A. HOSVEPIAN

Sur un algorithme de calcul pour un estimateur de filtrage linéaire dans un Hilbert

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 3
« Séminaire de probabilité II », , exp. nº 4, p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___3_A4_0>

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE · UNIVERSITÉ ET I.N.S.A. DE RENNES

INSTITUT de RECHERCHE en INFORMATIQUE et SYSTÈMES ALÉATOIRES

I.R.I.S.A.

Avenue du Général Leclerc · 35031 Rennes Cedex · B.P. 25 A Tel 36.48.15

Rapport N° 64

SUR UN ALGORITHME DE CALCUL * POUR UN ESTIMATEUR DE FILTRAGE LINEAIRE DANS UN HILBERT

par

A. HOVSEPIAN

Sommaire

Dans ce travail, on considère un processus, à valeurs dans un espace de Hilbert, solution d'une équation d'évolution stochastique (équation d'état) perturbée par un mouvement brownien.

A ce processus est associé un processus d'observation fini-dimensionnel, lui-même bruité par un brownien.

Cet article fournit une méthode de résolution approchée pour les équations de filtrage de l'état par rapport à l'observation.

Comme exemple d'application, on traite le cas de l'équation de la chaleur.

* *Pour toute correspondance ou demande de tirés à part, écrire à A. HOVSEPIAN Université de Rennes, B.P. 25 A 35031 RENNES CEDEX*

SUR UN ALGORITHME DE CALCUL POUR UN ESTIMATEUR DE FILTRAGE LINEAIRE DANS UN HILBERT

-=-=-=-

par Armand HOVSEPIAN

INTRODUCTION

Dans un article récent, Curtain [3] a étudié la généralisation, à un espace de dimension infinie, du problème de filtrage linéaire de Kalman-Bucy, à savoir :

Un système stochastique à une infinité de dimension est représenté par l'équation d'évolution :

$$\begin{cases} du(t,\omega) = Au(t,\omega)dt + B(t)\cdot dW(t,\omega) \\ u(0,\omega) \;\;= u_0(\omega) \end{cases}$$

où A est un opérateur non borné

B(t) est un opérateur borné

W(t,ω) est un brownien à valeurs dans un Hilbert infini

A ce système est associé un processus d'observation de dimension finie (à valeurs dans $\mathcal{K}$)

$$\begin{cases} dz(t,\omega) = a(t)\; u(t,\omega)dt + b(t)\cdot dV(t,\omega) \\ z(0,\omega) \;\;= 0 \end{cases}$$

avec : a(t) et b(t) opérateurs bornés

V(t,ω) brownien de dimension finie

Dans ces conditions, il exis

vation z(t,ω). Ce filtre éta

de Riccati à une infinité de

Le but de ce trav

à des équations matricielles

soudre numériquement.

Il est divisé en

1) Un préliminair

nent les opérateurs Λ(t,s) e

meilleur estimateur û(t) de

2) L'opérateur de

de K(t,s). On construit donc

un espace de Hilbert de dime

en t et s) vers Λ(t,s) ∈ $\mathcal{L}$ (

3) Les $\Lambda_n^m(t,s)$ dé

font à une équation de Bucy

converge vers K(t,s) dans L_2

4) La quatrième pa

rique sur une équation stoch

I - PRELIMINAIRES

On se donne deux

$\mathcal{Y}$ de dimension infinie, mun

$\mathcal{K}$ de dimension finie q, mun

Un segment I = [0,T] et un es

défini un brownien W_t, à val

2 - *Equation linéaire stochastique définissant l'état* :

Soient :

a) A un opérateur linéaire fermé sur $\mathcal{H}$, non borné, qui engendre l'opérateur d'évolution G(t) :

$$G(0)=I=\text{identité}, \quad G(t-r)G(r-s)=G(t-s) \quad t\leq r\leq s$$

$$A = \lim_{t\to s} \frac{G(t-s)-I}{t-s} \quad \text{générateur infinitésimal de } G(t)$$

On suppose que $\|G\| = \sup_{t\in I} \|G(t)\| < +\infty$

b) $B(\cdot) \in L_\infty(I\ ; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$

c) u_0 une variable aléatoire donnée, à valeurs dans $\mathcal{H}$, centrée, admettant une covariance $\Lambda_0 = E\{u_0 \otimes u_0\}$

Alors $u_t(\omega)$ sera le processus à valeurs dans $\mathcal{H}$, adapté à $\mathcal{F}_t$, tel que $\sup_{t\in I} E\{\|u_t\|^2\} < +\infty$ et :

$$(1) \qquad \begin{cases} du_t = Au_t dt + B_t dW_t \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Remarque :

(1) admet l'unique solution (faible) u_t à valeurs dans $\mathcal{H}$ [3] :

$$u_t = G(t)u_0 + \int_0^t G(t-s)B(s)dW(s).$$

3 - *Equation linéaire stochastique associée à l'espace des observations* $\mathcal{K}$:

Elle se définit de façon classique, en se donnant :

a) $a(\cdot) \in L_\infty(I\ ; \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$

1 - *Processus brownien sur*

W_t sera un process

a) $E\{W(t)-W(s)\} =$

$\mathcal{F}_s = \sigma(W_p\ ;\ p\leq s)$ et $\mathcal{U} = \bigvee_s \mathcal{F}$

b) $t \to W(t,\cdot)$ est

c) $\forall h$ et $k \in \mathcal{H}$,

$E\{\langle W_t-W_s, h\rangle\langle W_t-W_s, k\rangle\} = (t-$

où W est un opérateur nucléai

dénombrable, de vecteurs prop

correspondantes c_i.

> *On peut choisir et c'est*
> *que la suite des valeurs*

d) $E\{\|W(t)-W(s)\|^2$

tout vecteur propre e_i de W.

$\langle W(t_2)-W(t_1), e_i\rangle$

sont des v.a. gaussiennes inc

Remarque 1 :

Si u et $v \in \mathcal{H}$, or

$\forall h \in \mathcal{H} \quad u \otimes v($

et la relation c) précédente

$E\{(W_t-W_s) \otimes (W_t-W_s$

Remarque 2 :

L'utilité d'ordonn

sition 2, partie II, qui donn

Λ_n^m.

b) $b(\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K}))$, inversible, tel que $b^{-1}(\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K}))$

c) un brownien $v_t(\omega)$ à valeurs dans $\mathcal{K}$ indépendant de W_t, d'opérateur de covariance associée V, où :

$$E\{(v_t-v_s) \otimes (v_t-v_s)\} = (t-s)V \quad \text{avec} \quad V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$$

Avec ces hypothèses, l'observation $z(t,\omega)$ est l'unique processus à valeurs dans $\mathcal{K}$ solution de l'équation stochastique :

$$(2) \qquad \begin{cases} dz_t = a(t)u(t)dt + b(t)dV_t \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

4 - Commentaires :

Supposons qu'on ait un phénomène dont l'évolution dans le temps soit régie par l'équation stochastique (1), et que l'observation apparente de ce phénomène ne puisse être appréhendée que par une équation du type (2).

Le problème est de trouver le meilleur estimateur $\hat{u}(t,\omega)$ de l'état $u(t,\omega)$, à partir de l'observation $z(s,\omega)$ $0 \leqslant s \leqslant t$, sous la forme intégrale :

$$\hat{u}(t,\omega) = \int_0^t K(t,s)dz(s,\omega)$$

où l'opérateur (déterministe) $K(t,\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}))$ est tel que $\hat{u}(t)$ minimise la forme quadratique

$$E\{\langle u_t-\hat{u}_t,\ h\rangle^2\} \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}$$

Avec les hypothèses et énoncés ci-dessus K(t,s) existe et satisfait à l'équation :

$$(3) \qquad \boxed{\int_0^t K(t,s)a(s)\Lambda(s,p)a^*(p)ds + K(t,p)b(p)V\,b^*(p) = \Lambda(t,p)a^*(p)}$$

où l'opérateur de covariance $\Lambda(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est donné par : (voir [3]).

(4) $\Lambda(t,s) = E\{u_t \otimes u_s\}$

avec $\Lambda_0 = \Lambda(0,0)$ =

Remarque :

Une hypothèse utili

dépendance des browniens w_t et

toires de l'espace des états

observé $\mathcal{K}$.

Plus précisément, u

laisse l'état du système réel

5 - Objet de ce travail :

Les équations (3) e

d'opérateurs sur des espaces d

en général, de calculer numéri

Le problème consist

calcul approché de K(t,s). On

(double) d'opérateurs $K_n^m(t,s)$,

de la vitesse de convergence d

6 - Définition des normes :

. <·,·> étant le p

de $u(\cdot) \in L_\infty(I\ ;L_2(\Omega,\mathcal{H}))$ par

$\|u\| = \sup_{t\in I} \sqrt{E\{\|u_t\|^2}$

.. On note $\|a\| = \sup_{t\in I}$

Dans les démonstrations de la 2e partie, on sera aussi amené à utiliser des opérateurs $Q \in \mathcal{L}(L_2(I\ ;\mathcal{K}))$, d'où l'introduction d'un produit scalaire $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ et d'une norme notée $|\!|\!| \cdot |\!|\!|$ dans $L_2(I\ ;\mathcal{K})$, déduits du produit scalaire dans $\mathcal{K}$, par :

$$\langle\langle f,g \rangle\rangle = \int_0^T \langle f(x),g(x)\rangle dx \Rightarrow |\!|\!| f |\!|\!|^2 = \int_0^T \|f(x)\|^2 dx$$

et la norme dans $\mathcal{L}(L_2(I\ ;\mathcal{K}))$ s'écrira :

$$|\!|\!| Q |\!|\!| = \operatorname*{Sup}_{|\!|\!| f |\!|\!| = 1} |\!|\!| Qf |\!|\!|$$

II - CONSTRUCTION DE LA SUITE DOUBLE D'OPERATEURS $\Lambda_n^m(t,s)$

Comme l'opérateur de covariance $\Lambda(t,s)$ joue un rôle essentiel dans la résolution de $K(t,s)$, on est amené à considérer plusieurs normes sur $\Lambda(t,s)$ qui seront utilisées pour simplifier les démonstrations.

Normes de $\Lambda(t,s)$

Le lemme qui suit permettra de définir deux normes $\|\Lambda\|_1$ et $n(\Lambda)$ pour $\Lambda(t,s)$.

Lemme 1

a) La norme de Hilbert-Schmidt de $\Lambda(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$:

$$\|\Lambda(t,s)\|_1 = \Big(\sum_{i,j} |\langle \Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle|^2\Big)^{1/2}$$

est majorée par $\sqrt{E\{\|u_t\|^2\}} \cdot \sqrt{E\{\|u_s\|^2\}}$.

b) L'opérateur Λ de $\mathcal{L}(L_2(I\ ;\mathcal{K}))$ associé à $\Lambda(t,s)$ par :

$$(\Lambda f)(t) = \int_0^t \Lambda(t,s) f(s) ds \quad \text{pour} \quad f(\cdot) \in L_2(I\ ;\mathcal{K})$$

est de Hilbert-Schmidt.

Démonstration

a) En appliquant l

$|\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle| =$

où u_i représente la i^e coordo

$|\langle\Lambda(t,s)e_i,\ e_j\rangle| \leq E\{|u_i(t,\omega)$

d'où par sommation

$\|\Lambda(t,s)\|_1^2 = \sum_{i,j} |\langle$

puis :

$\|\Lambda(t,s)\|_1^2 \leq E\{\sum_i u_i^2(t,\omega)\} \cdot E\{$

b) L'application

$(t,s) \rightarrow \|\Lambda(t,s)$

est mesurable. D'après le *a)*

$\|\Lambda(t,s)\| \leq \|\Lambda(t$

Elle est donc de ca
associé Λ est de Hilbert-Schm

Normes de l'opérateur Λ

On prendra pour no

1° - $\|\Lambda\| = \operatorname*{Sup}_{t,s \in I}$

2° - $\|\Lambda\|_1 = \operatorname*{Sup}_{t,s \in I}$
et le § I-2.

3° - $n(\Lambda) = \left(\int_0^T\int_0^T \|\Lambda(t,s)\|^2 \, dt\, ds\right)^{1/2}$ comme norme d'opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathcal{Y}(L_2(I\,;\mathcal{U}))$.

Conséquences

Comme $\|\Lambda(t,s)\| \leq \|\Lambda(t,s)\|_1 \leq \|u\|^2$ on a :

$$\|\Lambda\| < \|\Lambda\|_1 \quad \text{et} \quad n(\Lambda) < T\|\Lambda\| < T\|\Lambda\|_1$$

(ce qui entraîne $\|a\Lambda a^*\| \leq \|a\|^2\|\Lambda\| \leq \|a\|^2\|\Lambda\|_1$, etc...).

Ceci étant établi, on définit $\mathcal{U}_n$ comme étant le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{U}$ engendré par la base tronquée $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

On note P_n la projection orthogonale de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}_n$.

Comme $\Lambda(t,s) = E\{u_t \otimes u_s\}$ est un opérateur de covariance dans un espace de Hilbert infini, il est compact (voir [5]). Il s'ensuit qu'il est limite uniforme d'une suite d'opérateurs de rang fini, qu'on va construire explicitement (dans $\mathcal{U}_n$) en tenant compte de l'opérateur de covariance W qui intervient dans la détermination de $\Lambda(t,s)$ (voir équation (4)).

Définition 2

W^m sera l'opérateur déduit de W par :

$$W^m = WP_m \quad \text{et} \quad W^m \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$$

On note que rang $W^m = m$.

Lemme 2

W^m converge en norme vers W

Démonstration : Immédiat (mais on s'en sert plus loin).

$$\|W^m - W\| \leq \|W^m - W\|_1 = \sqrt{\sum_{i>m} c_i^2} \xrightarrow{m \to +\infty} 0$$

Définition 3

La suite $\Lambda^m(t,n)$ s

$$\boxed{\Lambda^m(t,s) = G(t)\Lambda_0 G^*}$$

Lemme 3

$\Lambda^m(t,s)$ converge c

Démonstration

On écrit la différ

$\Lambda^m(t,s) - \Lambda(t,s)$

puis en passant à la norme

$\|\Lambda^m(t,s)-\Lambda(t,s)\|$

En prenant alors le sup en s

$\|\Lambda^m-\Lambda\| \leq T\|G\|^2\|B\|$

Définition 4

P_n étant toujours

définit la suite $\Lambda_n(t,s)$ par

$\Lambda_n(t,s) = P_n\Lambda(t,s$

On note de même que rang Λ_n=

Lemme 4

$\Lambda_n(t,s)$ converge

Démonstration

En posant $\Lambda_{ij} = <\Lambda e_i, e_j>$, on a :

$$[\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)]e_i = \sum_{j>n} <\Lambda(t,s)e_i,e_j>e_j = \sum_{j>n} \Lambda_{ij}(t,s)e_j$$

Or le carré de la norme de Hilbert-Schmidt :

$$\|\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)\|_1^2 = \sum_{i,j} |<[\Lambda(t,s)-\Lambda_n(t,s)]e_i,e_j>|^2 = \sum_{i>n}\sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2(t,s)$$

tend uniformément en t et s vers 0, puisque la série double $\sum_{i,j} \Lambda_{ij}^2(t,s)$ est convergente (lemme 1) et on a immédiatement :

$$\|\Lambda-\Lambda_n\| \leqslant \|\Lambda-\Lambda_n\|_1 \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \quad \underline{\text{unif. en } t \text{ et } s}.$$

Définition de la suite double $\Lambda_n^m(t,s)$

On pose $\underline{\Lambda_n^m(t,s) = P_n\Lambda^m(t,s)P_n}$ donc $\Lambda_n^m(t,s) \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$

soit sous forme intégrale :

$$(5) \qquad \boxed{\Lambda_n^m(t,s) = P_nG(t)\Lambda_0G^*(s)P_n + \int_0^{\mathrm{Inf}(s,t)} P_nG(t-p)B(p)W^mB^*(p)G^*(s-p)P_n d_p}$$

<u>Remarque 1</u>

a) $\Lambda_n^m(t,s)$ est de rang n et $\Lambda_n^m(t,s)_{/\mathcal{X}_n} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}_n)$.

b) Sous le signe intégral on a les transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_n \arrow[rr, "P_nGW^mB^*G^*/\mathcal{X}_n"] \arrow[dr, "W^mB^*G^*/\mathcal{X}_n"'] & & \mathcal{H}_n \\ & \mathcal{X}_m \arrow[ur, "P_nGB/\mathcal{X}_m"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Remarque 2</u>

Comme W est diagona

$W^me_i = WP_me_i = P_mWe$

et on pourra donc écrire l'éq
les matrices finies associées

Si donc on pose :

$d_{ik}(t,s) = <G(t)\Lambda_0G$

$h_{ij}(t,p) = <G(t-p)B$

$\Lambda_{ik}^m(t,s) = <\Lambda^m(t,s)$

on a :

$$(6) \qquad \overset{\longleftarrow n \longrightarrow}{\left(\Lambda_{ik}^m(t,s)\right)} = \updownarrow n \left(d_{ik}\right.$$

Equation du type Kalman-Bucy

Ou encore, par projection sur

$$(7) \qquad \Lambda_{ik}^m(t,s) = d_{ik}(t,s)$$

Lemme 5

La suite d'opérateu
en n, vers Λ_n quand $m \to +\infty$.

Démonstration

Comme $\begin{cases}\Lambda_n^m = P_n\Lambda^m P_n\\ \Lambda_n = P_n\Lambda P_n\end{cases}$ et que $\|P_n\| = 1 \quad \forall n\geq 1$

on a :

$$\|\Lambda_n^m-\Lambda_n\| = \|P_n(\Lambda^m-\Lambda)P_n\| \leqslant \|\Lambda^m-\Lambda\|.$$

Or d'après le lemme 3, $\|\Lambda^m-\Lambda\|$ tend vers 0 quand $m\to+\infty$, donc

$$\|\Lambda_n^m-\Lambda_n\| \leqslant \|\Lambda^m-\Lambda\| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \quad \text{uniformément en } n.$$

Proposition 1

Avec les hypothèses de cette première partie : $\Lambda(t,s)$ est limite dans $L_\infty(I^2 ; \mathcal{L}(\mathcal{X}))$ des opérateurs $\Lambda_n^m(t,s)$ quand m et $n\to+\infty$.

Démonstration

On doit montrer que $\|\Lambda_n^m-\Lambda\| \xrightarrow[n\to+\infty]{m\to+\infty} 0$

Or $\|\Lambda_n^m-\Lambda\| \leqslant \|\Lambda_n^m-\Lambda_n\| + \|\Lambda_n-\Lambda\|$

a) d'après le lemme 4

$$\|\Lambda_n-\Lambda\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

b) d'après le lemme 5

$$\|\Lambda_n^m-\Lambda_n\| \leqslant \|\Lambda^m-\Lambda\| \xrightarrow{m\to+\infty} 0$$

donc :

$$\|\Lambda_n^m-\Lambda\| \leqslant \|\Lambda^m-\Lambda\| + \|\Lambda_n-\Lambda\| \xrightarrow[n\to+\infty]{m\to+\infty} 0$$

Proposition 2

a) Soit $\varepsilon_n^2(t,s) = \|\Lambda_n(t,s)-\Lambda(t,s)\|_1^2 = \sum_{i>n}\sum_{j>n}\Lambda_{ij}^2(t,s)$.

Comme $\sum_{i>n}\sum_{j>n}\Lambda_{ij}^2(t,s)$ tend

on pose :

$$\varepsilon_n = \sup_{t,s\in I}\varepsilon_n(t,s)$$

b) Soit R(p) = $\sum_{i>p}$

c) On note $[\frac{p}{2}]$ la

Alors une évaluation de l'ap

$$\boxed{\|\Lambda_n^m-\Lambda\| \leqslant T\|G\|^2\|B\|^2}$$

Démonstration

On part de l'inéga

$\|\Lambda_n^m-\Lambda\| \leqslant \|\Lambda_n^m-\Lambda_n\| +$

a) D'après le lemm

$\|\Lambda_n-\Lambda\| \leqslant \|\Lambda_n-\Lambda\|$

b) Les valeurs pro

. R(n)-R(2n) =

qui nous donne

$c_{2n} \leqslant \frac{2\,R(n)}{2n}$

. De même en éc

R(n)-R(2n+1

on obtient :

$c_{2n+1} \leqslant \frac{2\,R(}{2n+}$

En remarquant que $R(n) > R(n+1) \geq \dots \geq R(n+p) \geq \dots$, on a les majorations :

$$\sum_{k>m} c_k^2 \leq 4\, R^2([\tfrac{m+1}{2}]) \cdot \sum_{k>m} \frac{1}{k^2} \leq \frac{4\, R^2([\frac{m+1}{2}])}{m+1}$$

la dernière égalité étant obtenue en majorant la série convergente $\sum_{k>m} \frac{1}{k^2}$ par l'intégrale de Riemann.

En utilisant maintenant les résultats des lemmes 3 et 5, on a immédiatement le résultat.

III - DETERMINATION DE LA SUITE DOUBLE D'OPERATEURS $K_n^m(t,s)$ CONVERGEANT VERS $K(t,s)$

1 - *Opérateurs* $a_n(t)$, $a_n^*(t)$ *et matrices associées*

Définition

L'opérateur $a_n(\cdot) \in L_\infty(I\ ; \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K}))$ (resp. $a_n^*(\cdot) \in L_\infty(I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}))$) sera défini par $a_n(t) = a(t)P_n$ (resp. $a_n^*(t) = P_n a^*(t)$) où P_n est le projecteur orthogonal de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}_n$.

Si $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_q\}$ est une base orthonormale de $\mathcal{K}$, les matrices associées à $a_n(t)$ et $a_n^*(t)$ s'écriront :

$$\begin{array}{cc} & \overleftrightarrow{\ n\ } \\ \updownarrow q & \begin{pmatrix} a_{ij}(t) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{avec } a_{ij}(t) = \begin{cases} \langle a(t)e_i, e'_j \rangle & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

$$\begin{array}{cc} & \overleftrightarrow{\ q\ } \\ \updownarrow n & \begin{pmatrix} a^*_{ij}(t) \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{avec } a_{ij}(t) = \begin{cases} \langle e_i, a(t)e'_j \rangle & \text{si } i \leq n \\ 0 & \text{si } i > n \end{cases}$$

où $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est la base orthonormale définie dans la partie I.

2 - *Opérateur* $K_n^m(t,p)$

Définition

L'opérateur de ra

(8) $\boxed{K_n^m(t,p)b(p)Vb^*(p)}$

où $\Lambda_n^m(t,s)$ est donné par l'é

L'équation (8) es

et [6]. En effet, $b(p)Vb^*(p)$

dans I-3), donc si on écrit

$C(p) = [b(p)Vb^*(p)]^{-1}$ e

l'équation (8) se ramène à

(9) $\boxed{K_n^m(t,p) + \int_0^t K_n^m(t}$

Soit encore sous forme matr

$K_{ik}^m(t,s) = \langle K_n^m(t,s)e'_i, e_k\rangle$

(10) $\boxed{\begin{array}{cc} & \overleftrightarrow{\ q\ } \\ \updownarrow n & \begin{pmatrix} K_{ik}^m(t,p) \end{pmatrix} \end{array} + \int_0^t}$

Théorème

En reprenant les hypothèses et notations de la partie II

1°) L'équation intégrale (8) a une solution unique $K_n^m(t,\cdot) \in L_\infty(I;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}_n))$ pour tout m et n fixés.

2°) De plus $K_n^m(\cdot,\cdot) \in L_2(I\times I\ ;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H}))$ ($\Leftrightarrow$ de Hilbert-Schmidt)

3°) $K_n^m(t,p)$ tend vers $K(t,p)$ quand m et $n \to +\infty$, pour la norme $n(\cdot)$, une évaluation de la vitesse de convergence est donné par :

$$\boxed{\begin{gathered} n(K_n^m - K) \leq \frac{\|a\|}{d}\, \|b^{-1}\|^2 \left[1 + \frac{\|a\|^3}{d}\, \|b^{-1}\|^2 \cdot n(\Lambda)\right] \cdot n(\Lambda_n^m - \Lambda) \\ \text{où } d = \operatorname*{Inf}_{\|g\|=1} \ll Vg,g \gg \end{gathered}} \tag{11}$$

Remarque

Sous le signe intégral de l'équation (8), on a les transformations :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[r, "a^*_{n/\mathcal{H}_n}"] \arrow[d, "a_n\Lambda_n^m a_n^*"'] & \mathcal{H}_n \arrow[d, "\Lambda^m_{n/\mathcal{H}_n}"] \\ \mathcal{K} & \mathcal{H}_n \arrow[l, "a_{n/\mathcal{H}_n}"] \end{tikzcd}$$

et $\Lambda^m_{n/\mathcal{H}_n}$ est une suite d'opérateurs à valeurs dans $\mathcal{H}'_n$ et une sous-suite double d'opérateurs à valeurs dans $\mathcal{H}$.

Démonstration du 1° et du 2°

1°) Pour t fixé, on pose :

$$F_n^m(p,t) = a_n(p)\Lambda_n^m(p,t) = a(p)P_n \cdot P_n\, \Lambda^m(p,t)P_n = a(p)P_n\Lambda^m(p,t)P_n = a(p)\Lambda_n^m(p,t)$$

D'après la partie II

a) lim $F_n^m(p,t) = F(p,t) =$

et $F_n^m(\cdot,\cdot) \in L_\infty(I\times I\ ;\mathcal{L}($

b) Par suite, $F_n^m(p,t)$ est

Cette remarque

2°) Soient Q_n^m e

par :

$f(\cdot) \in L_2(I\ ;\mathcal{K})$ $\begin{cases} Q_n^m f(q \\ Qf(p) \end{cases}$

Comme $a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(s)$ et

déduit que :

Q_n^m et $Q \in \mathcal{L}(L_2$

Remarque

On a :

$(Q_n^m \circ K_n^{m*})(t,p)$

Lemme 1

L'opérateur Q_n^m

$\|(Q_n^m)^{-1}\| < \frac{\|b^{-1}}{d}$

avec :

$d = \operatorname*{Inf}_{\|g\|=1} \ll Vg,g$

(donc $K_n^{m*}(t,p) = (Q_n^m)^{-1} \circ$

Démonstration

a) Q_n^m (resp. Q) est continu

Immédiat puisque $b(p)Vb^*(p)$ et $a_n(p)\Lambda_n^m(p,q)a_n^*(s)$ (resp. $a(p)\Lambda(p,s)a^*(s)$) sonr continus ($a_n(p)\Lambda_n^m(p,s)a_n^*(s)$ est construit de façon à ne pas altérer la continuité).

b) $(Q_n^m)^{-1}$ existe

Il suffit de montrer que Q_n^m est coercif pour le produit scalaire $<<\cdot,\cdot>>$ dans $L_2(I\,;\mathcal{K})$ (lemme de Lax-Milgram) soit :

$$<<Q_n^m f,f>> = \int_0^T <b(p)Vb^*(p)f(p),f(p)>dp + \int_0^T <\int_0^P a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(n)f(s)ds,f(p)>dp$$

Or $\Lambda_n^m(p,s)$ déduit de l'opérateur $\Lambda(p,s)$ positif est positif puisque W^m est positif. Donc $\Lambda_n^m(p,s) = P_n\Lambda^m(p,s)P_n$ est positif et :

$$\int_0^T <\int_0^P a(p)\Lambda_n^m(p,s)a^*(s)f(s)ds,f(p)>dp = \int_0^T <\int_0^P \Lambda_n^m(p,s)a^*(s)f(s)ds,a^*(p)f(p)>dp \geqslant 0$$

De plus, l'opérateur V est strictement positif, comme opérateur de covariance inversible dans K de dimension finie.

Il est donc licite de poser $d = \operatorname*{Inf}_{\|g\|=1} <<Vg,g>> > 0$, qui est atteint sur la boule unité qui est compacte dans K, et on a pour tout $g \in L_2(I\,;\mathcal{K})$

$$d\|g\|^2 \leqslant <<Vg,g>> \quad \text{donc} \quad d\|g\| \leqslant \|Vg\| \quad \text{et}$$

$$\boxed{\int_0^T <b(p)Vb^*(p),f(p)>dp = \int_0^T <Vb^*(p)f(p),b^*(p)f(p)>dp \geqslant d\int_0^T \|b^*(p)f(p)\|^2 dp} \tag{12}$$

mais $b^*(p) \in \mathcal{L}(\mathcal{K}^*)$ étant inversible, on a aussi :

$$1 = \|b^*(p)(b^*(p)^{-1}\| < \|b^*(p))^{-1}\| < \|b^*(p)\|.\|b^{-1}\|$$

puisque $\qquad \|b^{-1}\| = \|(b^{-1})^*\|$

d'où $\qquad \|b^*(p)\| > \dfrac{1}{\|b^{-1}\|}$

- ESTIMATEUR DE FILTRAGE 10 -

et l'inégalité (12) devient

$$\int_0^T <b(p)Vb^*(p)f(p),f(p)>dp \geqslant$$

soit : $\qquad <<Q_n^m f,f>> \geqslant \dfrac{d}{\|b^{-1}\|^2}$

En particulier, le

on a aussi :

$$<<Qf,f>> \geqslant \frac{d}{\|b^{-1}\|^2}$$

ce qui montre que Q_n^m est coe

de Max-Milgran, on a :

$$\|(Q_n^m)^{-1}\| \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}$$

Démonstration du 1°

Le lemme 1 assure

$K_n^m(t,\cdot) \in L_\infty(I\,;\mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{X}))$.

Démonstration du 2°

On doit montrer qu

D'après ce qui précède K_n^{m*} (t

et $\|(Q_n^m)^{-1}f\| \leqslant \|(Q_n^m)^{-1}\|.\|f\|$.

$$K_n^{m*}(t,p) = (Q_n^m)^{-1}$$

$$\int_0^T \|K_n^{m*}(t,p)\|^2 dp = \int_0^T \|(Q_n^m)^{-1}$$

pour tout t fixé.

Or l'application t

(puisque $(Q_n^m)^{-1}$ est continue

$$t \longrightarrow (\int_0^T$$

est de carré intégrable car

Ce qui, avec l'inégalité du lemme 1 : $\|(Q_n^m)^{-1}\| \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}$, nous donne :

$$\int_0^T\int_0^T \|K_n^{m^*}(t,p)\|^2 dp\,dt \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^4}{d} \int_0^T\int_0^T \|F_n^m(t,p)\|^2 dt\,dp = \frac{\|b^{-1}\|^4}{d}\, n(F_n^m)$$

soit puisque $\|K_n^{m^*}(t,p)\| = \|K_n^m(t,p)\|$

$$(13)\qquad \boxed{n(K_n^m) = n[(Q_n^m)^{-1} \circ F_n^m] \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}\, n(F_n^m) < +\infty}$$

La démonstration du 3°) nécessite un autre lemme :

Lemme 2

Quand m et n $\to +\infty$

a) Q est limite en norme de Q_n^m, dans $L_2(I\,;\mathcal{K})$, et :

$$\|Q-Q_n^m\| < \|a\|^2 \cdot n(\Lambda_n^m-\Lambda)$$

b) Q^{-1} est limite en norme de $(Q_n^m)^{-1}$ dans $L_2(I\,;\mathcal{K})$ et :

$$\|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| < \|a\|^2\, \frac{\|b^{-1}\|^4}{d^2} \cdot n(\Lambda_n^m-\Lambda)$$

Démonstration

a) Soit $f(\cdot) \in L_2(I\,;\mathcal{K})$, on a :

$$(Q_n^m-Q)f(p) = \int_0^p a(p)\,[\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)]\,a^*(s)\,ds$$

En prenant les normes

$$\|(Q_n^m-Q)f(p)\| \leqslant \|a\|^2 \int_0^p \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|\cdot\|f(s)\|ds \leqslant \|a\|^2\int_0^T \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|\cdot\|f(s)\|ds$$

puis en appliquant l'inégalité de Schwarz

$$\|(Q_n^m-Q)f(p)\|^2 \leqslant \|a\|^4 \int_0^T \|\Lambda_n^m(p,s)-\Lambda(p,s)\|^2 ds \cdot \int_0^T \|f(s)\|^2 ds$$

et en intégrant alors en p

$\int_0^T \|(Q_n^m-Q)f(p)\|^2 dp \leqslant \|a\|^4 \int_0^T$

on obtient :

$\|(Q_n^m-Q)f\| \leqslant \|a\|^2 \cdot$

soit : $\|Q_n^m-Q\| \leqslant \|a\|^2 \cdot n(\Lambda$

b) Considérons maintenant l

$(Q_n^m)^{-1}-Q^{-1} = (Q_n^m)$

qui nous donne immédiatemen

$\|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| \leqslant$

Or, en vertu du lemme 1

$\|(Q_n^m)^{-1}\| \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d}$

et d'après le *a)* précédent

donc : $\|(Q_n^m)^{-1} - Q^{-1}\| \leqslant$

Démonstration du 3°

Soit : $K_n^{m*}(t,p) -$

En posant $S_n^m = (Q_n^m)^{-1}$ et S

$K_n^{m*}(t,p) - K^*(t,p) = S_n^m \circ [$

En utilisant alors le lemme

$n(K_n^{m*}-K^*) \leqslant n[S_n^m(F_n^m-F)] + n$

ce qui, avec les inégalités

$n(K_n^m-K) \leqslant \|S_n^m\| \cdot n(F_n^m-F) + \|S$

Soit $n(K_n^m-K) \leqslant \frac{\|b^{-1}\|^2}{d} \cdot n(F_n^m$

ce qui avec le lemme 2 et $F(t,p) = a(t)\cdot\Lambda(t,p)$ nous donne :

$$n(K_n^m-K) \leq \frac{\|a\|}{d}\cdot\|b^{-1}\|^2 [1 + \frac{\|a\|^2}{d} \|b^{-1}\|^2 \cdot n(\Lambda)] \cdot n(\Lambda_n^m-\Lambda) \xrightarrow[n \to +\infty]{m \to +\infty} 0$$

et le c) est démontré.

Corollaire

Reprenons les hypothèses et notations de la proposition 2, partie II, et posons :

$$M = T \frac{\|a\|}{d} \|b^{-1}\|^2 [1 + \frac{\|a\|^2}{d} \|b^{-1}\|^2 n(\Lambda)]$$

Une évaluation de l'approximation de $K(t,p)$ sera donnée par :

$$\boxed{n(K_n^m-K) \leq MT\|G\|^2\|B\|^2 \frac{2R([\frac{m+1}{2}])}{\sqrt{m+1}} + M.\varepsilon(n)}$$

IV - APPLICATION : EQUATION STOCHASTIQUE DE LA CHALEUR DANS LE CAS D'UNE TIGE DE LONGUEUR INFINIE

Cette quatrième partie est consacrée au calcul explicite des matrices associées aux opérateurs $N_n^m(t,p)$ et $L_n^m(t,p)$ (permettant de résoudre l'équation de Bucy [2]) déduits de l'application à une équation de chaleur stochastique, et comporte trois paragrahes :

A - Hypothèses et résultats.

B - Calcul des coefficients matriciels $\Lambda_{kl}^m(t,s)$, $N_{lj}^m(t,s)$ et $L_{ij}(t,p)$.

C - Evaluation des erreurs.

A - HYPOTHESES ET RESULTATS

On considère les éq

(I) $\begin{cases} \frac{du}{dt}(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$

. $\frac{du}{dt}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)$ repr

chaleur en fonction du temps

. On suppose que cette prop

dépendant de x. Par exemple,

$s \longrightarrow W_s$ est un brownien à

$(x,s) \longrightarrow f(x,s)$ est une f

(x,s).

Alors $W(t,s) = \int_0^t f(x,s)dW_s$ e

. $u(x,0)$ est la solution à

. On prend $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ et on

On se ramène ainsi à la situa

l'élément $u_t = u(\cdot,t)$ de $L_2($

. On modélisera la perturba

dont la covariance W admet po

$f_n(x)$

$f_n(x) = (\sqrt{\pi}\ 2^n\ n!)$

et pour valeurs propres corre

Les $f_n(x)$ engendrent l'espace

nique et formant une base or

L'équation (I) déf

est associée une équation d'

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z(x,t)}{dt}\,dt = a.u(x,t)dt + dV(t) \\ \\ z(x,0) = 0 \text{ solution à l'origine} \end{cases}$$

où z est à valeurs dans $\mathbb{R}^q$, espace des observations.

Par analogie avec le bruit blanc, on supposera que l'opérateur de covariance du brownien v(t) (d'observation)

$V = I$ = identité dans $\mathbb{R}^q$

On prendra pour a un opérateur de discrétisation permettant de simplifier les calculs et observations, ici, par exemple :

$$au(x,t) = (u(0,t),\ u(1,t),\ \dots,\ u(q-1,t))$$

Avec cette définition, l'intervalle de calcul sera $[0,q]$

. $\{e_i\}_{1<i<q}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^q$

. Il est bien connu que l'opérateur d'évolution G(t) associé à l'opérateur $A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ dans $L_2(\mathbb{R})$ est donné par :

$$(14)\quad \boxed{[G(t)\cdot u_0](x) = \int_0^{+\infty} G(t,x-y)u_0(y)dy \quad \text{où} \quad G(t,x) = (\sqrt{4\pi t})^{-1}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}}$$

(G(t) est un opérateur de convolution en x).

Nous allons d'abord rappeler un lemme connu.

Lemme

Les fonctions d'Hermitte $f_n(x)$ sont solutions de l'équation intégrale linéaire :

$$i^n\sqrt{2\pi}\cdot f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(s)e^{isx}dx$$

ou encore : la transformée de Fourier de f_n est $i^n f_n$.

Remarques

1) $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$ do

2) $G^*(t) = G(t)$

B - CALCULS DES COEFFICIEN

a) Le calcul de $\Lambda^m_{kl}(t,s)$

$d_{kl}(t,s) = < \Lambda \circ G(t)f_k$

(voir équation (7)).

. *Calcul de* $f_{kl}(t,s) = < \Lambda$

Pour tout ω fixé

u_0 est la solution à l'ori

Fourier préserve le produi

la transformée de Fourier

" " " "

" " " "

On a :

$< G(t)u_0,f_k > =$

soit : $< G(t)u_0,f_k > =$

et : $< G(t)u_0,f_k > =$

d'où :

$d_{kl}(t,s) = i^{k+1}$

.. *Calcul de* $h_{jk}(t-p) = \langle G(t-p)f_k, f_j \rangle$

La transformée de Fourier $F_k(x,t-p)$ de $[G(t-p)\, f_k](x)$ étant :

$$F_k(x,t-p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(y)\, e^{-(t-p)y^2} e^{ixy}\, dy$$

on a :

$$h_{jk}(t-p) = \langle G(t-p)f_k, f_j\rangle = i^j \langle F_k(t-p), f_j\rangle = \frac{i^j}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(y)e^{-(t-p)y^2}dy\int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x)e^{ixy}dx$$

qui nous donne, tous calculs faits :

$$\boxed{h_{kj}(t-p) = \begin{cases} 0 \text{ si } k+j \text{ impair} \\ (-1)^j \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\, e^{-(t-p)x} dx \quad \text{si } k+j \text{ pair}\end{cases}}$$

ce qui nous permet d'exprimer $\Lambda^m_{kl}(t,s)$ (cf. équation (7)) :

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda^m_{kl}(t,s) &= i^{k+l}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)e^{-tx^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(y)\, e^{-ty^2} E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\}dy \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2}\int_0^{Inf(s,t)} dp \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)f_j(x)f_j(y)f_l(y)\, e^{-(t-p)x^2-(s-p)y^2}dxdy \end{aligned}}$$

Si t>s par exemple, le second membre se ramène à une forme plus simple et :

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda^m_{kl}(t,s) &= i^{k+l}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)e^{-tx}ds \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(y)\, e^{-sy^2} E\{\tilde{u}_0(x)\tilde{u}_0(y)\}dy \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)f_l(y)f_j(x)f_j(y)\,[e^{-(t-s)x^2} - e^{-tx^2-sy^2}]\,\frac{dxdy}{x^2+y^2} \end{aligned}}$$

qui détermine Λ^m_{kl} pour tout m, k et l, et qu'on peut calculer (voir [4]).

b) L'expression précédent

En effet, comme $a_{kl} = \langle af_k$

d'Hermitte prise au point x

$N^m_{lj}(t,s) = \langle a\Lambda^m_n(t,s)a^*$
$L^m_{ij}(t,p) = \langle \Lambda^m_n(t,p)a^*e$

Ces expressions étant connu

$$K^m_{ij}(t,p) + \sum_{l=1}^{q}\int_0^t K^m_{il}(t,s)N^m_{lj}$$

en découle.

C - EVALUATION DES ERREURS

Remarque

La fonction $E\{\tilde{u}_0($

$e^{\frac{x^2}{2}} P_n(x)$ étant connues, l

méthode d'approximation qua

seulement consacrée à expli

On ne diminue pas

a) *calcul de* $M = \frac{\|a\|}{d}\|b^{-1}$

. Supposons pour simplifie

laborieux calculs permetten

1) $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)f_j(x)e^{-(t-p)x^2}\right.$

2) $$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)e^{-tx^2}dx\right| = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \sqrt{\dfrac{2\sqrt{\pi}}{2^{2p}(2p)!}}\left(\dfrac{2t-1}{2t+1}\right)^p \leq \dfrac{1}{2^p} & \text{si } n=2p \end{cases}$$

Dans ces conditions, une majoration de $\Lambda_{k,l}(t,s)$ s'écrit :

$$|\Lambda_{2k,2l}(t,s)| \leq \frac{E}{2^{k+l}} + \sum_{j\geq 1} \frac{e^{-k-l-2j}}{j^2} \leq \frac{E}{2^{k+l}} + \frac{e^{-k-l}}{e^2-1}$$

d'où :

$$|\Lambda_{2k,2l}(t,s)|^2 \leq \frac{2\,E^2}{2^{2k+2l}} + \frac{2}{(e^2-1)^2}\,e^{-2k-2l}$$

et :

$$n(\Lambda) \leq \sqrt{\frac{2E^2}{9} + \frac{2}{(e^2-1)^4}} \leq \sqrt{\frac{2}{9}(E^2 + \frac{1}{144})}$$

Comme les $f_n(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$, il existe aussi i_0 et j_0 tels que :

$$\|a\| = \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq k}} |a_{ij}| = \sup_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq q}} |f_i(j)| = |f_{i_0}(j_0)|$$

et on a donc :

$$M \leq |f_{i_0}(j_0)|\,\{1 + |f_{i_0}(j_0)|^3[\sqrt{\tfrac{2}{9}(E^2 + \tfrac{1}{144})} + 1\}$$

b) Majoration de $n(K_n^m - K)$

. Le reste $\varepsilon^2(n) = \sum_{i>n}\sum_{j>n} \Lambda_{ij}^2$ se déduit de la majoration de $|\Lambda_{2k,2l}(t,s)|^2$, soit :

$$\varepsilon(n) \leq \sqrt{\frac{2}{9}(\frac{E^2}{2^n} + \frac{e^{-n}}{144})}$$

.. Et enfin si $R([\frac{m+1}{2}])$
de Riemann, on a :

$$R([\tfrac{m+1}{2}]) \leq \frac{2}{m}$$

ce qui nous permet d'écr

$$\boxed{n(K_n^m - K) \leq \frac{4M}{m\sqrt{m+}}}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] ASTROM Karl Introduction to Stochastic Control Theory. Academic Press.

[2] BUCY Filtering for Stochastic Process with application to Guidance.

[3] CURTAIN a) Stochastic Differential Equation in Hilbert Space. Journal of Differential Equation 1974

b) Infinite Dimensional Filtering 1975 - Maxwell Institute - University of Warwick.

[4] KRILOW Approximate Calculation of Integrals.

[5] NEVEU Processus Aléatoires Gaussiens. Cours 3e cycle 1966 Paris.

[6] YOSIDA Equations Différentielles et Intégrales. Dunod.

-=-=-=-=-