière pour cette station "Erlang-h-Q" particulière.

<u>Remarque</u> : Dans le cas où les stations 2,...,T ont N serveurs, il n'y a plus d'attente et les variables aléatoires délais de livraison sont indépendantes ; dans ce cas, la suite $\{\nu(j)\}_{j=O,\ldots,N}$ reste identique quels que soient les types des lois de service des stations modélisant le délai de livraison pourvu qu'elles ne changent pas de valeur moyenne (cf. [MAE-75]). Ceci entraîne que pour un tel modèle à point de commande, les caractéristiques du stock sont indépendantes de la nature de la loi de livraison dès qu'on fait l'hypothèse d'indépendance sur les variables aléatoires "délai de livraison".

C - RESOLUTION MATHEMATIQUE

C-1. CALCUL DE LA SUITE $\{\nu(j)\}_{j=0,\ldots,N}$

Le sous-réseau $S_1^{\perp}$ étant exponentiel, cette suite se calcule rapidement (cf. [MAE-75]). Ainsi, dans le cas simple suivant où la station 2 possède un seul serveur :



On a :

$$\nu(j) = \frac{\beta(j-1)}{\beta(j)}$$

où

$$\beta(v) = \alpha T \times \beta(v-1) + \frac{(1-\alpha)T}{v}$$

avec

$$\begin{cases} \beta(0) = 1 \\ T = \sum_{v=2}^{M} \bar{u}_v \\ \alpha = \dfrac{\bar{u}_2}{T} \end{cases}$$

C-2. CALCUL DES PROBABILITES D'ETAT DU STOCK NET :

Si q(n) est la probabilité que le stock net soit dans l'état n, on a :

$$q(M-(N-i)Q-(j-1)) = p(i,j)$$

Il suffit donc de déterminer les probabilités p(i,j) pour obtenir les probabilités q(n).

Les probabilités p(i,j) peuvent se calculer à l'aide des équations récurrentes :

a) $i \leqslant 1$

a1) $h = 1$

$$p(1,k) = \frac{\mu(0)}{\lambda} p(0)$$

$$p(1,j) = \frac{(\mu(1)+\lambda)}{\lambda} p(1,\ldots,(k-1) \qquad j=1,\ldots,(k-1)$$

a2) $h > 1$

$$p(0,j) = \frac{\mu(0)}{\lambda} \left[\sum_{u=j+1}^{h} p(0,u)\right] \qquad j=1,\ldots,h-1$$

$$p(1,k) = \frac{\mu(0)}{\lambda} \left[\sum_{j=1}^{h} p(0,j)\right]$$

$$p(1,j) = \frac{(\mu(1)+\lambda)}{\lambda} p(1,j+1) \qquad j=h,\ldots,k-1$$

$$p(1,j) = \frac{(\mu(1)+\lambda)}{\lambda} p(1,j+1) - \frac{\mu(0)}{\lambda} p(0,j+1) \qquad j=1,\ldots,h-1$$

b) $i > 1$

$$p(i,k) = \frac{(\mu(i-1)+\lambda)}{\lambda} p(i-1,1) - \frac{\mu(i-2)}{\lambda} p(i-2,1)$$

$$p(i,j) = \frac{(\mu(i)+\lambda)}{\lambda} p(i,j+1) - \frac{\mu(i-1)}{\lambda} p(i-1,j+1) \qquad j=1,\ldots,(k-1)$$

et de la condition supplémentaire :

$$\sum_{i,j} p(i,j) = \sum_{u=0}^{N.Q+h-1} q(u) = 1$$

C-3. GRANDEURS CARACTERISTIQUES

On a immédiatement :

a) probabilité de rupture de stock

$$P_{rupt} = \sum_{u=0}^{N.Q+(h-1)-M} q(u)$$

Dans le cas des "demandes différées".

b) espérance mathématique de la variable aléatoire "nombre de demandes différées".

$$B = \sum_{u=0}^{N.Q-M} [N.Q-M-u] \; q(u)$$

c) temps moyen d'attente de l'article :

$$\bar{T} = \frac{B}{\lambda}$$

REFERENCES

[COX-55] COX D.R.
A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Processes.
(Proc. Camb. Phil. Soc., 51 (1955) pp.313-319)

[HAY-66] HADLEY G., WHITIN T.M.
Etude et pratique des modèles de stocks.
Dunod 1966. (Traduction de : Analysis of Inventory Systems. Prentice Hall,1963)

[MAE-75] MARIE R.
Sur les réseaux de files d'attente fermés à services exponentiels.
(Séminaires de probabilités RENNES 1975 - rapport IRISA n°33 pp. 5 à 23 - RENNES)

[MAE-76] MARIE R.
Sur les réseaux de files d'attente à service de type K.
(Note précédente de ce rapport).