

J. P. CONZE

M. KEANE

Ergodicité d'un flot cylindrique

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 2

« Séminaire de probabilité I », , exp. n° 5, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__2_A5_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ERGODICITE D'UN FLOT CYLINDRIQUE

par

J.P. CONZE et M. KEANE

NOTE : On trouvera dans "équirépartition et ergodicité de transformations cylindriques (ce même volume)" une autre rédaction de la démonstration du théorème principal de cet article.

Il nous a paru utile, cependant, de reproduire ici la démonstration complète de ce seul théorème.

Soit $X = \mathbb{R} / \mathbb{Z}$ le tore de dimension 1 muni de la mesure de Lebesgue μ , et identifié à l'intervalle $[0,1[$. Sur l'espace $\Omega = X \times \mathbb{Z}$ on considère la mesure (infinie) m produit de μ par la mesure de dénombrement sur $\mathbb{Z}$. Soient $T_\alpha : x \longrightarrow x + \alpha \bmod 1$ la rotation d'angle irrationnel α sur X et S_α le produit gauche défini sur Ω par $S_\alpha(x, z) = (T_\alpha x, z + \varphi(x))$, où $\varphi(x) = +1$ pour $0 \leq x < 1/2$ et $\varphi(x) = -1$ pour $1/2 \leq x < 1$.

Les mesures μ et m sont respectivement invariantes par T_α et S_α , et la transformation T_α est ergodique sur (X, μ) . Le but de cette note est de prouver l'ergodicité de S_α sur (Ω, m) . Ce résultat a été obtenu par K. SCHMIDT ⁽¹⁾ pour des valeurs particulières de α

Théorème :

Pour tout irrationnel α , la transformation S_α est ergodique sur (Ω, m)

1 - Un lemme sur la répartition des points $\{T_\alpha^k x\}$:

Pour toute fonction ψ sur X , et pour $q \geq 1$, nous noterons ψ_q la fonction $\psi_q(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \psi(T_\alpha^k x)$. Remarquons la relation :

$$S_\alpha^q(x, z) = (T_\alpha^q x, z + \psi_q(x))$$

Lemme ⁽²⁾ : Soit $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Soient $p, q \geq 1$ entiers tels

que : $(p, q) = 1$ et $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$. On a alors :

$$|\psi_q(x) - q \int \psi d\mu| \leq \text{Var}(\psi),$$

pour chaque $x \in X$, $\text{Var}(\psi)$ étant la variation totale de ψ sur X .

Démonstration :

L'hypothèse sur q implique que chaque intervalle $[j/q, \frac{j+1}{q}[$, $j = 0, \dots, q-1$, contient un point $k\alpha \bmod 1$, $0 \leq k < q$. Soit I_k l'intervalle contenant $k\alpha \bmod 1$. Il suffit de montrer le lemme pour $x = 0$.

On a :

$$\begin{aligned} |\psi_q(0) - q \int \psi d\mu| &= \left| \sum_{k=0}^{q-1} q \int_{I_k} (\psi(k\alpha) - \psi(x)) d\mu(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{q-1} \text{Var}(\psi, I_k) \leq \text{Var}(\psi). \end{aligned}$$

Corollaire : ⁽³⁾

Il existe une suite (q_n) d'entiers positifs impairs, telle que

$q_n \alpha \longrightarrow 0 \bmod 1$ et telle que, pour chaque n et chaque x ,

$$|\psi_{q_n}(x)| \leq 3$$

Démonstration :

Prenons pour (q_n) la suite des éléments impaire des dénominateurs des quotients partiels $\frac{p_n}{q_n}$ de la fraction continue associée à α .

Le lemme et la relation $\int \psi d\mu = 0$ impliquent $|\psi_{q_n}(x)| \leq 4$.

Comme $\psi_{q_n}(x)$ est impair, on peut remplacer 4 par 3.

2 - Une équation fonctionnelle :

Posons $\omega(x) = j \psi(x)$. Nous montrons que l'équation fonctionnelle $h(x + \alpha) = \omega(x) h(x)$ n'a pas de solution mesurable non nulle. (Voir également (4)).

Soit h une solution mesurable non nulle. Le module de h est invariant par T_α , donc constant, et non nul par hypothèse. Nous avons la relation

$$h(x + q\alpha) = \omega_q(x) h(x),$$

où

$$\omega_q(x) = \prod_{j=0}^{q-1} \omega(x + j\alpha) = j \psi_q(x).$$

Soit q_n la suite donnée par le corollaire. Alors $h(x + q_n \alpha)$ tend vers $h(x)$ dans L^1 , et nous avons :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |h(x) - h(x + q_n \alpha)| d\mu(x) = \text{Const.} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |1 - \omega_{q_n}(x)| d\mu(x).$$

Considérons pour chaque n la fonction :

$$\omega_{q_n}^*(x) = \prod_{j=0}^{q_n-1} \omega(x + j/q_n).$$

Nous savons (5) qu'il existe une constante $c < 1$ telle que $\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{c}{q_n^2}$, pour n suffisamment grand. Si

$k\alpha \in \left[\frac{j}{q_n}, \frac{j+1}{q_n} \right[$, l'ensemble des x tels que $\omega(x + \frac{j}{q_n}) \neq \omega(x + k\alpha)$ a une mesure égale à $2 \left| k\alpha - \frac{j}{q_n} \right| \leq \frac{2kc}{q_n^2}$.

Il en résulte :

$$\mu \{x : \omega_{q_n}(x) \neq \omega_{q_n}^*(x)\} \leq \sum_{k=0}^{q_n-1} \frac{2kc}{q_n^2} < c$$

Posons :

$D_n(x) = \{x : \omega_{q_n}(x) = \omega_{q_n}^*(x)\}$. On a :

$\mu(D_n) \geq 1 - c > 0$ et :

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} |1 - \omega_{q_n}^*(x)| d\mu(x) < \lim_{n \rightarrow +\infty} \int |1 - \omega_{q_n}(x)| d\mu(x) = 0$$

Par ailleurs, on voit facilement que, pour tout x et tout n , $\omega_{q_n}^*(x) = j \pm 1$, car q_n est impair. On a donc :

$$\int_{D_n} |1 - \omega_{q_n}^*(x)| d\mu(x) = |1 - j| \mu(D_n) \geq (1-c) |1-j| > 0,$$

ce qui conduit à une contradiction.

3 - Démonstration du théorème :

Soit $A \subseteq \Omega$ un ensemble mesurable invariant par S_α et de mesure non nulle.

Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ posons $B_k = \{x \in X : (x, k) \in A\}$.

Ces ensembles sont mesurables et, d'après l'invariance de A par S_α , $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ est invariant par T_α . L'ergodicité de T_α implique que :

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k \mod \mu.$$

Posons $C_k^{+1} = B_k \cap B_{k+1}^c$, $C_k^{+3} = B_k \cap B_{k+3}^c$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Comme $q_n \alpha \longrightarrow 0$, nous pouvons supposer, en remplaçant au besoin q_n par une sous-suite, que :

$$1_{C_k^{+1}}(x + q_n \alpha) \longrightarrow 1_{C_k^{+1}}(x),$$

$$1_{C_k^{+3}}(x + q_n \alpha) \longrightarrow 1_{C_k^{+3}}(x),$$

pour μ presque tout x et tout $k \in \mathbb{Z}$.

En utilisant à nouveau l'ergodicité de T_α , le fait que $q_n \alpha \longrightarrow 0$ et la symétrie des données $[\varphi(x + 1/2) = -\varphi(x)]$, on montre facilement que l'une au moins des deux situations suivantes est réalisée :

- il existe des ensembles D_1 et D'_1 de mesure 1 dans X tels que, pour tout $x \in D_1$, resp. tout $x \in D'_1$, $\varphi_{q_n}(x) = +1$, resp. $\varphi_{q_n}(x) = -1$, pour une infinité d'entiers n .
- il existe des ensembles D_3 et D'_3 de mesure 1 dans X tels que, pour tout $x \in D_3$, resp. tout $x \in D'_3$, $\varphi_{q_n}(x) = +3$, resp. $\varphi_{q_n}(x) = -3$, pour une infinité d'entiers n .

Montrons que, dans la première situation, on a $B_k \subseteq B_{k+1} \mod \mu$, pour tout k . Dans le cas contraire, on aurait $\mu(C_k) > 0$ pour un entier k . Soit $x \in C_k \cap D_1$. Pour $n \geq n(x)$, nous avons $x + q_n \alpha \in C_k$, donc $(x, k) \in A$.

et $(x + q_n \alpha, k + 1) \notin A$, pour $n \geq n(x)$. Puisque $x \in D_1$, il existe un $n_0 \geq n(x)$ tel que l'on ait aussi $\varphi_{q_{n_0}}(x) = 1$. Ceci implique $S_\alpha^{n_0}(x, k) = (x + q_{n_0} \alpha, k + 1)$, ce qui contredit l'invariance de A par S_α . On a donc $\mu(C_k) = 0$ et $B_k \subset B_{k+1} \pmod{\mu}$, pour tout k .

Un raisonnement analogue utilisant l'ensemble D'_1 montre que, dans la première situation, on a également $B_k \subset B_{k-1} \pmod{\mu}$, pour tout k .

Les ensembles B_k coïncident $\pmod{\mu}$, et sont donc égaux à leur union qui est X . D'où $A = \Omega \pmod{\mu}$.

Dans la deuxième situation, on montre par le même raisonnement et en utilisant les ensembles D_3 et D'_3 que $B_k = B_{k+3} \pmod{\mu}$, pour tout k . Posons $\phi(x) = \{k \in \mathbb{Z} : (x, k) \in A\}$. Pour presque tout x , l'ensemble $\phi(x)$ est non vide et invariant par translation par l'entier 3.

Si pour un ensemble de x de mesure positive, on a $\{0, 1, 2\} \subset \phi(x)$, alors $\phi(x) = \mathbb{Z}$ pour presque tout x , ce qui implique $A = \Omega \pmod{\mu}$.

En remplaçant au besoin A par son complémentaire, nous pouvons donc supposer que seul l'un des entiers 0, 1 ou 2 est dans $\phi(x)$ pour presque tout x . Soit $f(x)$ cet entier. La fonction est alors solution de l'équation fonctionnelle :

$$f(x + \alpha) = f(x) + \varphi(x) \pmod{3},$$

qui s'écrit sous forme multiplicative :

$$h(x + \alpha) = \omega(x) h(x),$$

avec $h(x) = j^{f(x)}$.

D'après le paragraphe 2, cette équation n'a pas de solution mesurable non nulle, ce qui fournit une contradiction.

JP CONZE et M KEANE

Université de Rennes

E.R.A. 250 du CNRS

B.P. 25 A

35031 - RENNES CEDEX

BIBLIOGRAPHIE

- [1] K. SCHMIDT Ergodicity of a cylinder flow, Preprint.
- [2] Dû à KOKSMA, voir L. KUIPERS, H. NIEDERREITER
Uniforme distribution of sequences, Wiley 1974.
- [3] H. ANZAI Ergodic skew product transformations on the
torus. Osaka Math. J. vol. 3, n° 1, 1951.
- [4] A. B. KATOK, A.M. STEPIN Approximation en théorie ergodique
Usp. Mat. Nauk t. 22, 1967.
- [5] A. Ya KHINCHIN Continued fraction, Noordhoff 1963.