PIERRE GRISVARD
GÉRARD LOOSS

Problèmes aux limites unilatéraux dans des domaines non réguliers

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-26
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A9_0>

PROBLEMES AUX LIMITES UNILATERAUX
DANS DES DOMAINES NON REGULIERS

par

Pierre GRISVARD et Gérard LOOSS

Cet exposé est consacré à l'étude de la régularité de la solution de problèmes du type suivant : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à frontière au moins localement lipshitzienne, β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et A une matrice symétrique définie positive à coefficients lipshitziens définis dans $\overline{\Omega}$; pour $f \in L^2(\Omega)$ donnée, on considère u solution du problème :

$$(1) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}.\ A \ \operatorname{grad} u + u = f & \text{pp. dans } \Omega \\ -\nu \, . \, A \ \operatorname{grad} u \quad \beta(u) & \text{pp sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

où ν est le champ de vecteurs normal sur Γ, sortant de Ω .

Il est connu que ce problème admet une solution unique u dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$; cette solution est obtenue par minimisation sur $H^1(\Omega)$ de la fonctionnelle

$$v \longrightarrow \varphi(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|A^{1/2} \operatorname{grad} v|^2 + |v|^2 \right] dx - \int_\Omega f \, v \, dx + \int_\Gamma j(v) \, d\sigma$$

où j est une fonction numérique convexe définie sur $\mathbb{R}$, dont β est le sous-différentiel et où $d\sigma$ est la mesure de surface sur Γ. Cette méthode peut être appliquée dès que Γ est localement lipshitzienne si on entend la condition aux limites dans un sens faible.

On cherchera ici des conditions sur Ω et A assurant que la solution u soit dans $H^2(\Omega)$ c.a.d. ait ses dérivées secondes de carré intégrable.

En gros, on atteindra ici deux types de résultats (qui seront énoncés rigoureusement, plus loin).

I. Si Ω est convexe quelconque et $\mathbb{A}$ proche de l'identité (c.a.d. div $\mathbb{A}$ grad proche de l'opérateur de Laplace Δ) alors $u \in H^2(\Omega)$, sans restriction sur β.

II. Si Ω est convexe quelconque et β particulier (c.a.d. correspondant aux conditions de Dirichlet, Neuman ou Signorini(#)) alors $u \in H^2(\Omega)$, sans restriction sur $\mathbb{A}$.

Des résultats de régularité de ce type ont été obtenus auparavant par <u>Fichera</u> [5] (pour le problème de Signorini en élasticité) et par <u>Brezis</u> [2] qui supposent que Γ est régulière, c.a.d. de classe C^∞ mais il est clair que les démonstrations indiquées par ces Auteurs, fonctionnent lorsque Γ est de classe $C^{1,1}$ (classe des fonctions à gradient Lipshitzien).

Les frontières considérées ici peuvent être beaucoup moins réguliers puisque l'exemple du polyèdre convexe montre que Γ peut être seulement lipshitzienne. A ce propos, il est utile de remarquer que tout ouvert convexe Ω a sa frontière localement lipshitzienne : pour s'en convaincre on vérifie que Ω a localement la propriété du cône uniforme (<u>Agmon</u> [1], <u>Nečas</u> [10]), ce qui est évident géométriquement ; ensuite, on utilise l'équivalence entre la propriété uniforme du cône et la propriété d'une frontière d'être lipshitzienne (<u>Chenais</u> [4]).

La convexité de la frontière (au moins dans les points où elle n'est pas de classe $C^{1,1}$) est une condition nécessaire pour que la solution

---

(#) Pour le problème de Signorini, on ne considèrera que le cas où Ω est un polygône plan.

appartienne à $H^2(\Omega)$, comme le montre l'exemple du problème de Dirichlet (qui correspond à $\beta(t) = \emptyset$ si $t \neq o$ et $\beta(t) = \mathbb{R}$ si $t = o$). En effet, on sait que si Ω est un polygône plan dont le plus grand des angles intérieurs a pour mesure ω, on peut trouver $u \in H^1_o(\Omega)$ solution de $\Delta u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et tel que

$$u \notin W^{s,p}(\Omega)$$

pour $S = \frac{\Pi}{\omega} + \frac{2}{p}$, $1 < p < +\infty$ (Grisvard [6]). Ceci montre bien que la convexité est nécessaire pour que $u \in H^2(\Omega)$. De plus, même si f est donné très régulier, on ne peut pas espérer que la solution u du problème (1) dans Ω polygône convexe soit dans $H^S(\Omega)$ avec $S > 2$ ou dans $W^{2,p}(\Omega)$ avec $p > 2$, sans imposer de restriction supplémentaire sur Ω.

Toujours en ce qui concerne le problème de Dirichlet, le résultat de régularité dans un ouvert convexe borné quelconque est dû à Kadlec [8].

La méthode de démonstration de régularité utilisée ici, suit les idées suivantes : il y a deux sources de singularités qui sont Ω et β ; on s'en débarrassera en faisant des approximations. On approche Ω à l'aide d'une suite croissante d'ouverts convexes réguliers Ω_m, $m=1,2,\ldots$ tels que la mesure de $\Omega - \Omega_m$ tende vers zéro lorsque $m \to +\infty$ et que les frontières $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ soient localement lipshitziennes uniformément par rapport à m. D'autre part, on approche β par ses régularisées au sens de Yosida définies par

$$\beta_\lambda = \lambda^{-1} \{1 - (1+\lambda\beta)^{-1}\} \quad , \quad \lambda > o$$

Les β_λ sont des fonctions non décroissantes, uniformément Lipshitziennes de constante $1/\lambda$ (Brezis [2]) qui tendent vers β (dans un certain sens !) lorsque $\lambda \to o$.

On est ainsi amené à considérer le problème approché suivant :

$$(2)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A} \operatorname{grad} u_{\lambda,m} + u_{\lambda,m} = f|_{\Omega_m} & \text{p.p. dans } \Omega_m \\ -\nu \cdot \mathbb{A} \operatorname{grad} u_{\lambda,m} = \beta_\lambda(u_{\lambda,m}) & \text{p.p. sur } \Gamma_m \end{cases}$$

Ce problème admet une solution variationnelle dans $H^1(\Omega)$ et par conséquent la trace de $\beta_\lambda(u_{\lambda,m})$ sur Γ_m, appartient à $H^{1/2}(\Gamma_m)$. Les résultats classiques de régularité concernant le problème de Neuman impliquent alors que $u_{\lambda,m} \in H^2(\Omega_m)$. On effectue ensuite les passages à la limite grâce à deux résultats essentiels que voici :

(i) Il existe une constante C telle que

$$\|u_{\lambda,m}\|_{H^2(\Omega_m)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega_m)}, \quad \forall \lambda, m.$$

(ii) Il existe un opérateur de prolongement (⁺) $P_m \in L(H^2(\Omega_m) ; H^2(\mathbb{R}^n))$, tel que

$$\sup_{m \to +\infty} \|P_m\| < +\infty.$$

La seconde assertion est prouvée dans Chenais [4]. Quant à la première assertion, elle résulte de la combinaison de l'inégalité usuelle dans $H^1(\Omega_m)$ et de la majoration des dérivées secondes obtenue directement en intégrant par parties la quantité

$$\int_{\Omega_m} |\operatorname{div} \mathbb{A} \operatorname{grad} u_{\lambda,m}|^2 \, dx.$$

C'est fondamentalement la méthode de Cacciopoli [3] reprise sous le nom de "seconde inégalité fondamentale" dans Ladyženskaia. Ural'cera [9]. Cependant, l'estimation des intégrales de bord utilisée ici est plus fine que celle de ces Auteurs et c'est ce qui permet d'approcher des frontières moins régulières.

Cet article développe l'exposé bref de Grisvard [7].

(⁺) c'est-à-dire que $P_m v|_{\Omega_m} = v$

On ne donne ici que les démonstrations correspondant au cas où est borné pour éviter un passage à la limite supplémentaire (du borné au non borné) qui ne pose pas de problème.

Le plan est le suivant :

1. Intégrations par parties.
2. Inégalités dans un convexe régulier.
3. Régularité dans un convexe quelconque.
4. Problème de Signorini dans un polygône plan.
5. Bibliographie.

1. Intégrations par parties.

Dans ce §, on suppose que Ω est un ouvert borné à frontière régulière, c'est-à-dire, de classe $C^{1,1}$.

On pose

$$L\,u = \operatorname{div} A \operatorname{grad} u$$

et

$$v = A \operatorname{grad} u.$$

En chaque point de Γ on décompose v suivant sa composante normale v_ν (dans la direction de ν vecteur normal à Γ sortant de Ω) et sa composante tangentielle v_T . La composante tangentielle de grad u sera notée $\operatorname{grad}_T u$ et l'opérateur de divergence tangentielle à Γ sera noté div_T .
On note $a_{i,j}$, pour $i,j=1,2,\ldots,n$ les éléments de $\mathbb{A}$. D'après l'hypothèse faite dans l'introduction, ce sont des fonctions uniformément lipshitziennes dans Ω. De plus, il existe $\alpha > o$ tel que $\mathbb{A} \geq \alpha \mathbf{1}$ partout dans $\overline{\Omega}$.

Proposition 1.1. *Posant* $v = \mathbb{A} \operatorname{grad} u$, *on a pour* $u \in H^2(\Omega)$ $\int_\Omega (Lu)^2\, dx =$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx - 2 \int_\Gamma v_T \cdot \operatorname{grad}_T v_\nu \cdot d\sigma \tag{1.1}$$

$$- \int_T \{B(v_T\,;v_T) + (\operatorname{tr} B)\, v_\nu^{\,2}\}\; d\sigma$$

où B *désigne la seconde forme fondamentale de* Γ.

Démonstration : Il sera plus aisé de calculer la valeur de la forme bilinéaire correspondante :

$$u, \tilde{u} \longrightarrow \int_\Omega Lu\, L\tilde{u}\, dx$$

Ceci permet de localiser le calcul : utilisant une partition de l'unité sur $\overline{\Omega}$, on voit qu'il suffit de faire le calcul en supposant que u et $\tilde{u}$ ont leurs supports au voisinage V (précisé plus loin) d'un point de $\overline{\Omega}$. De plus, par densité, il suffit de considérer le cas où u et $\tilde{u}$ sont de classe C^3. Appliquant la formule de Green, on obtient (en posant naturellement $\tilde{v} = \mathbb{A}.\ \text{grad}\ \tilde{u}$) :

$$\int_\Omega Lu\, L\tilde{u}\, dx = \int_\Omega \operatorname{div} v \operatorname{div} \tilde{v}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j}\, dx =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma \nu_i\, v_i \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j}\, d\sigma - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega v_i \frac{\partial^2 \tilde{v}_j}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma \nu_i\, v_i \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_j}\, d\sigma - \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Gamma v_i\, \nu_j \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i}\, d\sigma$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i}\, dx .$$

On a donc

$$\int_\Omega Lu\, L\tilde{u}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i}\, dx + I \quad \text{en posant}$$

$$I = \int_\Gamma v_\nu \operatorname{div} \tilde{v}\ d\sigma - \int_\Gamma \nu \cdot \{(v.\ \text{grad})\ \tilde{v}\}\ d\sigma .$$

On va maintenant transformer l'expression de I au moins dans le cas où les supports de u et $\tilde{u}$ rencontrent Γ. On peut toujours choisir V assez petit pour qu'il soit possible de fixer un réseau de n-1 courbes deux à deux orthogonales sur $\Gamma \cap V$; on notera $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ les vecteurs unitaires tangents à ces courbes (une fois fixées l'orientation et la numérotation).

Si on pose $v_i = \tau_i . v$, $v_\nu = \nu . v$, on a

$$\begin{cases} v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \tau_i + v_\nu \nu \\ v_T = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \tau_i \ . \end{cases}$$

Pour la brièveté, on posera $\frac{\partial}{\partial \tau_i} = \tau_i$. grad et $\frac{\partial}{\partial \nu} = \nu$. grad.

Il est clair que

$$\operatorname{div} \tilde{v} = \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{\partial}{\partial \tau_k} \tilde{v}) . \tau_k + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \nu} . \nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tau_k} + \sum_{i,k=1}^{n-1} \tilde{v}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} . \tau_k +$$

$$\tilde{v}_\nu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} . \tau_k + \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{v}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \nu} . \nu + \frac{\partial \tilde{v}_\nu}{\partial \nu} \ .$$

D'autre part, on a :

$$\nu . \{(v . \operatorname{grad}) \tilde{v}\} =$$

$$\nu . \{(\sum_{k=1}^{n-1} v_k \frac{\partial}{\partial \tau_k} + v_\nu \frac{\partial}{\partial \nu}) (\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{v}_i \tau_i + \tilde{v}_\nu \nu)\} =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n-1} v_k \tilde{v}_i \nu . \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} + \sum_{i=1}^{n-1} v_\nu \tilde{v}_i \nu . \frac{\partial \tau_i}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{n-1} v_k \frac{\partial \tilde{v}_\nu}{\partial \tau_k} + v_\nu \frac{\partial \tilde{v}_\nu}{\partial \nu} \ .$$

La fonction à intégrer dans I vaut donc

$$v_\nu \operatorname{div} \tilde{v} - \nu . \{(v . \operatorname{grad}) \tilde{v}\} = \sum_{k=1}^{n-1} v_\nu \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial \tau_k} + \sum_{i,k=1}^{n-1} v_\nu \tilde{v}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} . \tau_k +$$

$$v_\nu \tilde{v}_\nu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} . \tau_k - \sum_{i,k=1}^{n-1} v_k \tilde{v}_i \nu . \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} - \sum_{k=1}^{n-1} v_k \frac{\partial \tilde{v}_\nu}{\partial \tau_k} \ .$$

A présent, on remarque que

$$\operatorname{div}_T (v_\nu \tilde{v}_T) = \sum_{k=1}^{n-1} \{ \frac{\partial}{\partial \tau_k} (v_\nu \tilde{v}_T)\} . \tau_k = \sum_{i,k=1}^{n-1} \{\frac{\partial}{\partial \tau_k} (v_\nu \tilde{v}_i \tau_i)\} . \tau_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \tau_k} (v_\nu \tilde{v}_k) + \sum_{i,k=1}^{n-1} v_\nu \tilde{v}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} . \tau_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} v_\nu \frac{\tilde{\partial}_k}{\partial \tau_k} + (\operatorname{grad}_T v_\nu) . \tilde{v}_T + \sum_{i,k=1}^{n-1} v_\nu \tilde{v}_i \frac{\partial \tau_i}{\partial \tau_k} . \tau_k$$

d'où

$$v_\nu \operatorname{div} \tilde{v} - \nu \cdot (v . \operatorname{grad}) \tilde{v}\} =$$

$$\mathrm{div}_T(v_\nu \tilde{v}_T) - v_T \cdot (\mathrm{grad}_T \tilde{v}_\nu) - (\mathrm{grad}_T v_\nu) \cdot \tilde{v}_T$$
$$+ v_\nu \tilde{v}_\nu \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial\nu}{\partial\tau_k} \cdot \tau_k\right) - \sum_{i,k=1}^{n} v_k \tilde{v}_i \nu \cdot \frac{\partial\tau_i}{\partial\tau_k} .$$

Pour conclure, on rappelle que, en coordonnées locales, les coefficients de la forme B sont

$$\nu \cdot \frac{\partial\tau_i}{\partial\tau_k} = - \frac{\partial\nu}{\partial\tau_k} \tau_i$$

donc

$$v_\nu \,\mathrm{div}\, \tilde{v} - \nu \cdot \{(v.\ \mathrm{grad})\ \tilde{v}\} =$$
$$\mathrm{div}_T(v \tilde{v}_T) - v_T.(\mathrm{grad}\, \tilde{v}_\nu) - (\mathrm{grad}_T v_\nu).\ \tilde{v}_T - \mathrm{tr}\, B\, v_\nu \tilde{v}_\nu - B(v_T ; \tilde{v}_T).$$

Revenant au calcul sur Ω on a donc obtenu

$$\int_\Omega Lu\, L\tilde{u}\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} dx$$
$$+ \int_\Gamma \{ \mathrm{div}_T(v_\nu \tilde{v}_T) - v_T.\ (\mathrm{grad}\, \tilde{v}_\nu) - (\mathrm{grad}_T v_\nu).\ \tilde{v}_T$$
$$- \mathrm{tr}\, B \cdot v_\nu \tilde{v}_\nu - B(v_T ; \tilde{v}_T) \}\, d\sigma$$

On peut encore intégrer le terme en $\mathrm{div}_T (v_\nu \tilde{v}_T)$ qui vaut donc zéro.

Par bilinéarité, la même identité reste valable sans condition de support sur u et $\tilde{u}$. On conclut en faisant $u = \tilde{u}$. C.Q.F.D.

Avant d'énoncer la proposition suivante, il est commode d'introduire quelques notations. On écrira :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{T,T} & \mathbb{A}_{T,\nu} \\ \mathbb{A}_{\nu,T} & \mathbb{A}_{\nu,\nu} \end{bmatrix}$$

la matrice $\mathbb{A}$ dans la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe de l'hyperplan tangent à Γ et de la droite engendrée par $\nu(\mathbb{R}^n = T(\Gamma) + \mathbb{R}\ \nu)$. On a donc $\mathbb{A}_{\nu,\nu} = \mathbb{A}\nu.\nu$, $\mathbb{A}_{T,\nu} = \mathbb{A}\nu - (\mathbb{A}_{\nu,\nu})\,\nu$, $\mathbb{A}_{\nu,T} = \mathbb{A}^*_{T,\nu}$ (*) . On posera également :

(*) On a $\mathbb{A}_{\nu,\nu}$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{A}_{T,\nu}$ est un vecteur identifié à un élément de $L(\mathbb{R} ; \mathbb{R}^n)$, $\mathbb{A}_{\nu,T} = \mathbb{A}^x_{T,\nu}$ est le vecteur $\mathbb{A}_{T,\nu}$ identifié à un élément de $L(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$; $\mathbb{A}_{T,T}$ est une matrice.

$$= \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathbb{A}_{T,T} - \mathbb{A}_{T,\nu} \otimes \mathbb{A}_{\nu,T} .$$

Proposition 1.2. *Soit* $u \in H^2(\Omega)$ *vérifiant* $\nu.\, \mathbb{A}$ grad $u = -\beta(u)$ *sur* Γ , *avec* β *uniformément lipshitzienne non décroissante, on a :*

$$\int_\Omega (Lu)^2\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx$$

$$+ 2 \int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \operatorname{grad}_T u .\, \mathbb{A} \operatorname{grad}_T u \quad d\sigma$$

$$- \int_\Gamma \frac{1}{A^2_{\nu,\nu}} \{(\operatorname{tr} B\, \mathbb{A})\, \beta(u)^2 - 2\, \beta(u) \operatorname{grad}_T u .\, \mathbb{A}\, B\, \mathbb{A}_{T,\nu}$$

$$+ \operatorname{grad}_T u \,.\, \mathbb{A}\, B\, \mathbb{A} \operatorname{grad}_T u \} \quad d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma \frac{\beta(u)^2}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \sum_{k=1}^{n-1} \{\mathbb{A}_{\nu,\nu} (\frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\tau_k) - (\frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial\, \tau} \nu.\nu)\, \mathbb{A}_{T,\nu} \,.\, \tau_k\}\, d\sigma$$

où B *est la matrice de la forme* B .

Démonstration : On utilise l'identité (1.1) et on calcule en premier lieu $-2 \int_\Gamma v_T .\, \operatorname{grad}_T v_\nu\, d\sigma$ en tenant compte de la condition aux limites qui s'écrit $v_\nu = -\beta(u)$. On va éliminer v_T au profit de v_ν et $\operatorname{grad}_T u$. En effet, on a :

$$\begin{cases} v_\nu = A_{\nu,T} .\, \operatorname{grad}_T u + \mathbb{A}_{\nu,\nu} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\beta(u) \\ v_T = \mathbb{A}_{T,T} \operatorname{grad}_T u + \mathbb{A}_{T,\nu} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \quad (\beta(u) + \mathbb{A}_{\nu,T} \,.\, \operatorname{grad}_T u)$$

puis

$$v_T = (\mathbb{A}_{T,T} - \frac{\mathbb{A}_{T,\nu} \otimes \mathbb{A}_{\nu,T}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}}) \operatorname{grad}_T u - \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \beta(u)$$

$$= \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} (\mathbb{A} \operatorname{grad}_T u - \mathbb{A}_{T,\nu}\, \beta(u)) .$$

On obtient ainsi :

$$-2 \int_\Gamma v_T .\, \operatorname{grad}_T v_\nu\, d\sigma = +2 \int_\Gamma v_T .\, \beta'(u) \operatorname{grad}_T u\, d\sigma$$

$$(1.3) \qquad = +2 \int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \operatorname{grad}_T u . \mathbb{A} \operatorname{grad}_T u \quad d\sigma$$

$$-2 \int_\Gamma \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} .\, \beta(u)\, \beta'(u) \operatorname{grad}_T u \quad d\sigma$$

La dernière intégrale vaut aussi :

(1.4) $$-\int_\Gamma \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \cdot \mathrm{grad}_T\, \beta(u)^2\, d\sigma = \int_\Gamma \beta(u)^2\, \mathrm{div}_T \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}}\, d\sigma$$

Il faut donc maintenant calculer

$$\mathrm{div}_T \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} = \frac{\mathrm{div}_T\, \mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} - \mathbb{A}_{T,\nu} \cdot \frac{\mathrm{grad}_T\, \mathbb{A}_{\nu,\nu}}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}}$$

En premier, on a :

$$\mathbb{A}_{T,\nu} = \mathbb{A}_\nu - \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \nu$$

donc

$$\mathrm{div}_T\, \mathbb{A}_{T,\nu} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_k} \mathbb{A}_{T,\nu}\right) \cdot \tau_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_k} \{\mathbb{A}_\nu - \mathbb{A}_{\nu,\nu}\nu\}\right) \cdot \tau_k =$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{A} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} \cdot \tau_k + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \tau_k - \mathbb{A}_{\nu,\nu} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} \cdot \tau_k\right) = \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathrm{tr}\, \mathbb{B} +$$

$$\sum_{i,k=1}^{n-1} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} \cdot (\mathbb{A}_{T,T})_{i,k}\, \tau_i + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \tau_k = \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathrm{tr}\, \mathbb{B} - \mathrm{tr}\, \mathbb{B}\, \mathbb{A}_{T,T} +$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \tau_k .$$

Ensuite, on a : $\mathbb{A}_{\nu,\nu} = \nu \cdot \mathbb{A}\nu$ donc

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} \mathbb{A}_{\nu,\nu} = 2\, \mathbb{A} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} \cdot \nu + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \nu$$

$$= 2\, \mathbb{A}_{\nu,T} \frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \nu = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \nu}{\partial \tau_k} \cdot \tau_i\right) \mathbb{A}_{\nu,T} \cdot \tau_i + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \nu$$

d'où

$$\mathrm{grad}_T\, \mathbb{A}_{\nu,\nu} = -2\, \mathbb{B}\, \mathbb{A}_{\nu,T} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \nu\right) \tau_k$$

Il en résulte que

$$\mathrm{div}_T \frac{\mathbb{A}_{T,\nu}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} = \mathrm{tr}\, B - \frac{\mathrm{tr}\, B\, \mathbb{A}_{T,T}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} + \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \tau_k$$

$$+ 2 \frac{\mathbb{A}_{T\nu}\, B\, \mathbb{A}_{\nu,T}}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu \cdot \nu\right) \frac{\mathbb{A}_{T,\nu} \cdot \tau_k}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} .$$

En tenant compte de (1.3) et (1.4), on a :

$$-2 \int_\Gamma v_T \cdot \mathrm{grad}_T\, v_\nu\, d\sigma = 2 \int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}}\, \mathrm{grad}_T u \cdot \Delta\, \mathrm{grad}_T\, u\, d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma \beta(u)^2 \{\mathrm{tr}\,\mathbb{B} - \frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,T}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} + \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\tau_k + 2\,\frac{\mathbb{A}_{T\nu}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{\nu,T}}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}}$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{\partial\,\mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\nu)\,\frac{\mathbb{A}_{T\nu}.\tau_k}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}}\}\,d\sigma$$

Pour obtenir l'expression complète de l'intégrale de bord dans (1.1), il faut encore ajouter le terme avec la forme B ; on obtient ainsi :

$$\int_\Omega (Lu)^2\,dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,dx + I$$

où

$$I = 2\int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}}\ \mathrm{grad}_T u.\,\mathbb{A}\,\mathrm{grad}_T\,u\ \ d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma \beta(u)^2 \{- \frac{\mathrm{tr}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,T}}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} + \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial\,\mathbb{A}}{\partial \tau k} \nu.\tau_k + 2\,\frac{\mathbb{A}_{T\nu}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{\nu,T}}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}}$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{\partial\,\mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\nu)\,\frac{\mathbb{A}_{T,\nu}.\tau_k}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}}\}\,d\sigma$$

$$- \int_\Gamma B\,(v_T\ ,\ v_T)\ d\sigma\ .$$

On substitue maintenant l'expression de v_T obtenue plus haut, dans $B(v_T,v_T)$; cela vaut :

$$\frac{1}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \{B(\mathbb{A}\ \mathrm{grad}_T\ u,\ \mathbb{A}\ \mathrm{grad}_T\ u) + B(\mathbb{A}_{T,\nu}\ ,\ \mathbb{A}_{T,\nu})\ \beta(u)^2$$

$$- 2\ B\ (\mathbb{A}\ \mathrm{grad}_T\ u,\ \mathbb{A}_{T,\nu})\ \beta(u)\ \ =$$

$$\frac{1}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \{\mathrm{grad}_T u.\,\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}\,\mathrm{grad}_T u + \mathbb{A}_{T,\nu}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu}\ \beta(u)^2 - 2\beta(u)\ \mathrm{grad}_T\ u.\,\mathbb{A}\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu}$$

d'où finalement, en remarquant en outre que :

$\mathbb{A}_{T,\nu}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A}_{T,\nu} - (\mathrm{tr}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A}_{T,T})\ \mathbb{A}_{\nu,\nu} = -\mathrm{tr}\ \mathbb{B}\mathbb{A}$, on a :

$$I = 2\int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}}\ \mathrm{grad}_T u.\,\mathbb{A}\,\mathrm{grad}_T u\ \ d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma \frac{1}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \{-\beta(u)^2\ \mathrm{tr}\ \mathbb{B}\,\mathbb{A} + 2\beta(u)\ \mathrm{grad}_T\ u.\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A}_{T,\nu}$$

$$- \mathrm{grad}_T\ u.\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A}\ \ \mathrm{grad}_T\ u\}\ \ d\sigma$$

$$+ \int_\Gamma \frac{\beta(u)^2}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \sum_{k=1}^n \{\mathbb{A}_{\nu,\nu} (\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\tau_k) - (\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu.\nu) \mathbb{A}_{T,\nu} . \tau_k\} \, d\sigma .$$

L'identité (1.2) résulte de (1.5) C.Q.F.D.

Remarque 1.3. Les calculs précédents sont considérablement plus simples lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{I}$ c.a.d. $L = \Delta$. En effet, on a alors $\mathbb{A}_{\nu,\nu} = 1$, $\mathbb{A}_{T,T} = \mathbb{I}$, $\mathbb{A}_{T,\nu} = \mathbb{A}_{\nu,T} = 0$ et $\mathbb{\Delta} = \mathbb{I}$ et l'identité (1.2) devient (avec $v = \text{grad } u$)

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx \\
&+ 2 \int_\Gamma \beta'(u) \, |\text{grad}_T u|^2 \, d\sigma \\
&- \int_\Gamma \{\beta(u)^2 \, \text{tr } \mathbb{B} + \text{grad}_T u. \, \mathbb{B} . \, \text{grad}_T u\} \, d\sigma
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Cette identité résulte aussi immédiatement de (1.1).

Remarque 1.4. Les calculs précédents sont également simplifiés lorsque n=2 car alors on a $\Delta = \det A$ et la matrice $\mathbb{B}$ est simplement la multiplication par $- \frac{\partial \Theta}{\partial \delta}$ où δ est une abcisse curviligne le long de Γ et Θ l'angle de τ avec l'axe (o,x_1) (par exemple)

L'identité (1.1) s'écrit alors

$$\int_\Omega |Lu|^2 \, dx = \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx - 2 \int_\Gamma v_\tau . \frac{\partial v_\nu}{\partial \delta} \, d\delta + \int_\Gamma \frac{\partial \Theta}{\partial \delta} |v|^2 \, d\delta . \tag{1.7}$$

L'identité (1.2) s'écrit quant à elle

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Lu|^2 \, dx &= \sum_{i,j=1}^2 \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx \\
&+ 2 \int_\Gamma \frac{\beta'(u)}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} (\det \mathbb{A}) \left|\frac{\partial u}{\partial \delta}\right|^2 \, d\delta \\
&+ \int_\Gamma \frac{1}{\mathbb{A}_{\nu,\nu}} \{(\det \mathbb{A}) \, \beta(u)^2 - 2 \, (\det \mathbb{A}) \, \mathbb{A}_{T,\nu} \beta(u) \frac{\partial u}{\partial \delta} + (\det \mathbb{A})^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \delta}\right|^2\} \, d\Theta \\
&+ \int_\Gamma \frac{\beta(u)^2}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \{\mathbb{A}_{\nu,\nu} (\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \delta} \nu.\tau) - (\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \delta} \nu.\nu) \mathbb{A}_{T,\nu}\} \, d\delta
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Remarque 1.5. Un dernier cas où les calculs précédents se simplifient est celui où $\beta \equiv o$ (problème de Neuman) : L'identité (1.2) devient alors

$$\int_\Omega (Lu)^2\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx \tag{1.9}$$
$$- \int_\Gamma \frac{1}{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu}} \operatorname{grad}_T u . \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A} \operatorname{grad}_T u \quad d\sigma$$

Remarque 1.6. Il faut reprendre complètement le calcul de la proposition 1.2 pour obtenir une identité analogue dans le cas où u vérifie une condition de Dirichlet u=o sur Γ . On a alors

$$\operatorname{grad}_T u = o \quad \text{d'où}$$
$$v_\nu = \mathbb{A}_{\nu,\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad v_T = \mathbb{A}_{T,\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} \quad .$$

On a alors en posant $w = \frac{\partial u}{\partial \nu}$:

$$-2 \int_\Gamma v_T . \operatorname{grad}_T v_\nu \, d\sigma = -2 \int_\Gamma \mathbb{A}_{T,\nu}\, w. \operatorname{grad}_T \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, w \quad d\sigma$$
$$= -2 \int_\Gamma \mathbb{A}_{T,\nu} . \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, w \operatorname{grad}_T w\, d\sigma -2 \int_\Gamma \mathbb{A}_{T,\nu} . w^2 \operatorname{grad}_T \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, d\sigma$$
$$= \int_\Gamma \operatorname{div}_T (\mathbb{A}_{\nu,\nu} \mathbb{A}_{T,\nu})\, w^2\, d\sigma -2 \int_\Gamma \mathbb{A}_{T,\nu} . \operatorname{grad}_T \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, w^2\, d\sigma$$
$$= \int_\Gamma \{\mathbb{A}_{\nu,\nu} \operatorname{div}_T \mathbb{A}_{T,\nu} - \operatorname{grad}_T \mathbb{A}_{\nu,\nu} . \mathbb{A}_{T,\nu}\}\ w^2\, d\sigma \ .$$

Utilisant les valeurs calculées précédemment, de $\operatorname{div}_T \mathbb{A}_{T,\nu}$ et $\operatorname{grad}_T \mathbb{A}_{\nu,\nu}$ on obtient :

$$-2 \int_\Gamma v_T . \operatorname{grad}_T v_\nu \quad d\sigma =$$
$$\int_\Gamma \{\mathbb{A}^2_{\nu,\nu} \operatorname{tr} \mathbb{B} - \mathbb{A}_{\nu,\nu} (\operatorname{tr} \mathbb{B}\ \mathbb{A}_{T,T}) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{A}_{\nu,\nu} \frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu . \tau_k \} w^2\, d\sigma$$
$$- \int_\Gamma \{-2\ \mathbb{B} (\mathbb{A}_{\nu,T} + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu . \nu)\ \tau_k\} . \mathbb{A}_{T,\nu}\, w^2\, d\sigma \ .$$

Grâce à cela, on peut réécrire (1.1) comme suit :

$$\int_\Omega (Lu)^2\, dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx \tag{1.10}$$
$$+ \int_\Gamma -\operatorname{tr} \mathbb{B}\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n-1} [\mathbb{A}_{\nu,\nu} (\frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu . \tau_k) - (\frac{\partial\, \mathbb{A}}{\partial \tau_k} \nu . \nu) \tau_k . \mathbb{A}_{T,\nu}\} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma$$

2. Inégalités dans un convexe régulier.

Les identités obtenues au § précédent permettent d'obtenir des inégalités a priori pour les solutions du problème (1). Dans ce §, on va considérer le cas où Ω est convexe borné et à frontière de classe $C^{1,1}$. Pour la suite, il est commode d'introduire $\alpha > o$ tel que $A \geq \alpha\, \mathbb{I}$ et que $\frac{1}{\alpha}$ majore les coefficients a_{ij} et leurs dérivées premières dans $\overline{\Omega}$ (‡)

Lemme 2.1. *Il existe* $k > o$ *et* $M > o$ *ne dépendant que de* α *tels que :*

$$(2.1) \qquad k \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|^2 dx \leq \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx + M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} .$$

Démonstration : On applique la formule de dérivation d'un produit et le lemme 7.1, p. 152 (inégalité (7.6) en particulier), Ladyženskaia - Ural'ceva [9].

Comme il est clair que $\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \tau_k} = (\tau_k .\ \mathrm{grad})\, \mathbb{A}$ est borné sur Γ, on déduit de (1.2), du lemme 2.1, du fait que $\beta'(n) \geq o$ et que $\mathbb{A} \geq \alpha^2\, \mathbb{1}$, l'inégalité

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} k \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|^2 dx &\leq \int_\Omega (Lu)^2\, dx \\ &+ \int_\Gamma \frac{1}{A^2_{\nu,\nu}} \{ (\mathrm{tr}\ \mathbb{B}\Delta)\ \beta(u) \ - 2\ \beta(u)\ \mathrm{grad}_T\, u .\ \mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{A}_{T,\nu} \\ &\qquad + \mathrm{grad}_T\, u .\ \mathbb{A}\ \mathbb{B} \mathbb{A}\ \mathrm{grad}_T\, u \}\ d\sigma \\ &+ M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)} + K \|\mathrm{grad}\ u\|^2_{L^2(\Gamma)} . \end{aligned}$$

où K ne dépend que de α .

Ceci permet d'établir le :

(‡) On rappelle que les $a_{i,j}$ sont les coefficients de A.

<u>Théorème 2.2</u>. *On suppose que* Ω *est borné convexe, de classe* $C^{1,1}$ *et que la matrice (symétrique)*

$$\mathbb{M} - \begin{bmatrix} -\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A} & \mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu} \\ \mathbb{A}_{T,\nu}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A} & -\operatorname{tr}\mathbb{B}\,\mathbb{A} \end{bmatrix}$$

est positive partour sur Γ,

alors pour tout $\varepsilon > o$, *il existe* $K(\varepsilon)$ *tel que*

$$(2.3)\qquad k \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|^2 dx \leq \int_\Omega |Lu|^2\, dx + \varepsilon \|u\|^2_{H^2(\Omega)} + K(\varepsilon)\, \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

pour toute $u \in H^2(\Omega)$, *vérifiant* $-\nu\, \mathbb{A}$ grad $u = \beta(u)$ *sur* Γ. *De plus,* k *ne dépend que de* α *et la fonction* K *ne dépend que de* α *et du diamètre de* Ω.

<u>Démonstration</u> : L'hypothèse assure que la forme bilinéaire (définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$) $\xi,\eta \longrightarrow -(\operatorname{tr}\mathbb{B}\,\mathbb{A})\,\xi^2 + 2\,\xi\,\eta.\,\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu} - \eta.\,\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}\,\eta$ soit positive donc que l'intégrale de bord dans (2.2) soit négative. On en déduit que :

$$k \sum_{i,j} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|^2 dx \leq \int_\Omega |Lu|^2\, dx + M\, \|u\|_{H^1(\Omega)}\, \|u\|_{H^2(\Omega)} + K\, \|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Gamma)}\ .$$

On conclut en appliquant l'inégalité habituelle

$$\|\operatorname{grad} u\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon \|\operatorname{grad} u\|^2_{H^1(\Omega)} + K(\varepsilon)\, \|\operatorname{grad} u\|^2_{H^2(\Omega)}\ .$$

C.Q.F.D.

<u>Remarque 2.3</u>. La positivité de la matrice $\mathbb{M}$ peut être obtenue de la manière suivante. La forme bilinéaire correspondante est

$$\begin{aligned} &- (\operatorname{tr}\mathbb{B}\,\mathbb{A})\,\xi^2 + 2\,\xi\,\eta.\,\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu} - \eta.\,\mathbb{A}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}\,\eta \\ &= - (\operatorname{tr}\mathbb{B}\,\mathbb{A})\,\xi^2 + 2\,\mathbb{A}\,\eta.\ \ \mathbb{B}\,\xi\,\mathbb{A}_{T,\nu} - \mathbb{A}\,\eta\ .\ \mathbb{B}\mathbb{A}\,\eta \\ &= - (\operatorname{tr}\mathbb{B}\,\mathbb{A})\,\xi^2 - (\mathbb{A}\,\eta - \xi\,\mathbb{A}_{T,\nu}).\ \mathbb{B}\,(\mathbb{A}\eta - \xi\,\mathbb{A}_{T,\nu}) + \xi^2\,\mathbb{A}_{T,\nu}\,\mathbb{B}\,\mathbb{A}_{T,\nu} \end{aligned}$$

$$= - B(\mathbb{\Delta}\eta - \xi A_{T,\nu} ; \mathbb{\Delta}\eta - \xi \mathbb{A}_{T,\nu}) + \xi^2 (B(\mathbb{A}_{T,\nu}, \mathbb{A}_{T,\nu}) - \mathrm{tr}\, \mathbb{B}\, \mathbb{\Delta})$$

$$= - B(\mathbb{\Delta}\eta - \xi \mathbb{A}_{T,\nu} ; \mathbb{\Delta}\eta - \xi \mathbb{A}_{T,\nu}) - \xi^2 \,\mathrm{tr}\, \mathbb{B}\, (\mathbb{\Delta} - \mathbb{A}_{T,\nu} \otimes \mathbb{A}_{T,\nu}).$$

En conséquence, dès que Ω est convexe (et donc B est une forme négative), la matrice $\mathbb{M}$ est positive si et seulement si

$$\mathbb{\Delta} - \mathbb{A}_{T,\nu} \otimes \mathbb{A}_{T,\nu} \geq 0$$

sur Γ. Compte-tenu de la définition de $\mathbb{\Delta}$, c'est le cas en particulier si

$$(2.4) \qquad \mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu^\perp} - 2\, \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \otimes \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \geq 0$$

pour tout vecteur unitaire ν (T désignant cette fois l'hyperplan perpendiculaire à ν et écrivant bien entendu

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} & \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \\ \mathbb{A}_{\nu,\nu^\perp} & \mathbb{A}_{\nu,\nu} \end{bmatrix}$$

dans la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe $\nu^\perp \oplus \mathbb{R}\,\nu$).

Remarque 2.4. L'inégalité (2.4) est évidemment vérifiée lorsque L est l'opérateur de Laplace Δ puisqu'alors $\mathbb{A} = \Delta$. L'inégalité (2.3) a donc lieu dans ce cas dès que Ω est convexe (et de classe $C^{1,1}$). Il est clair par continuité que la condition (2.4) signifie que L est voisin de Δ (au sens de $\mathbb{A} - 1$ est petit uniformément sur $\overline{\Omega}$).

Remarque 2.5. Dans le cas de la dimension 2, un calcul élémentaire montre que (2.4) a lieu pour tout ν si et seulement si :

$$-2 \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{1/2} \leq 2$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de $\mathbb{A}$ (cette condition doit avoir lieu en tout point de Γ). En dimension supérieure, la condition :

$$\operatorname*{Min}_{i\neq j} (\lambda_i\, \lambda_j) \geq \max_{i,j} \left(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{4}\right)^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres de $\mathbb{A}$, est également suffisante pour que

(2.4) ait lieu.

Remarque 2.6. Dans le cas particulier du problème de Neuman, c.a.d. lorsque $\beta = o$, on voit en utilisant l'identité (1.9) que l'inégalité (2.3) a lieu dès que Ω est convexe (sans hypothèse sur $\mathbb{M}$).

Remarque 2.7. Dans le cas d'un problème de Dirichlet, l'inégalité (2.3) résulte de (1.10) dès que Ω est convexe (toujours sans hypothèse sur $\mathbb{M}$).

Remarque 2.8. L'inégalité (2.3) dans le théorème 2.2. a lieu même sans hypothèse sur $\mathbb{M}$. En effet, il existe toujours $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{B} \leq \mu \, 1$ ($\mu = o$ signifie que Ω est convexe) et par conséquent, si on suppose que (2.4) a lieu, la forme bilinéaire qui intervient dans le théorème 2.2 admet une minoration de la forme

$$- (\mathrm{tr}\, \mathbb{B}\, \mathbb{A})\, \xi^2 + 2\xi\eta . \mathbb{A}\mathbb{B}\, \mathbb{A}_{T,\nu} - \eta . \mathbb{A}\mathbb{B}\, \mathbb{A}\, \eta \geq \nu(\xi^2 + |\eta|^2).$$

Ceci reporté dans l'intégrale de bord dans (2.2), implique l'inégalité (2.3) mais la fonction K y dépend également de μ.

3. Régularité dans un convexe quelconque.

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert convexe borné de $\mathbb{R}^n$; on suppose que en tout point* x *voisin de* Γ *on a*

$$\mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu^\perp} - 2\, \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \otimes \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \geq 0.$$

Alors si β *est un graphe maximal monotone dans* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, *pour tout* $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème (1) est dans* $H^2(\Omega)$.

Démonstration : On choisit une suite croissante Ω_m , m=1,2,... d'ouverts convexes à frontière de classe $C^{1,1}$, inclus dans Ω et tels que la mesure de $\Omega-\Omega_m$ tende vers zéro lorsque $m \to +\infty$. On utilise alors l'approximation du problème (1) par les problèmes (2), comme il a été indiqué dans l'introduction. Pour la solution $u_{\lambda,m}$ du problème (2), l'inégalité (2.3) a lieu avec une constante $K(\varepsilon)$ indépendante de m (car elle ne dépend que de A et du diamètre de Ω_m). On a donc

$$k \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega_m} \left| \frac{\partial^2 u_{\lambda,m}}{\partial x_i \, \partial x_j} \right|^2 dx \leq \int_{\Omega_m} |f - u_{\lambda,m}|^2 \, dx$$
$$+ \varepsilon \, \|u_{\lambda,m}\|^2_{H^2(\Omega_m)} + K(\varepsilon) \, \|u_{\lambda,m}\|^2_{H^1(\Omega_m)} .$$

Par ailleurs, en multipliant par $u_{\lambda,m}$ l'équation dans (2), on obtient l'inégalité :

$$\|u_{\lambda,m}\|_{H^1(\Omega_m)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega_m)}$$

au moins lorsque $\beta(o) \ni o$ ce qui implique $\beta_\lambda(o) = o$. En combinant ces deux inégalités, on obtient l'existence d'une constante K indépendante de m et λ, telle que

(3.1) $$\|u_{\lambda,m}\|_{H^2(\Omega_m)} \leq K \, \|f\|_{L^2(\Omega_m)} .$$

Il est facile de vérifier (#) que les Γ_m sont lipschitziens uniformément par rapport à m. Il en résulte que le théorème de prolongement de Chenais [4] est applicable : il existe $U_{\lambda,m} \in H^2(\Omega)$ tel que

$$U_{\lambda,m}\big|_{\Omega_m} = u_{\lambda,m}$$

et $U_{\lambda,m}$ reste dans un borné de $H^2(\Omega)$ lorsque m et λ varient.

On fixe λ pour faire d'abord le passage à la limite suivant m : il existe $u_\lambda \in H^2(\Omega)$ tel que

$$U_{\lambda,m} \longrightarrow u_\lambda$$

dans $H^2(\Omega)$ lorsque $m \longrightarrow +\infty$ suivant une suite extraite. La limite u_λ est solution variationnelle du problème

(3.2) $$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A} \operatorname{grad} u_\lambda + u_\lambda = f & \text{dans } \Omega . \\ -\nu . \, \mathbb{A} \operatorname{grad} u_\lambda = \beta_\lambda(u_\lambda) & \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

Grâce à l'équivalence entre condition de cône uniforme et condition de Lipschitz.

En effet, on a :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\left[|\sqrt{\mathbb{A}}\ \operatorname{grad} U_{\lambda,m}|^2 + |U_{\lambda,m}|^2\right]dx - \int_{\Omega_m} f\, U_{\lambda,m}\, dx + \int_{\Gamma_m} j_\lambda(U_{\lambda,m})\, d\sigma \leq$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\left[|\sqrt{\mathbb{A}}\ \operatorname{grad} v|^2 + |v|^2\right]dx - \int_{\Omega_m} f\, v\, dx + \int_{\Gamma_m} j_\lambda(v)\, d\sigma$$

pour toute $v \in H^1(\Omega_m)$ donc en particulier pour toute $v \in H^1(\Omega)$. Ici j_λ désigne une primitive de β_λ . Le passage à la limite dans les termes linéaires ou quadratiques n'offre pas de difficulté puisque

$$\frac{1}{2}\left[\,|\sqrt{\mathbb{A}}\ \operatorname{grad} U_{\lambda,m}|^2 + |U_{\lambda,m}|^2\,\right] - f\, U_{\lambda,m}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\left[\,|\sqrt{\mathbb{A}}\ \operatorname{grad} U_\lambda|^2 + |U_\lambda|^2\right] - f\, u_\lambda$$

dans $L^1(\Omega)$. Le passage à la limite dans les termes de bord est plus délicat. Pour passer à la limite dans $\int_{\Gamma_m} j_\lambda(v)\, d\sigma$, on remarque que $j_\lambda(v)$ est une fonction fixée dans $H^1(\Omega)$, qu'on va noter g dans ce qui suit. Localement, on peut trouver une transformation bilipshitzienne χ_m de Γ sur Γ_m , telle que les suites $\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_m$ et $\frac{\partial}{\partial x_i}\chi_m^{-1}$ restent bornées au voisinage du point considéré car les Γ_m sont lipshitziennes uniformément par rapport à m. On a alors :

$$\int_{\Gamma_m} g\, d\sigma = \int_\Gamma g\circ\chi_m\, d\sigma$$

au moins si le support de g est assez petit. Les $g\circ\chi_m$ restent bornées dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et $\chi_m \longrightarrow 1$ uniformément ; par compacité, on en déduit que

$$g\circ\chi_m \longrightarrow g$$

suivant une suite extraite, dans $L^2(\Gamma)$. Ceci implique que $\int_{\Gamma_m} g\, d\sigma \longrightarrow \int_\Gamma g\, d\sigma$ au moins selon une suite partielle. En remplaçant la fonction fixe g par une suite g_m , $m=1,2,\ldots$ convergeant vers g dans $H^1(\Omega)$, on voit de la même façon que

$$\int_{\Gamma_m} g_m \, d\sigma \longrightarrow \int_{\Gamma} g \, d\sigma$$

donc que

$$\int_{\Gamma_m} j_\lambda(U_{\lambda,m}) \, d\sigma \longrightarrow \int_{\Gamma} j_\lambda \, (u_\lambda) \, d\sigma.$$

Ceci achève de prouver que u_λ est solution du problème (3.2).

Ensuite, comme les u_λ demeurent dans un borné de $H^2(\Omega)$, on peut trouver une suite $\lambda_j \searrow 0$ telle que $u_{\lambda_j} \longrightarrow u$ dans $H^2(\Omega)$ et on vérifie que u (qui appartient à $H^2(\Omega)$) est solution du problème (1) en procédant exactement comme dans Brezis [2] C.Q.F.D.

Voici quelques résultats voisins plus directement utilisables.

Corollaire 3.2. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$, β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; alors, pour tout $f \in L^2(\Omega)$ la solution u du problème*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ -\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \quad \beta(u) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

appartient à $H^2(\Omega)$.

C'est la conséquence de la remarque 2.4.

Corollaire 3.3. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^2$, β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \overline{\Omega}(\dagger)$ les deux valeurs propres $\lambda_j(x)$, $j=1,2$ de A vérifient la condition*

$$-2 \leq \left(\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\right)^{1/2} - \left(\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)}\right)^{1/2} \leq 2$$

alors pour tout $f \in L^2(\Omega)$ la solution u du problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A} \operatorname{grad} u + u = f & \text{dans } \Omega \\ -\nu.\mathbb{A}\operatorname{grad} u \in \beta(u) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

appartient à $H^2(\Omega)$.

Cela résulte du théorème 3.1 et la remarque 2.5.

Corollaire 3.4. *Soit Ω un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$, alors pour tout* $f \in L^2(\Omega)$ *la solution* u *du problème de Neumann*

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbb{A} \operatorname{grad} u + u = f & \textit{dans } \Omega \\ -\nu .\ \mathbb{A} \operatorname{grad} u = o & \textit{sur } \Gamma \end{cases}$$

appartient à $H^2(\Omega)$.

C'est la conséquence de la remarque 2.6 et du théorème 3.1.

Remarque 3.5. A partir de la remarque 2.7, on retrouve le résultat analogue concernant le problème de Dirichlet, démontré il y a longtemps par Kadlec [8].

A partir de la remarque 2.8, on peut énoncer l'extension suivante du théorème 3.1 :

Théorème 3.1'. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une suite croissante d'ouverts* $\Omega_m \subset \Omega$, $m=1,2,\ldots$ *à frontières de classe* $C^{1,1}$ *telle que :*

(i) *la mesure de $\Omega\ \Omega_m$ tend vers zéro lorsque* $m \longrightarrow +\infty$;

(ii) *les frontières $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ sont Lipschitziennes uniformément en* m ;

(iii) *la suite B_m des secondes formes fondamentales des Γ_m est bornée supérieurement indépendamment de* m[b].

On suppose que en tout point x *voisin de Γ, on a :*

$$\mathbb{A}_{\nu,\nu}\, \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu^\perp} - 2\,\mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \otimes \mathbb{A}_{\nu^\perp,\nu} \geq 0$$

alors, si β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, pour tout $f \in L^2(\Omega)$, *la solution du problème (1) est dans* $H^2(\Omega)$.

On pourrait encore affaiblir l'hypothèse en demandant seulement que :

$$\mathbb{A}_{\nu_m,\nu_m}\, \mathbb{A}_{\nu_m^\perp,\nu_m^\perp} - 2\,\mathbb{A}_{\nu_m^\perp,\nu_m} \otimes \mathbb{A}_{\nu_m^\perp,\nu_m} \geq 0$$

(b) c.a.d. qu'il existe μ tel que $\mathbb{B}_m \leq \mu \mathbb{1}$ *pour tout* m.

sur Γ_m pour tout m, hypothèse techniquement difficile à vérifier.

L'avantage de cet énoncé est d'englober le théorème 3.1 et le cas où Ω est borné de classe $C^{1,1}$ (sans aucune hypothèse de convexité), cas où il suffit bien entendu, de poser $\Omega_m = \Omega$. C'est le résultat de Brezis [2] où on a remplacé C^∞ par $C^{1,1}$.

Cependant, ainsi on considère également (et entre autres) des ouverts de classe $C^{1,1}$ par morceaux dont la frontière est convex" seulement dans les points singuliers (c.a.d. dans les points où deux morceaux de classe $C^{1,1}$ se rencontrent). La figure 1 donne un exemple d'un tel ouvert en dimension 2 (les points singuliers sont les S_i).

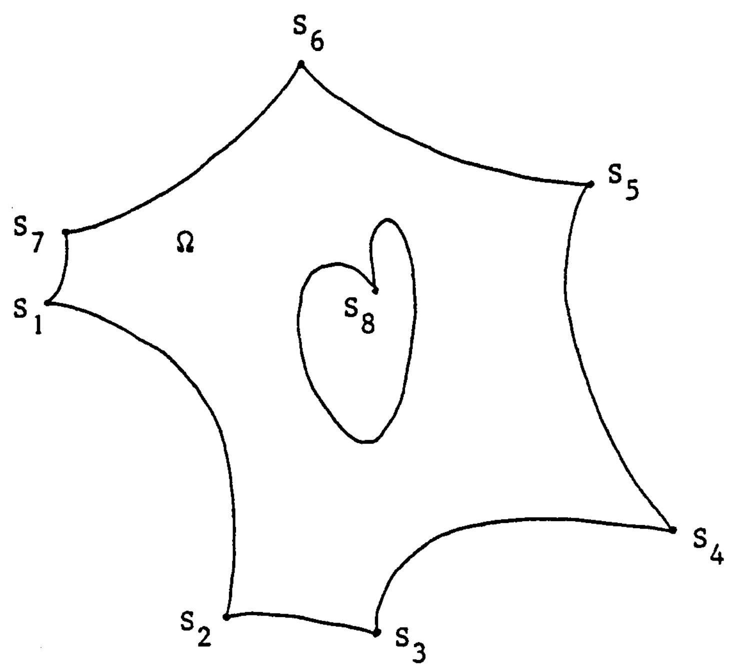

Figure 1

La démonstration du théorème 3.1' est analogue à celle du théorème 3.1 car grâce à la remarque 2.8, l'inégalité (2.3) a lieu dans chaque Ω_m, les constantes ne dépendant pas de m.

4. Problème de Signorini dans un polygône plan.

Tous les énoncés précédents ont fait apparaître une restriction sur la matrice $\mathbb{A}$; dans certains cas, il est possible de lever cette restriction sur $\mathbb{A}$ à condition d'imposer des restrictions sur β. Voici un exemple dans cette direction.

On suppose désormais que

$$\beta(x) = \begin{cases} o & \text{si } x > o \\ [-\infty, o] & \text{si } x = o \\ \phi & \text{si } x < o \end{cases}$$

c'est-à-dire que la condition au bord dans (1) équivaut à

$$u \geq o, \ \nu . \mathbb{A} \text{ grad } u \geq o, \ u\ (\nu . \mathbb{A} \text{ grad } u) = o \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

On suppose maintenant que Ω est un ouvert plan à frontière $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{J} \Gamma_j$ où les $\overline{\Gamma}_j$ sont des arcs de courbes de classe $C^{1,1}$ et on suppose que Γ_j rencontre Γ_{j+1} au sommet S_j suivant un angle convexe ω_j vers l'intérieur de Ω.

Théorème 4.1. *Sous l'hypothèse ci-dessus, le problème*

$$(4.1) \quad \begin{cases} - \operatorname{div} \mathbb{A} \text{ grad } u + u = f & \textit{dans } \Omega \\ u \geq o, \ \nu . \mathbb{A} \text{grad } u \geq o, \ u\ (\nu . \mathbb{A} \text{ grad } u) = 0 & \textit{sur } \Gamma \end{cases}$$

admet pour tout $f \in L^2(\Omega)$, *une solution unique* $u \in H^2(\Omega)$.

Démonstration : On sait que ce problème admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$. Ceci étant, le problème de la régularité est local ; en effet, soit $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ tel que :

$$\nu . \mathbb{A} \text{ grad } \varphi = o$$

sur Γ, alors φu est solution d'un problème de même nature que (4.1) puisqu'on a

$$- \operatorname{div} \mathbb{A} \text{ grad } (\varphi u) + \varphi u = \varphi f - [\operatorname{div} \mathbb{A} \text{ grad } ; \varphi]\, u$$

où le crochet désigne le commutateur et

$$\begin{cases} \varphi u > o \\ \nu . \mathbb{A}\,\mathrm{grad}(\varphi u) = \varphi(\nu . \mathbb{A}\ \mathrm{grad}\ u) \geq o \\ (\varphi u)\ (\nu . \mathbb{A}\ \mathrm{grad}\ \varphi u) = \varphi^2(u\ \{\nu\, \mathbb{A}\ \mathrm{grad}\ u\}) = 0 \end{cases}$$

au bord. Comme il est bien connu que $\varphi u \in H^2(\Omega)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il suffira dans la suite de prouver que $\varphi u \in H^2(\Omega)$ avec φ identique à un, au voisinage d'un point du bord. On supposera dans ce qui suit que ce point est un des sommets (S_j) car c'est le cas le plus difficile. Il est clair qu'on peut fixer $\varphi \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ identique à un au voisinage de S_j, vérifiant

$$\begin{cases} \nu_j . \mathbb{A}\,\mathrm{grad} = 0 & \text{sur } \Gamma_j \\ \nu_{j+1} .\ A\ \mathrm{grad}\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma_{j+1} \end{cases}$$

et telle que le support de φ ne contienne aucun autre sommet que S_j et ne rencontre aucun des autres arcs du bord que Γ_j et Γ_{j+1}. $^{(\phi)}$

A présent, on va utiliser le fait que le problème de Signorini est conservé par changement de variable.

<u>Lemme 4.2</u>. *Soit* χ *un difféomorphisme de classe* $C^{1,1}$ *de* ω *sur* Ω *et soit* u *une solution du problème de Signorini relatif à* $L = -\mathrm{div}\ \mathbb{A}\ \mathrm{grad}$ *dans* Ω *, alors* $u \circ \chi$ *est solution du problème de Signorini relatif à* $(\chi^{-1})^* L$ *dans* ω *où* $(\chi^{-1})^* L$ *est l'image de* L *par* χ^{-1}.

Pour vérifier ce lemme, il suffit d'écrire que u minimise la fonctionnelle

$$v \longrightarrow \frac{1}{2} \int_\Omega \left[|\mathbb{A}^{1/2}\ \mathrm{grad}\ v|^2 + |v|^2 \right] dx - \int_\Omega f\ v\ dx$$

(ϕ) La construction d'une telle fonction de tronquerture au voisinage d'une arête ou d'un sommêt en dimension 3 ou plus, n'est pas toujours possible, c'est pourquoi on s'est limité ici au cas n=2.

sur le convexe K des fonctions de $H^1(\Omega)$ qui sont ≥ 0 au bord.

Revenant à la démonstration du théorème 4.1, le lemme 4.2 permet de ramener le sommet S_j à l'origine par translation. Ensuite, une rotation diagonalise $\mathbb{A}(o)$ puis une homothétie de rapport différent dans chacune des variables ramène $\mathbb{A}(o)$ à $\mathbb{1}$ (la matrice identité). Ces opérations ont conservé la convexité de l'angle ω_j. La fonction image de φu est à présent solution du problème de Signorini pour l'opérateur

$$\Delta + \operatorname{div} \mathbb{P} \ \operatorname{grad}$$

où la matrice $\mathbb{P}$ est à coefficients lipschitziens et s'annule en zéro.

Pour terminer, un nouveau changement de variable (λ) de classe $C^{1,1}$ au voisinage de 0, coïncidant avec l'identité zéro, nous ramène au cas où les arcs $\overline{\Gamma}_j$ et $\overline{\Gamma}_{j+1}$ sont linéaires sans que ω_j soit modifié. L'image de φu est donc solution du problème de Signorini dans un triangle $\mathcal{H}$ pour l'opérateur $\Delta + \operatorname{div} \mathbb{P}$ grad. Si on a choisi le support de φ (donc $\mathcal{H}$) assez petit, la condition

$$-2 \leq \left(\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)}\right)^{1/2} - \left(\frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x)}\right)^{1/2} \leq 2$$

est vérifiée sur $\overline{\mathcal{H}}$ par $\mathbb{1} + \mathbb{P}$, donc $u \in H^2(\Omega)$ grâce au corollaire 3.3. C.Q.F.D.

(λ) On peut éviter ce dernier changement de variable en utilisant le th.3.1'.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AGMON : Lectures on elliptic boundary value problems. Van Nostrand, New-York, 1965.

[2] BREZIS : Monotoniticity methods in Hilbert spaces. Contributions to non linear functional analysis, 1971. Academic Press, p. 101-156.

[3] CACCIOPPOLI : Limitazioni integrali per le soluzioni di un' equazione lineare ellitica. Opere Scelte Vol. II, p. 263-296 Ed. Cremonese (1963).

[4] CHENAIS : On the existence of a solution in a domain identification problem, J. of Math. Analysis and Appl. Vol. 52, n° 2, 1975.

[5] FICHERA : Unilateral constraints in elasticity. Actes du Congrès international des Mathématiciens, tome 3, p. 79-84. 1970.

[6] GRISVARD : Behaviour of the solutions of an elliptic boundary value problem, Numerical Solution of P.D.E. III, Academic Press, 1976.

[7] GRISVARD : Régularité de la solution d'un problème aux limites unilatéral Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-1976, exposé n° XVI.

[8] KADLEC : La régularité de la solution du problème de Poisson. J. Tchécoslovaque de Maths t. 14 (89) 1964, p. 386-393.

[9] LADYZENSKAIA- URAL'CERA : Equations à dérivées partielles de type elliptic, Dunod, Paris. 1968.

[10] NECAS : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Masson. Paris, 1967.