

P. BOLLEY

J. CAMUS

Un théorème de prolongement pour l'opérateur « divergence »

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1976, fascicule 1

« Séminaires d'analyse fonctionnelle », , p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1976__1_A4_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN THEOREME DE PROLONGEMENT POUR L'OPERATEUR "DIVERGENCE"

par

P.BOLLEY et J.CAMUS

Introduction :

On donne une réponse positive à une question posée par C.GOULAOUIC : Etant donné un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$ et une distribution $\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$ telle que $\text{rot } \vec{u} = \vec{f} \in L^2(\Omega)^3$, existe-t-il $\vec{v} \in H^1(\Omega)^3$ tel que : $\text{rot } \vec{v} = \vec{f}$?

Nous allons montré que la réponse est positive lorsque Ω est un ouvert borné, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord compacte C^∞ , à bord Γ connexe.

Signalons que ce résultat a déjà été obtenu par C. GOULAOUIC et L.TARTAR par une méthode différente avec l'hypothèse supplémentaire : Ω simplement connexe.

Un théorème de prolongement pour l'opérateur " divergence "

Pour résoudre l'équation $\text{rot } \vec{u} = \vec{f}$, l'idée naturelle est de prolonger le vecteur $\vec{f}$ à $\mathbb{R}^3$ et de résoudre ensuite en utilisant la transformation de Fourier.

Or si $\vec{f} = \text{rot } \vec{u}$, avec $\vec{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^3$, il est clair que $\text{div } \vec{f} = 0$. Par suite, on est ramené à prolonger les vecteurs $\vec{f} \in L^2(\Omega)^3$ tels que $\text{div } \vec{f} = 0$.

Soit alors Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, $\bar{\Omega}$ étant une variété à bord compacte C^∞ . On fera l'hypothèse suivante :

(H) Le bord Γ de $\bar{\Omega}$ est connexe.

Il résulte alors du théorème de Jordan-Brouwer que Ω et $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ sont connexes.

On va montrer le :

Théorème 1 : Soit p un entier ≥ 0 . Alors, sous l'hypothèse (H), il existe un opérateur de prolongement P linéaire continu de $H^p(\text{div}, \Omega) = \{\vec{f} \in (H^p(\Omega))^n; \text{div } \vec{f} = 0\}$ dans $H^p(\text{div}, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R} \{ \vec{f} \in (H^p(\mathbb{R}^n))^n; \text{div } \vec{f} = 0 \}$.

Démonstration : Soit $R > 0$ tel que la boule ouverte $B(0, R)$ contienne l'ouvert Ω et soit $\Omega' = B(0, R) \setminus \Omega$; Ω' est donc un ouvert connexe.

La démonstration consiste à résoudre un problème aux limites convenable pour l'opérateur $L = \text{div} \cdot \varphi^p \text{ grad}$ dans l'ouvert Ω' où φ est une fonction C^∞ équivalente à la distance au bord. Pour cela, nous serons amenés à distinguer deux cas selon que $p = 0$ où $p \geq 1$.

Cas $p = 0$: 1°) Il résulte de [2] que si $\vec{f} \in (L^2(\Omega))^n$ avec $\text{div } \vec{f} \in L^2(\Omega)$, alors $(\vec{n}, \vec{f})$ a un sens sur Γ et appartient à $H^{-1/2}(\Gamma)$ ($\vec{n}$ désigne la normale à Γ intérieure à Ω); de plus, on a la formule de Green : pour tout $\Phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, on a :

$$\int_{\Omega} \text{div } \vec{f} \cdot \Phi \, dx - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Gamma} (\vec{n}, \vec{f}) (\gamma_0 \Phi) \, d\sigma.$$

Par suite, si $\vec{f} \in H^0(\text{div}, \Omega)$, on doit avoir :

$$(1.1) \quad \langle (\vec{n}, \vec{f}), 1 \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0,$$

2°) On considère dans Ω' le problème aux limites :

$$(1.2) \quad \begin{cases} Lq = \Delta q = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \gamma_1 q = \begin{cases} (\vec{n} \cdot \vec{f}) & \text{sur } \Gamma \\ 0 & \text{sur } |x| = R \end{cases} \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{cases}$$

utilisant le résultat de [3], ce problème admet une solution q dans $H^1(\Omega')$ si et seulement si :

$$(1.3) \quad \langle \gamma_1 q, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} = 0$$

pour tout $v \in N^* = \{v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}'); \Delta v = 0, \gamma_1 v = 0 \text{ sur } \Gamma \cup \{|x| = R\}\}$
 Ω' étant connexe, l'espace N^* se réduit aux fonctions constantes et la condition de compatibilité (1.3) est alors une conséquence de (1.1).

3°) On pose alors pour $\vec{f} \in H^0(\text{div.}\Omega)$,

$$P \vec{f} = \begin{cases} \vec{f} & \text{sur } \Omega \\ \vec{\text{grad}} q & \text{sur } \Omega' \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus \Omega' \end{cases}.$$

Il reste à vérifier que $\vec{F} = P\vec{f} \in (L^2(\mathbb{R}^n))^n$ ce qui est immédiat et que $\text{div } \vec{F} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$, or ceci résulte de la formule de Green suivante : pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \langle \text{div } \vec{F}, \phi \rangle &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} F_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega'} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx \\ &= - \langle (\vec{n} \cdot \vec{f}), \gamma_0 \phi \rangle_{\Gamma} + \langle \gamma_1 q, \gamma_0 \phi \rangle_{\Gamma} = 0. \end{aligned}$$

Cas $p \geq 1$: 1°) Soit $\vec{f} \in H^p(\text{div}, \Omega)$ et soit $\vec{F} = Q \vec{f}$ un prolongement linéaire continu de $\vec{f}$ à $(H^p(\mathbb{R}^n))^n$ avec $\text{supp } \vec{F} \subset B(0, R)$. On pose $G = \text{div } \vec{F}|_{\Omega}$. On a alors $G \in H_0^{p-1}(\Omega')$ et $\int_{\Omega'} G \, dx = 0$, en effet, d'après la formule de Green précédente :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} G \, dx &= \int_{\Omega'} \text{div } \vec{F} \cdot 1 \, dx = \int_{\partial \Omega'} (\vec{n} \cdot \vec{F}) \cdot 1 \, d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} (\vec{n} \cdot \vec{F}) \cdot 1 \, d\sigma = \langle \vec{n} \cdot \vec{f}, 1 \rangle_{\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

2°) On considère alors le problème

$$(1.4) \quad \begin{cases} \text{div } \vec{u} = G \text{ dans } \Omega' \\ \vec{u} \in (H_0^p(\Omega'))^n. \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on considère l'opérateur $L = \text{div } \varphi^p \text{ grad}$. Il résulte de [1] que cet opérateur est à indice nul, de $W_p^{p+1}(\Omega') = \{u \in H^1(\Omega'); \varphi^p u \in H^{p+1}(\Omega')\}$ dans $H_0^{p-1}(\Omega')$ et son noyau est réduit aux fonctions constantes dans Ω' . Par suite, son image est formée du sous-espace de $H_0^{p-1}(\Omega')$ orthogonal, dans $L^2(\Omega)$, aux fonctions constantes. On peut donc résoudre le problème (1.4).

3°) On pose alors : pour $\vec{f} \in H^p(\text{div}, \Omega)$,

$$P \vec{f} = \vec{F} - \vec{u}$$

où $\vec{u}$ désigne le prolongement par 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus \Omega'$.

Il reste à vérifier que $P \vec{f} \in (H^p(\mathbb{R}^n))^n$ ce qui est immédiat et que $\text{div } P \vec{f} = 0$ sur $\mathbb{R}^n$, or ceci résulte de

$\operatorname{div} P \vec{f} \in H^{p-1}(\mathbb{R}^n)$ avec $p \geq 1$ et de :

$$\operatorname{div} P \vec{f} = \begin{cases} \operatorname{div} \vec{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega' \\ 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega' . \end{cases}$$

le théorème 1 est démontré.

Remarque : On peut démontrer directement que le théorème 1 est encore vrai lorsque Ω est un cube de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2 : On suppose $n = 3$. Soit p un entier ≥ 0 . Alors sous l'hypothèse (H), il existe un opérateur R linéaire continu de $H^p(\operatorname{div}, \Omega)$ dans $(H^{p+1}(\Omega))^3$ tel que : pour tout $\vec{f} \in H^p(\operatorname{div}, \Omega)$ on ait :

$$\operatorname{Rot} \overrightarrow{(Rf)} = \vec{f}.$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du théorème 1 et du fait que l'équation $\operatorname{rot} \vec{u} = \vec{f}$ sur $\mathbb{R}$ se résout directement par transformation de Fourier (cf. [2] par exemple).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.BOLLEY - J.CAMUS. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bull.Soc. Math.France, Mémoire 34, 1973, p.55-140.
- [2] G.DUVAUT - J.L.LIONS - Les inéquations en mécanique et en physique - Paris, Dunod 1972.
- [3].J.L. LIONS - E.MAGENES. - Problèmes aux limites non homogènes et applications - Vol.1. Dunod 1968.