PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES DE RENNES

P. BOLLEY
J. CAMUS
B. HELFFER

Remarques sur l'hypoellipticité

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1
« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976___1_A6_0>

REMARQUES SUR L'HYPOELLIPTICITE

par

P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER

I. INTRODUCTION

On se propose de donner des conditions suffisantes d'hypoellipticicité pour des opérateurs différentiels généraux :

$$L \equiv L(x,t;D_x,D_t) \equiv t^k D_t^m + \sum_{|\alpha|+j\leq m, j<m} a_{\alpha j}(x,t) D_x^\alpha D_t^j \quad (k \in \mathbb{N})$$

elliptiques pour $t \neq 0$ et à coefficients $a_{\alpha j} \in C^\infty$.

De façon précise, les méthodes qui suivent s'appliquent essentiellement aux cas où les coefficients $a_{\alpha j}(x,t)$ s'écrivent $t^{\ell(\alpha,j)} b_{\alpha,j}(x,t)$, les exposants $\ell(\alpha,j)$ vérifiant une certaine hypothèse de "convexité".

Ces conditions suffisantes, outre la condition d'ellipticité pour $t \neq 0$ et l'hypothèse de "convexité" sont de deux types :

(i) des conditions d'"ellipticité générale" pour $t \neq 0$

(ii) une condition "différentielle" : injectivité d'un certain opérateur différentiel dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ces conditions suffisantes sont, dans le cas des modèles à coefficients constants, aussi nécessaires pour l'hypoellipticité avec régularité maximale.

Par ailleurs, les techniques utilisées permettent d'obtenir des conditions suffisantes (ou nécessaires et suffisantes) d'hypoellipticité avec régularité maximale pour des classes générales d'opérateurs différentiels ordinaires.

Auparavant, on rappelle deux types de résultats classiques :

1°) Résultats de V.V. Grušin (5) : L'opérateur $D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x$ est hypoelliptique dans R^2 si et seulement si $\lambda \neq 2n+1$, $n \in Z$ i.e. si et seulement si $\mathrm{Ker}(D_t^2 + t^2 \pm \lambda) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$. Plus généralement un opérateur du type de Fuchs (2), quasi-homogène et elliptique pour $t \neq 0$ est partiellement hypoelliptique (ou hypoelliptique si la variété $t = 0$ n'est pas caractéristique pour l'opérateur L) si $\mathrm{Ker}\, L(t,\xi,D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$ pour tout $\xi \neq 0$. (Par quasi-homogène, on entend que le symbole principal vérifie une relation du type : $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $L(t/\lambda\ ;\ \lambda^\delta \xi, \lambda\tau) \equiv \lambda^{-\sigma} L(t,\xi,\tau))$.

Maintenant, si on considère l'opérateur $D_t^2 + \lambda\, t^{2k} D_x^2 + \mu\, t^\ell D_x$, k et ℓ étant deux entiers. Si $\ell \geq k-1$, cet opérateur est du type de Fuchs quasi-homogène et on sait donc étudier l'hypoellipticité de cet opérateur (3) (2) (9) ; par contre si on a : $0 \leq 1 < k-1$, cet opérateur est toujours du type de Fuchs, mais n'est plus quasi-homogène et on va montrer que :

<u>THEOREME 1</u>. Sous les conditions (1) $\mathrm{Ker}(D_t^2 \pm \mu\, t^{\ell}) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

(2) $\tau^2 + \lambda\, t^{2k}\, \xi^2 + \mu\, t^{\ell}\, \xi \neq 0$

pour $t \neq 0$, $|\tau| + |\xi| \neq 0$, $(\xi,\tau) \in R^2$, l'opérateur $D_t^2 + \lambda\, t^{2k}\, D_x^2 + \mu\, t^{\ell}\, D_x$ est hypoelliptique dans R^2.

<u>Remarque 1</u>. La condition (1), modulo la condition (2) est toujours satisfaite cf. (2) par exemple.

<u>Remarque 2</u>. Un résultat analogue est obtenu par Menikoff (10).

2°) Résultats de M.I. Visik et V.V. Grušin (4) : L'opérateur $t^{\sigma}\Delta_{x,t}^2 - \Delta_{x,t}$ où $\Delta_{x,t}$ désigne le Laplacien et où σ est un entier pair > 2 est hypoelliptique dans R^2. Plus généralement, un opérateur $L(t;D_x,D_t)$ qui dégénère sur la variété $t = 0$ en un opérateur elliptique et dont le symbole $L(t;\xi,D_t)$ vérifie une condition d'ellipticité générale pour $t \neq 0$, $L(t;\xi,\tau) \neq 0$ pour tout $(\xi,\tau) \in R^2 \setminus \{0\}$ est hypoelliptique dans R^2.

Maintenant, si on considère l'opérateur $t^{\sigma}(D_t^4+D_x^4) + \lambda D_t^2 + \mu t^2 D_x^2 + \nu D_x$ où σ est un entier ≥ 0. Cet opérateur dégénère sur $t = 0$ en l'opérateur $\lambda\, D_t^2 + \nu\, D_x$ qui n'est pas elliptique.

Pour $\sigma \leq 2$, ou bien $\lambda = 0$, cet opérateur est ou bien du type de Fuchs quasi-homogène, ou bien du type de Fuchs non quasi-homogène comme l'opérateur précédent $D_t^2 + \lambda\, t^{2k}\, D_x^2 + \mu\, t^{\ell}\, D_x$. On supposera donc $\sigma > 2$ et $\lambda \neq 0$. Pour simplifier, on supposera aussi que $\mu \neq 0$, le cas $\mu = 0$ étant plus simple et se traitant par les mêmes méthodes. On a alors le résultat suivant :

<u>THEOREME 1.2</u>. On suppose $\sigma > 6$. Alors, si les conditions d'ellipticité générales suivantes :

$$\lambda\, \tau^2 + \mu\, t^2\, \xi^2 \neq 0$$

$$\lambda\, \tau^2 + t^\sigma\, \xi^4 + \mu\, t^2\, \xi^2 \neq 0$$

$$t^\sigma\, \tau^4 + t^\sigma\, \xi^4 + \lambda\, \tau^2 \neq 0$$

sont satisfaites pour $t \neq 0$ et $(\xi,\tau) \in R^2 \setminus \{0\}$ et si la condition différentielle : $\operatorname{Ker}(\lambda\, D_t^2 + \mu\, t^2 \pm \nu) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

est satisfaite, alors l'opérateur L est hypoelliptique dans R^2.

Lorsque $\lambda = \mu = 1$, il est bien connu que cette condition s'exprime par $\nu \neq 2n+1$, $n \in Z$.

THEOREME 1.3. On suppose $2 < \sigma \leq 6$. Alors, si la condition d'ellipticité générale : $t^\sigma\, \tau^4 + t^\sigma\, \xi^4 + \lambda\, \tau^2 \neq 0$

pour $t \neq 0$, $(\xi,\tau) \in R^2 \setminus (0,0)$ est satisfaite et si les conditions différentielles suivantes :

(i) pour $\sigma = 6$: $\operatorname{Ker}(\lambda\, D_t^2 + t^\sigma + \mu\, t^2 \pm \nu) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

(ii) pour $\sigma < 6$: $\operatorname{Ker}(\lambda\, D_t^2 + t^\sigma) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

sont satisfaites, alors l'opérateur L est hypoelliptique dans R^2.

Remarque. Utilisant les résultats de (2), on peut montrer que la condition différentielle (ii) est toujours satisfaite.

Les méthodes que nous utiliserons sont en fait très générales, mais nous préférons ici les développer sur des cas particuliers significatifs.

II. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.1.

En fait on va établir un résultat plus précis que le théorème 1.1 :

PROPOSITION 2.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que : pour tout $u(x,t) \in \mathcal{D}(R^2)$

avec supp $u \subset R_x \times [-\delta,\delta]$, on ait :

$$\| D_t^2 u \| + \| t^{2k} D_x^2 u \| + \| t^{\ell} D_x u \| \leq C . \| Lu \|$$

où $\| \;\|$ désigne la norme de $L^2(R^2)$;

(ii) Les conditions (1) et (2) du théorème 1.1 sont satisfaites.

Remarque. La condition (1), modulo la condition (2), est toujours satisfaite en utilisant les résultats de (2).

Démonstration.

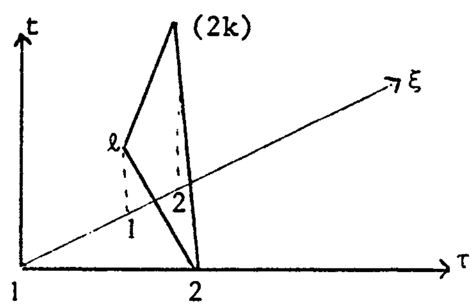
(ii) $\Longrightarrow$ (i) : cela résulte du fait que (ii) implique (iii).

(iii) Soit $\delta > 0$, $\exists C > 0$ et $A > 0$ tels que : pour tout $u \in \mathcal{D}(R)$ avec supp $u \subset [-\delta,\delta]$, pour tout $\xi \in R$, $|\xi| \geq A$, on ait :

$$\| D_t^2 u \| + |\xi| \, \| t^{\ell} u \| + |\xi|^2 \, \| t^{2k} u \| \leq C . \| L(t;\xi,D_t) u \| \tag{2.1}$$

où $\| \;\|$ désigne la norme dans $L^2(R)$.

Cette estimation (2.1) sera obtenue en 3 étapes et pour la commodité on pourra représenter l'opérateur $L(t;D_x,D_t) \equiv D_t^2 + \lambda \, t^{2k} D_x^2 + \mu \, t^1 D_x$ par les points (2,0,0), (0,2,2k) et (0,1,1) dans R^3 :



On notera : $L_1^0(t;\xi,D_t) \equiv D_t^2 + \mu \, t^1 \xi$ et $L_2^0(t;\xi,D_t) \equiv L(t;\xi,D_t)$.

1ère étape. On étudie l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ dans la zone (t,ξ),

$|t| \leq \delta_1 \ |\xi|^{-\frac{1}{2k-\ell}} = \tau_1$, où $\delta_1 > 0$.

Dans cette zone, l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ est approché par l'opérateur $L_1^o(t;\xi,D_t)$. Cet opérateur est un opérateur du type de Fuchs quasi-homogène et quasi-elliptique pour $t \neq 0$ puisque la condition d'ellipticité générale (2) implique que : $\tau^2 + \mu \, t^\ell \, \xi \neq 0$ pour $t \neq 0$ et $(\tau,\xi) \in R^2 \setminus \{0\}$.

Compte tenu de la condition (1), on déduit, d'après l'étude générale des opérateurs du type de Fuchs quasi-homogène que :

Il existe $C > 0$, telle que : pour tout $u \in \mathfrak{D}(R)$, pour tout $\xi \in R \setminus \{0\}$ on ait :

$$\|D_t^2 \, u\| + |\xi| \ \|t^\ell \, u\| \leq C \ \|L_1^o(t;\xi,D_t)u\| \ .$$

D'où, si de plus supp $u \subset [-\tau_1,\tau_1]$,

$$\|D_t^2 \, u\| + |\xi| \ \|t^\ell \, u\| \leq C \ \{\|L(t;\xi,D_t)u\| + \delta_1 \ |\xi| \ \|t^\ell \, u\|\}$$

de sorte que pour δ_1 assez petit, on obtient :

$$(2.2) \qquad \|D_t^2 \, u\| + |\xi| \ \|t^\ell \, u\| \leq C. \ \|L(t;\xi,D_t)u\|$$

<u>2ème étape</u>. On étudie l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ dans la zone (t,ξ):

$\tau_2 = \delta_2 . |\xi|^{-\frac{1}{2k-\ell}} \leq |t| \leq \delta$, où $\delta_2 > 0$.

Dans cette zone, la condition d'ellipticité générale (2) joue un rôle essentiel. Cette condition va nous permettre, grâce à un changement de variables et de fonctions, d'appliquer la proposition suivante de Visik et Grusin :

<u>PROPOSITION 2.2</u>. (cf. proposition 3.2. de (4)).

Soient $P(t,D_t) = P_o(t,D_t) + P_1(t,D_t)$ avec

$P_o(t,D_t) = D_t^k + \sum_{j=0}^{k-1} B_{j_o}(t) \ D_t^j$ et $P_1(t,D_t) = \sum_{j=0}^{k-1} B_{j_1}(t) \ D_t^j$, les coefficients étant C^∞. On désignera par $\zeta_\nu(t)$, $\nu = 1,\dots,k$, les racines de $P_o(t,\zeta) = 0$. Pour tout $C > 0$, pour tout $b > 0$, il existe des constantes $A > 0$ et $0 < \varepsilon < 1$ telles que si pour $-\infty \leq t_1 < t < t_2 \leq +\infty$, on a :

$$|B_{j_o}(t)| \leq C, \; |D_t^\ell B_{j_o}(t)| \leq \varepsilon, \; |B_{j_1}(t)| \leq \varepsilon, \; |\operatorname{Im} \zeta_\nu(t)| \geq b$$

pour $j = 0,\dots,k$, $\ell = 1,\dots,k$, alors $P(t,D_t)$ agissant de $H^k(t_1,t_2)$ dans $L^2(t_1,t_2)$ admet un inverse à droite R tel que :

$P\,R\,f = f$ et $R\,P\,u = u$ si supp u est compact dans $]t_1,t_2[$ avec :

pour tout f dans $L^2(t_1,t_2)$,

$$\|R\,f\|_{H^k(t_1,t_2)} \leq A\,\|f\|_{L^2(t_1,t_2)}$$

On indique maintenant, comment on applique ce résultat. On pose :

$$h(\xi,t) = (|t|^\ell\,|\xi| + t^{2k}\,|\xi|^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad h(\xi,t)\,dt = dy$$

$$w(y) = h^{3/2}\,u(t) \quad , \quad h^{-1/2}\,f(t) = g(y)$$

On obtient alors que :

$$L(t;\xi,D_t)u(t) = f(t) \iff P_o(y,D_y)\,w + P_1(y,D_y)\,w = g$$

avec :
$$P_o(y,D_y) \equiv D_y^2 + \lambda\,t^{2k}\,|\xi|^2\,h^{-2} + \mu\,t^\ell\,\xi\,h^{-2}$$
$$P_1(y,D_y) \equiv 2\;h^{-2}\,\frac{\partial h}{\partial t}\,D_y - \left[\frac{-15}{4}\;h^{-4}\,\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2 - \frac{3}{2}\,h^{-3}\,\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\right]$$

On vérifie facilement que pour $|\xi| \geq A$, avec A ssez grand, les conditions sur les coefficients de P_o et P_1 sont satisfaites.

On examine maintenant la condition sur les racines ζ de $P_o(y;\zeta) = 0$. On a :

$$\begin{cases} P_o(y;\zeta) = h^{-2}\,L_2^o(t;\xi,h\zeta) \\ L_2^o(1;t^{2k-\ell}\,\xi,z) = t^{2(k-\ell)}\,L_2^o(t;\xi,t^{\ell-k}z) \end{cases}$$

de sorte que les racines $\zeta_\nu(t,\xi)$ de $P_o(y;\zeta) = 0$ s'écrivent :

$$\zeta_\nu(t,\xi) = h^{-1}\, t^{\ell-k}\, z_\nu(1,t^{2k-\ell}\xi)$$

où z_ν désignent les racines de $L_2^o(t;\xi,z) = 0$. Mais le polynôme $L_2^o(1;\xi,z)$ est un polynôme elliptique (d'après (2)), par suite, on a :

(2.3) $\quad \operatorname{Im} z_\nu(1,\xi) \geq c\, |\xi| \quad , \quad c > 0$

pour $|\xi| \geq B$ avec B assez grand.

D'autre part, ce polynôme $L(1;\xi,z)$ ne s'annule pas pour $B \geq |\xi| \geq \delta_2^{2k-\ell}$ et $z \in R$, par suite, (2.3) a lieu pour $|\xi| \geq \delta_2^{2k-\ell}$ quitte à changer la constante c. Il en résulte que pour $|t|^{2k-\ell}\xi \geq \delta_2^{2k-\ell}$, on a :

$$|\operatorname{Im} \zeta_\nu(t;\xi)| \geq C.\, h^{-1}\, |t|^{\ell-k}\, |t|^{2k-\ell}\, |\xi| = C\,\frac{|t^k\,\xi|}{h}$$

et tenant compte de l'expression de h, on vérifie immédiatement que pour $|t|^{2k-\ell}\, |\xi| \geq \delta_2^{2k-\ell}$, on a : $\dfrac{|t|^k\,|\xi|}{h} \geq c'$ avec $c' > 0$.

Finalement, pour $|\xi| \geq A$, avec A ssez grand, on peut appliquer la proposition (2.2) ; ce qui donne l'estimation :

$$\sum_{j=0}^{2} \|D_y^j\, w\| \leq C.\, \|[P_o(y;D_y) + P_1(y,D_y)]w\|$$

pour tout $w(y) \in \mathfrak{D}(R)$ avec supp $w \subset [y(\tau_2),y(\delta)]$, ce qui, en revenant à la variable t donne :

Pour tout $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$ avec supp $u \subset [\tau_2,\delta]$ et $|\xi| \geq A$, on a :

(2.4) $\quad \|D_t^2\, u\| + |\xi|\, \|t^\ell\, u\| + |\xi|^2\, \|t^{2k}\, u\| \leq C.\, \|L(t;\xi,D_t)u\|$

<u>3ème étape</u>. Partition de l'unité.

On suppose maintenant $0 < \delta_2 < \delta_1$. Soient $\phi_1 \in \mathfrak{D}(R)$ avec $\phi_1 \equiv 1$ sur un voisinage de $[-\delta_2,\delta_2]$ et supp $\phi_1 \subset]-\delta_1,\delta_1[$. On pose $\phi_2 = 1 - \phi_1$ et $\varphi_i(t) = \phi_i\,(t\,|\xi|^{1/2k-\ell})$, $i = 1,2$.

Soit maintenant $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$ avec supp $u \subset [-\delta,\delta]$; on peut écrire :

$u = \varphi_1\, u + \varphi_2\, u$.

D'après les inégalités (2.2) et (2.4), on a que pour $|\xi| \geq A$:

(2.5) $\qquad \|D_t^2 (\varphi_i u)\| + |\xi| \, \|t^\ell \varphi_i u\| + |\xi|^2 \, \|t^{2k}(\varphi_i u)\| \leq C. \|L(t;\xi,D_t) \varphi_i u\|$

et l'estimation (2.1) résulte alors du

<u>LEMME 2.1</u>. Il existe une constante c > 0 et une constante $\lambda > 0$ telles que pour tout $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$, pour $|\xi| \geq 1$, on ait :

$$\|L(t;\xi,D_t)(\varphi_i u) - \varphi_i L(t,\xi,D_t)u\| \leq C. \, |\xi|^{-\lambda} \|\!|u|\!\|_\xi$$

pour i = 1,2 avec $\|\!|u|\!\|_\xi = \|D_t^2 u\| + |\xi| \, \|t^\ell u\|$.

<u>Démonstration</u>. On a : $[L, \varphi_i] \, u \equiv (D_t^2 \varphi_i) \, u + 2(D_t \varphi_i).(D_t u)$.
Mais $\mathrm{supp}(D_t^2 \varphi_i)$ et $\mathrm{supp}(D_t \varphi_i) \subset [-\tau_1,-\tau_2] \cup [\tau_2, \tau_1]$; par suite, on n'a seulement à considérer les t pour lesquels $\frac{1}{|t|} \leq \frac{1}{\delta_2} |\xi|^{1/2k-\ell}$ D'où :

$$\|(D_t^2 \varphi_i)u\| \leq C. \, |\xi|^{2.\frac{\ell+1-k}{2k-\ell}} |\xi| \, \|t^\ell u\|$$

Pour estimer le terme $\|D_t \varphi_i . D_t u\|$, on vérifie d'abord que l'on a le résultat de dérivées intermédiaires suivant :

(2.6) $\quad$ Il existe une constante c > 0 telle que pour tout $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$, pour tout $\xi \neq 0$, on ait :

$$|\xi|^{+1/2} \, \|t^{\ell/2} D_t u\| \leq C. \, \{\|D_t^2 u\| + |\xi| \, \|t^\ell u\|\}$$

Par suite, on en déduit :

$$\|(D_t \varphi_i).(D_t u)\| \leq C \, . \, |\xi|^{\frac{\ell+1-k}{2k-\ell}} \|\!|u|\!\|_\xi$$

<u>Démonstration de (i) $\Longrightarrow$ (ii)</u>. Utilisant les techniques de Hörmander (7)(6), on microlocalise les estimations a priori en des points convenables du fibré cotangent de R^2.

On achève maintenant la démonstration du théorème 1.1.

Il résulte de l'estimation (2.1) que si $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$ avec $\mathrm{supp}\, u \subset [-\delta,+\delta]$

et si $|\xi| \geq A$, alors on a, pour tout réel q :

$$|||u|||_{\xi,q} \equiv (1+|\xi|^2)^{q/2} \| D_t^2 u\| + (1+|\xi|^2)^{q+1/2} \| t^\ell u\| + (1+|\xi|^2)^{q+2/2} \| t^{2k} u\|$$
$$\leq C.\ (1+|\xi|^2)^{q/2}\ \| L(t;\xi,D_t)u\|,$$

et si $|\xi| \leq A$, on déduit aussi de cette inégalité :

$$|||u|||_{\xi,q} \leq C.\ (1+|\xi|^2)^{q/2}\ \| L(t;\xi,D_t)u\| + |||u|||_{\xi,q-1}$$

Il en résulte que si $u(x;t) \in \mathfrak{D}(R^2)$ avec supp $u \subset R_x \times [-\delta,\delta]$, on a pour tout réel q l'estimation a priori :

$$(2.7)\quad |||u|||_q \equiv \| D_t^2 u\|_{L^2(\mathbb{R};H^q(\mathbb{R}))} + \| t^\ell u\|_{L^2(\mathbb{R};H^{q+1}(\mathbb{R}))} + \| t^{2k} u\|_{L^2(\mathbb{R};H^{q+2}(\mathbb{R}))}$$
$$\leq C\ \{\| Lu\|_{L^2(\mathbb{R};H^q(\mathbb{R}))} + |||u|||_{q-1}\}.$$

On déduit alors de cette inégalité a priori, par les méthodes usuelles, que l'opérateur est hypoelliptique dans R^2. Le théorème 1.1 est démontré.

III. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1.2 ET 1.3.

Comme dans l'exemple précédent, les théorèmes 1.2 et 1.3 reposent sur la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1. Sous les conditions différentielle et d'ellipticité générale des théorèmes 1.2 et 1.3, il existe $c > 0$, $\delta > 0$ tels que : pour tout $u(x,t) \in \mathfrak{D}(R^2)$ avec supp $u \subset R_x \times [-\delta,\delta]$, on ait :

$$\| t^\sigma\ D_t^4 u\| + \| t^\sigma\ D_x^4 u\| + \| D_t^2 u\| + \| t^2\ D_x^2 u\| + \| D_x u\| \leq c.\| Lu\|$$

où $\|\ \|$ désigne la norme dans $L^2(R^2)$.

Comme dans la proposition 2.1, ces conditions différentielle et d'ellipticité générale sont aussi nécessaires pour que l'estimation L^2 de cette proposition 3.1 soit vraie.

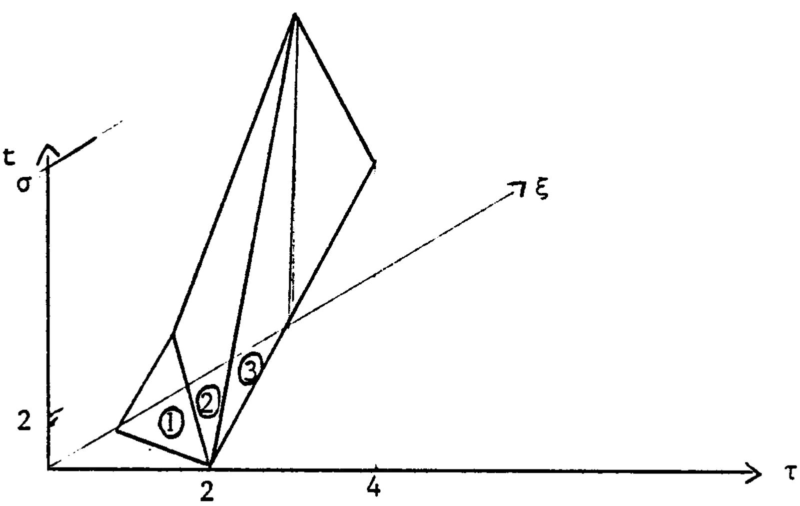
Pour établir la proposition 3.1, on va montrer que :

Soit $\delta > 0$, il existe $c > 0$ et $A > 0$ tels que : pour tout $u \in \mathcal{D}(R)$ avec supp $u \subset [-\delta,\delta]$, pour tout $\xi \in R$, $|\xi| \geq A$, on ait :

(3.1) $\|t^\sigma D_t^4 u\| + |\xi|^4 \|t^\sigma u\| + \|D_t^2 u\| + |\xi|^2 \|t^2 u\| + |\xi| \|u\| \leq C.\|L(t;\xi,D_t)u\|$

La démonstration de cette inégalité sera faite en plusieurs étapes comme pour la proposition 2.1 mais avec quelques difficultés supplémentaires que l'on va préciser maintenant.

On va se limiter au cas du théorème 1.2.



Cas du théorème 1.2.

La condition $\sigma > 6$ signifie la "convexité" des trois points (1,0), (2,2) et $(4,\sigma)$ dans le plan défini par $\tau = 0$.

La condition $\sigma > 2$ signifie que la pente du segment (2,0) - $(4,\sigma)$ est > 1 dans le plan défini par $\xi = 0$.

A chaque face ① ② et ③ est associé un opérateur différentiel $L_i^\sigma(t;\xi,D_t)$, i = 1,2,3.

<u>1ère étape</u>. On étudie l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ dans la zone :
$|t| \leq \delta_1 |\xi|^{-\frac{2}{\sigma-2}} = \tau_1$ où $\delta_1 > 0$.

Dans cette zone, l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ est approché par l'opérateur L_1^o o M où

$$M(t,D_t) = \lambda^{-1}\, t^\sigma\, D_t^2 + 1 \quad ; \quad L_1^o = \lambda\, D_t^2 + \mu\, t^2\, \xi^2 + \nu\, \xi.$$

L'opérateur $L_1^o(t;\xi,D_t)$ étant un opérateur du type de Fuchs quasi-homogène et elliptique pour $t \neq 0$; il existe $c > 0$ telle que : pour tout $\xi \in R \setminus \{0\}$ et pour tout $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$, on ait :

(3.2) $$|\xi|^2 \;\|t^2\, u\| + |\xi|\; \|u\| + \|D_t^2\, u\| \leq c.\, \|L_1^o(t;\xi,D_t)u\|.$$

On applique ensuite cette inégalité à $M\, u(t)$ pour $u(t) \in \mathfrak{D}(R)$ au lieu de u ; ceci nous amène à étudier de façon précise les opérateurs différentiels du type $M(t,D_t)$ dans des espaces de Sobolev avec poids.

Plus généralement, soit $M \equiv M(t,D_t) \equiv \sum_{j=0}^{m} a_j\, t^{qj}\, D_t^j$, $D_t = {}^{-1}\,\frac{d}{dt}$

$m \in \mathbb{N}$, q réel > 1, $a_j \in \mathbb{C}$ et $a_j = 0$ si $qj \notin N$. On note :

$$W_{q,k}^{m,p}(\mathbb{R}) = \{u \in H^{p-k}(\mathbb{R}) \; ; \; |t|^{k+qj}\, D_t^{j+h}\, u \in L^2(\mathbb{R}) \; ; \; 0 \leq j \leq m,\; 0 \leq h \leq p\}$$

$$W_p^k(\mathbb{R}) = \{u \in H^{p-k}(\mathbb{R}) \; ; \; t^k\, D_t^h\, u \in L^2(\mathbb{R}) \; ; \; 0 \leq h \leq p\}$$

munis des normes canoniques, pour p et k entiers ≥ 0.

On a alors le résultat suivant :

<u>PROPOSITION 3.2</u>. Sous la condition (H) suivante :

(H) $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \tau \in \mathbb{R}, M(t;\tau) \neq 0$

l'opérateur M est injectif et à indice de $W_{q,k}^{m,p}(R)$ dans $W_k^p(R)$, cet indice est indépendant de p et k.

Cette proposition 3.2 est une conséquence de la proposition 2.2 par le changement de variable $dy = t^{-q}\, dt$.

On applique alors cette proposition à partir de l'inégalité (3.2) dans laquelle u est remplacée par M u, $u \in \mathfrak{D}(R)$, on obtient en particulier :

(3.3) $|\xi|\ \|u\| + |\xi|^2\ \|t^2 u\| + \|D_t^2 u\| + \|t^\sigma\ D_t^4 u\| \leq c.\|(L_1^o \circ M)u\|$;

et par ailleurs, on a : $\|(L - L_1^o \circ M)u\| \leq c(\xi,\delta_1)\ |||u|||_*$ pour $\operatorname{supp} u \subset [-\tau_1,\tau_1]$ et où $|||u|||_*$ désigne le premier membre de (3.3) et

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ |\xi| \to \infty}} c(\xi,\delta_1) = 0.$$

Donc, il existe $c > 0$, $A > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que : pour tout $u \in \mathfrak{D}(R)$ avec $\operatorname{supp} u \subset [-\tau_1,\tau_1]$ on ait :

(3.4) $|\xi|\ \|u\| + |\xi|^2\ \|t^2 u\| + \|D_t^2 u\| + \|t^\sigma\ D_t^4 u\| \leq c.\ \|L(t,\xi,D_t)u\|$

<u>2ème étape</u>. On étudie l'opérateur dans la zone :

$$\tau_2 = \delta_2\ |\xi|^{-\frac{2}{\sigma-2}} \leq |t| \leq \delta_3\ |\xi|^{-\frac{2}{\sigma}} = \tau_3 \quad \text{avec } 0 < \delta_2 < \delta_1 .$$

Dans cette zone, l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ est approché par l'opérateur $L_2^o \circ M$ où $L_2^o \equiv L_2^o(t,\xi,D_t) \equiv \lambda\ D_t^2 + \mu\ t^2\ \xi^2 + t^\sigma\ \xi^4$.

Pour l'opérateur L_2^o, on utilise comme dans le premier exemple, la condition d'ellipticité générale : $\lambda\ \tau^2 + t^\sigma\ \xi^4 + \mu\ t^2\ \xi^2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, $(\xi,\tau) \in R^2 \setminus 0$, puis comme dans la première étape, on compose avec l'opérateur M grâce à la proposition 3.2 ; on obtient ainsi une estimation du type :

$$(3.5) \qquad |\xi|^2\ \|t^2\ u\| + |\xi|^4\ \|t^\sigma\ u\| + \|D_t^2\ u\| + \|t^\sigma\ D_t^4\ u\| \leq c\ \|L(t;\xi,D_t)u\|$$

pour $|\xi| \geq A$, δ_3 assez petit et $u \in \mathfrak{D}(R)$, $\operatorname{supp} u \subset [\tau_2,\tau_3] \cup [-\tau_3,-\tau_2]$.

<u>3ème étape</u>. On étudie l'opérateur dans la zone : $\tau_4 = \delta_4 \, |\xi|^{-2/\sigma} \leq |t| \leq \delta$ avec $0 < \delta_4 < \delta_3$.

Dans cette zone, l'opérateur $L(t;\xi,D_t)$ est approché par l'opérateur $L_3^o \equiv L_3^o(t;\xi,D_t) \equiv t^\sigma \, D_t^4 + t^\sigma \, \xi^4 + \lambda \, D_t^2$.

Pour l'opérateur L_3^o, on utilise la condition d'ellipticité générale : $t^\sigma \, \tau^4 + t^\sigma \, \xi^4 + \lambda \, \tau^2 \neq 0$ pour $t \neq 0$, $(\xi,\tau) \in R^2 \setminus 0$, et la proposition 3.2, ce qui donne :

$$(3.6) \qquad |\xi|^4 \, \| t^\sigma \, u \| + \| t^\sigma \, D_t^4 \, u \| + \| D_t^2 \, u \| \leq c \, \| L(t,\xi,D_t) u \|$$

pour $|\xi| \geq A$ et $u \in \mathfrak{D}(R)$, supp $u \subset [\tau_4, \delta]$.

<u>4ème étape</u>. A l'aide d'une partition de l'unité convenable, on obtient finalement l'estimation (3.1).

A partir de l'estimation (3.1), on déduit les estimations optimales à partir desquelles on déduit classiquement que l'opérateur L est partiellement hypoelliptique dans R^2.

Pour établir qu'en fait l'opérateur L est hypoelliptique dans R^2, on remarque qu'avec les mêmes conditions et les mêmes techniques, on peut étudier les opérateurs $L \circ \Delta_{x,t}^k$, $k \in N$, ce qui en utilisant les résultats de (1), (11) permet l'étude des opérateurs maximaux associés aux opérateurs $L \circ \Delta_{x,t}^k$ et en particulier d'obtenir que si $u \in L^2_{loc}$ et $(L \circ \Delta_{x,t}^k) \, u \in L^2_{loc}$, alors u a, localement, la régularité maximale souhaitée ; à partir des estimations directes, on déduit finalement que L est hypoelliptique dans R^2.

<u>Remarque</u>. L'hypoellipticité de l'opérateur
$L \equiv L(t;D_t,D_x) \equiv t^\sigma(D_t^4 + D_x^4) + \lambda \, D_t^2 + \mu \, t^2 \, D_x^2 + \nu \, D_x$ implique évidemment l'hypoellipticité de l'opérateur $L(t,0,D_t) \equiv (t^\sigma \, D_t^2 + \lambda) \, D_t^2$ et par suite l'hypoellipticité de l'opérateur $M(t,D_t) \equiv t^\sigma \, D_t^2 + \lambda$; ceci n'est guère

étonnant puisque la condition (H) de la proposition 3.2 est, d'après un résultat de Kannai (8) une condition suffisante d'hypoellipticité. Cette condition est également nécessaire et suffisante pour qu'on ait l'estimation a priori L^2 optimale. Ce résultat est utile pour étudier des cas plus généraux.

REFERENCES

(1) P. BOLLEY, J. CAMUS - Quelques propriétés des opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés.
Annali della scuola normale di Pisa (1975).

(2) P. BOLLEY, J. CAMUS, B. HELFFER - Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques.
Journal de Math. pures et appliquées (1976).

(3) A. GILIOLI, F. TREVES - An example in the solvability theory of linear P.D.E.'s.
Amer. Journal of Math. 96 (1974) p 367-385.

(4) V. GRUSIN, M. VISIK - Boundary value problems for elliptic equations degenerate on the boundary of a domain.
Mat. Sbornik 80, (122) (1969), p 455-491.

(5) V. GRUSIN - On a class of hypoelliptic operators.
Mat. Sbornik 83 (125) (1970) p 456-473.

(6) B. HELFFER - Conditions nécessaires d'hypoellipticité.
Thèse Orsay (1976) et preprint du centre de Math. de l'Ecole polytechnique.

(7) L. HÖRMANDER - Pseudodifferential operators and non elliptic boundary value problems.
Ann. of Math. 83 (1966) p 129-209.

(8) Y. KANNAI - Hypoelliptic ordinary differential operators.
Israel Journal of Math., vol 13, n° 1 2 (1972)

(9) A. MENIKOFF - Some examples of hypoelliptic partial differential equations. Math. Annalen 221, 2 (1976).

(10) A. MENIKOFF - Communication personnelle.

(11) D. PREVOSTO - Opérateurs maximaux associés à une classe d'opérateur elliptiques fortement dégénérés sur la frontière. Astérisque (1976).