J. M. THOMAS

Méthode des éléments finis équilibre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3
« Journées « éléments finis » », , p. 1-23
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___S3_A11_0>

N° *Enregistrement* 75016

Université P. & M. CURIE
Laboratoire LA 189
d'Analyse Numérique
Tour 55-65 - 5ème.
4 Place JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05

METHODE DES ELEMENTS FINIS EQUILIBRE

par J.M. THOMAS.

Exposé aux

JOURNEES ELEMENTS FINIS

des 12 , 13 , et 14 Mai 1975

Organisation :

Université de Rennes

UER de Mathématiques et Informatique

B.P. 25 A - RENNES CEDEX

&

I.N.S.A.

Laboratoire d'Analyse Numérique

B.P. 14 A - 35031 RENNES CEDEX

Notations Générales

On désignera par $u, v, w, \dots$ des fonctions définies sur un ouvert Ω du plan $0\,x_1x_2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; on posera

$$\|u\|_{o,\Omega} = \{\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\}^{1/2}$$

et pour m entier $\geqslant 0$

$$\|u\|_{m,\Omega} = \{\sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1+\alpha_2 \leqslant m}} \int_\Omega \left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}}\right|^2 dx\}^{1/2}$$

$$|u|_{m,\Omega} = \{\sum_{\substack{\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1+\alpha_2 = m}} \int_\Omega \left|\frac{\partial^{m} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ \partial x_2^{\alpha_2}}\right|^2 dx\}^{1/2}$$

On désignera par $p, q, r, \dots$ des fonctions définies sur un ouvert Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$; si $p = (p_1, p_2)$ on posera

$$\|p\|_{m,\Omega} = \{\|p_1\|^2_{m,\Omega} + \|p_2\|^2_{m,\Omega}\}^{1/2}$$

$$|p|_{m,\Omega} = \{|p_1|^2_{m,\Omega} + |p_2|^2_{m,\Omega}\}^{1/2} .$$

1. FORMULATIONS DUALES.

Dans un ouvert Ω borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ lipschitzienne, soit $\mathcal{A}$ l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre défini par

$$\mathcal{A} u = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) . \tag{1.1}$$

Les coefficients a_{ij} sont supposés donnés dans l'espce $L_\infty(\Omega)$ et satisfont l'hypothèse d'ellipticité usuelle : il existe une constante $e > 0$ telle que pour presque tout x dans Ω, on a

$$\forall \xi = (\xi_1 , \xi_2) \in \mathbb{R}^2 , \quad \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq e|\xi|^2 .$$

A titre d'exemple, on traite le problème de Dirichlet homogène associé à cet opérateur $\mathcal{A}$: trouver u solution du problème

$$\begin{cases} \mathcal{A} u = f & , \quad \text{dans } \Omega \\ u = 0 & , \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{1.2}$$

La donnée f sera supposée dans l'espace $L_2(\Omega)$.

En formulation primale (i.e. ... classique !) , l'inconnue fondamentale est la fonction u elle-même ; en formulation duale, l'inconnue fondamentale est le cogradient p de u , c'est-à-dire la fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^2$) de composantes p_1 et p_2 données par

$$\begin{cases} p_1 = a_{11} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\[2ex] p_2 = a_{21} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22} \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \end{cases} \tag{1.3}$$

Pour donner cette formulation duale simplement, nous introduisons les notations suivantes : Soit $((A_{ij}))$ la matrice inverse de la matrice des coefficients $((a_{ij}))$; à cette matrice $((A_{ij}))$ on associe la forme bilinéaire

$$a(p,q) = \int_\Omega \{ \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}\, p_j\, q_i \} \, dx . \tag{1.4}$$

Les hypothèses faites sur les coefficients a_{ij} impliquent que cette forme bilinéaire est continue sur l'espace produit $(L_2(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^2$ et elle est $(L_2(\Omega))^2$-elliptique :

$$\forall p,q \in (L_2(\Omega))^2 \quad , \quad a(p,q) \leqslant \|a\| \; \|p\|_{o,\Omega} \|q\|_{o,\Omega}$$

$$\exists \alpha > 0 \; , \; \forall q \in (L_2(\Omega))^2 \; , \quad a(q,q) \geqslant \alpha \; \|q\|^2_{o,\Omega}$$

On note $V(\Omega)$ l'espace de Hilbert défini par

(1.5) $\quad V(\Omega) = \{q \in (L_2(\Omega))^2 \; ; \; \operatorname{div} q \in L_2(\Omega)\}$.

A une fonction f de l'espace $L_2(\Omega)$, nous associons la variété affine $V^f(\Omega)$ de l'espace $V(\Omega)$:

(1.6) $\quad V^f(\Omega) = \{q \in V(\Omega) \; , \; \operatorname{div} q + f = 0 \;\text{ dans }\; \Omega\}$

En particulier pour $f = 0$, $V^o(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions q de $V(\Omega)$ à divergence nulle dans Ω .

La formulation variationnelle duale du problème (1.2) consiste à trouver une fonction (vectorielle) p solution de

$$(1.7) \quad \begin{cases} p \in V^f(\Omega) \\ \forall q \in V^o(\Omega) \; , \quad a(p,q) = 0 \end{cases} .$$

On démontre sans difficulté le

<u>THEOREME 1</u>. *Pour tout* f *donné dans l'espace* $L_2(\Omega)$, *le problème (1.7) admet une solution* p *et une seule. En outre si* u *désigne la solution du problème (1.2) , la solution* p *est le cogradient (- relativement à l'opérateur* $\mathcal{A}$ *) de la fonction* u , *i.e. les relations (1.3) sont satisfaites.* ∎

Si l'on connait *a priori* un élément $\bar{p} \in V^f(\Omega)$, le problème (1.7) se linéarise en la recherche de $\tilde{p} = p - \bar{p}$ solution de :

$$\begin{cases} \tilde{p} \in V^o(\Omega) \\ \forall q \in V^o(\Omega) \; , \quad a(\tilde{p},q) = - a(\bar{p},q) \; . \end{cases}$$

Construisant un sous-espace V_h^o de dimension finie de $V^o(\Omega)$, les méthodes générales d'approximation interne conduisent à chercher $\tilde{p}_h$ solution du problème

$$\begin{cases} \tilde{p}_h \in V_h^o \\ \forall q \in V_h^o \quad , \quad a(\tilde{p}_h , q) = - a(\bar{p},q). \end{cases}$$

La solution "approchée" du problème (1.7) est alors fournie par

$$p_h = \bar{p} + \tilde{p}_h \quad .$$

L'analyse mathématique de cette méthode a été récemment donnée par HASLINGER & HLAVÁČEK [6] dans le cas où V_h^o est constitué des fonctions affines par triangles et à divergence nulle dans Ω .

Malheureusement il s'avère fort délicat en pratique de construire un élément $\bar{p}$ dans $V^f(\Omega)$: penser au cas le plus simple où la fonction f est constante par morceaux et aux problèmes de raccord que soulève le relèvement global $f \leadsto \bar{p}$. En vue d'éviter cette difficulté pratique, nous donnons une variante de la formulation hybride duale (cf. THOMAS [9] par exemple). La méthode numérique basée sur cette formulation ne supposera connue que des relèvements locaux $f \leadsto \bar{p}$, autrement dit les problèmes de raccord auront été éludés.

On suppose désormais pour simplifier que le domaine Ω est polygonal ; soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} \bar{T} \quad .$$

On introduit l'espace $\mathcal{H}$ défini par

(1.8) $\qquad \mathcal{H} = \{q \in (L_2(\Omega))^2 \ ; \ \forall T \in \mathcal{T}_h , \ q \in (H^1(T))^2\} \quad .$

A une fonction f de l'espace $L_2(\Omega)$, on associe la variété affine $\mathcal{H}^f$:

(1.9) $\qquad \mathcal{H}^f = \{q \in \mathcal{H} \ ; \ \forall T \in \mathcal{T}_h , \ \operatorname{div} q + f = 0 \text{ dans } T\} \quad .$

En particulier $\mathcal{H}^o$ est le sous-espace des fonctions q de $\mathcal{H}$ qui sont à divergence nulle dans chaque triangle T de $\mathcal{T}_h$.

Pour toute fonction $q \in \mathcal{H}$ et toute fonction $\mu \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} L_2(\partial T)$, on note

(1.10) $\qquad b(q,\mu) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mu \nu_T \cdot q \, d\gamma$

où ν_T est le vecteur unitaire de la normale extérieure au triangle T .

Soit $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel défini par

$$(1.11) \qquad \mathcal{M} = \{\mu \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} L_2(\partial T) \; ; \; \forall q \in \mathcal{H} \cap V(\Omega), \, b(q,\mu) = 0\} .$$

On remarquera qu'une fonction μ de l'espace $\prod_{T \in \mathcal{T}_h} L_2(\partial T)$ appartient à l'espace $\mathcal{M}$ si et seulement si elle vérifie

$$\begin{cases} \forall T,T' \in \mathcal{T}_h & \mu|_{\partial T} = \mu|_{\partial T'} \quad \text{sur} \quad \partial T \cap \partial T' \\ \forall T \in \mathcal{T}_h & \mu|_{\partial T} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial T \cap \Gamma . \end{cases}$$

On considère alors le problème : trouver un couple (p,λ) tel que

$$(1.12) \qquad \begin{cases} (p,\lambda) \in \mathcal{H}^f \times \mathcal{M} \\ \forall q \in \mathcal{H}^o , \quad a(p,q) + b(q,\lambda) = 0 \\ \forall \mu \in \mathcal{M} , \quad b(p,\mu) = 0 \end{cases} .$$

THEOREME 2. *On suppose que le cogradient de la fonction* u , *solution du problème (1.2) ; appartient à l'espace* $\mathcal{H}$.*-Alors le problème (1.12) admet une solution* (p,λ) *et une seule. En outre* p *est la solution du problème (1.7), donc le cogradient de* u ; *de plus* λ *est la trace de* u *sur les côtés des triangles* T *de la triangulation.* ∎

Ce résultat est une application de [9] , théorème 2.2, par exemple ∎

2. METHODE DES ELEMENTS FINIS EQUILIBRE.

Soit k un entier ≥ 0 , désormais fixé.

On choisit d'une part pour sous-espace $\mathcal{M}_h$ de $\mathcal{M}$:

$$(2.1) \qquad \mathcal{M}_h = \{\mu_h \in \mathcal{M} \; ; \; \forall T \in \mathcal{T}_h , \; \mu_h|_{\partial T} \in S_k(\partial T)\}$$

où $S_k(\partial T)$ est l'espace des fonctions définies sur le bord ∂T du triangle T , polynômiales de degré $\leq k$ sur chaque côté de T . Il n'y a pas de condition de continuité aux sommets du triangle T dans l'appartenance à l'espace $S_k(\partial T)$, par suite cet espace $S_k(\partial T)$ n'est pas un sous-espace de $H^{1/2}(\partial T)$, espace des traces des fonctions de $H^1(T)$.

On choisit d'autre part pour sous-espace $\mathcal{H}_h^o$ de $\mathcal{H}^o$

(2.2) $$\mathcal{H}_h^o = \{q_h \in \mathcal{H}^o \; ; \; \forall T \in \mathcal{T}_h \, , \quad q_h|_T \in (P_k(T))^2\}$$

où $P_k(T)$ est l'espace des restrictions au triangle T des fonctions polynômiales de degré $\leqslant k$.

Etant donné une fonction f_h de l'espace $L_2(\Omega)$ dont la restriction à tout triangle T de $\mathcal{T}_h$ est polynômiale de degré $\leqslant k$:

(2.3) $$f_h|_T \in P_k(T)$$

on sait construire une fonction $\overline{p}_h$ de l'espace $(L_2(\Omega))^2$ telle que pour tout triangle de $\mathcal{T}_h$, on a

(2.4) $$\begin{cases} \overline{p}_h|_T \in (P_{k+1}(T))^2 \\ \\ \operatorname{div} \overline{p}_h + f_h = 0 \quad , \quad \text{dans } T \end{cases}$$

avec en outre

(2.5) $$\nu_T \cdot \overline{p}_h \in S_k(\partial T) \; .$$

Nous préciserons (au théorème 6) le choix de f_h et donnerons une construction systématique de $\overline{p}_h$.

Ayant déterminé une telle fonction $\overline{p}_h$, on pose

(2.6) $$\mathcal{H}_h^f = \overline{p}_h + \mathcal{H}_h^o \qquad .$$

Il est clair que $\mathcal{H}_h^t$ est une sous-variété affine de $\mathcal{H}^{f_h}$.

On considère alors le "problème approché de (1.12)". Trouver un couple $(p_h \, , \lambda_h)$ tel que

(2.7) $$\begin{cases} \qquad (p_h \, , \lambda_h) \in \mathcal{H}_h^f \times \mathcal{M}_h \\ \forall q_h \in \mathcal{H}_h^o \quad , \quad a(p_h \, , q_h) + b(q_h \, , \lambda_h) = 0 \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \quad , \quad b(p_h \, , \mu_h) \qquad\qquad = 0 \, . \end{cases}$$

<u>THEOREME 3.</u> *Le problème (2.7) admet une solution $(p_h \, , \lambda_h)$ et une seule.* ∎

DEMONSTRATION du THEOREME 3.

Par linéarité, il suffit de vérifier que le problème homogène associé

$$\begin{cases} (p_h , \lambda_h) \in \mathcal{H}_h^o \times \mathcal{M}_h \\ \forall q_h \in \mathcal{H}_h^o , \quad a(p_h , q_h) + b(q_h , \mu_h) = 0 \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h , \quad b(p_h , \mu_h) \qquad = 0 . \end{cases}$$

admet pour unique solution $p_h = 0$, $\lambda_h = 0$. A l'aide de la $(L_2(\Omega))^2$-ellipticité de la forme bilinéaire $a(p,q)$, l'unicité de p_h est immédiate. Il reste à montrer que l'espace

$$Z_h = \{\lambda_h \in \mathcal{M}_h \ ; \ \forall q_h \in \mathcal{H}_h^o \quad b(q_h , \lambda_h) = 0\}$$

est réduit à $\{0\}$. Soit donc λ_h un élément quelconque de Z_h . On a en particulier dans tout triangle T de $\mathcal{C}_h$:

(2.8) $\qquad \lambda_h|_{\partial T} \in S_k(\partial T)$

et

(2.9) $\qquad \forall q \in (P_k(T))^2 \cap V^o(T) \ , \quad \displaystyle\int_{\partial T} \lambda_h \, \nu_T \cdot q \, d\gamma = 0 .$

Ayant remarqué qu'une fonction q appartient à l'espace $P_k(T))^2 \cap V^o(T)$ si et seulement si elle est le rotationnel d'une fonction w de l'espace $P_{k+1}(T)$, la propriété (2.9) équivaut à

$$\forall w \in P_{k+1}(T) \ , \quad \int_{\partial T} \lambda_h \frac{\partial w}{\partial \tau_T} \, d\gamma = 0$$

où $\dfrac{\partial}{\partial \tau_T}$ désigne la dérivée tangentielle le long de ∂T . Comme l'application

$$w \rightsquigarrow \frac{\partial w}{\partial \tau_T}$$

est surjective de l'espace $P_{k+1}(T)$ sur le sous-espace $S_k^o(\partial T)$ de $S_k(\partial T)$, où

(2.10) $\qquad S_k^o(\partial T) = \{\varphi \in S_k(\partial T) \ ; \ \displaystyle\int_{\partial T} \varphi \, d\gamma = 0\}$

la propriété (2.9) se traduit par

$$\forall \varphi \in S_k^o(\partial T) \quad , \quad \int_{\partial T} \lambda_h \varphi \, d\gamma = 0$$

autrement dit la fonction $\lambda_h|_{\partial T}$ est orthogonale dans $L_2(\partial T)$ au sous-espace $S_k^o(\partial T)$.

Or d'après (2.8), la projection orthogonale de $\lambda_{h|\partial T}$ sur $S_k^o(\partial T)$ n'est autre que la fonction :

$$\lambda_h|_{\partial T} - \frac{1}{\mathrm{Mes}(\partial T)} \int_{\partial T} \lambda_h \, d\gamma \quad .$$

Par conséquent les conditions (2.8) et (2.9) impliquent que la fonction $\lambda_h|_{\partial T}$ est constante, pour tout triangle T de $\mathcal{T}_h$. Exprimant les conditions de raccord contenues dans l'appartenance de la fonction λ_h à l'espace $\mathcal{M}$, on en conclut $\lambda_h = 0$, ce qui démontre le théorème. ∎

Il résulte de ce théorème 3 , que la variété affine $V_h^f(\Omega)$ définie par

(2.11) $\quad V_h^f(\Omega) = \{q_h \in \mathcal{H}_h^f \; ; \; \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \; , \; b(q_h , \mu_h) = 0\}$

est non vide, en général $V_h^f(\Omega)$ n'est pas le translaté par la fonction $\bar{p}_h$ du sous-espace $V_h^o(\Omega)$ défini par

(2.12) $\quad V_h^o(\Omega) = \{q_h \in \mathcal{H}_h^o \; , \; \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \; , \; b(q_h , \mu_h) = 0\}$.

On considère comme "problème approché de (1.7)" le problème : trouver une fonction p_h telle que

(2.13) $$\begin{cases} p_h \in V_h^f(\Omega) \\ \forall q_h \in V_h^o(\Omega) \quad , \quad a(p_h , q_h) = 0 \end{cases} \quad .$$

THEOREME 4. *Le problème (2.13) admet une solution p_h et une seule. De plus on a les caractérisations suivantes :*

(2.14) $\quad V_h^o(\Omega) = \mathcal{H}_h^o \cap V(\Omega)$

(2.15) $\quad V_h^f(\Omega) = (\bar{p}_h + \mathcal{H}_h^o) \cap V(\Omega)$; ∎

Remarque. La propriété (2.15) justifie la terminologie de méthode des éléments finis équilibre donnée par F. DE VEUBEKE et son équipe [3] [4] [5] : la solution p satisfait "l'équation d'équilibre"

$$\operatorname{div} p + f = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$$

la solution approchée p_h satisfait

$$\operatorname{div} p_h + f_h = 0 \quad \text{dans } \Omega .$$

■

DEMONSTRATION du THEOREME 4. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que la variété $V_h^f(\Omega)$ est un translaté de l'espace $V_h^o(\Omega)$; pour l'existence, il est évident que si (p_h , λ_h) est la solution du problème (2.7) , alors p_h est solution de (2.13). Passons à la démonstration de (2.15) : soit γ un côté commun à deux triangles T et T' de $\mathcal{T}_h$. Pour toute fonction w polynômiale de degré $\leqslant k$ définie sur le côté γ, la fonction μ_h définie par

$$\left|\begin{array}{ll} \mu_h = w & \text{sur le côté } \gamma \\ \mu_h = 0 & \text{sur tout autre côté de } \mathcal{T}_h \end{array}\right.$$

appartient à l'espace $\mathcal{M}_h$. Si q_h est une fonction de $V_h^f(\Omega)$ elle vérifie donc :

$$\forall w \in P_k(\gamma) , \quad \int_\gamma w(\nu_T \cdot q_h|_T + \nu_{T'} \cdot q_h|_{T'})\, d\gamma = 0 .$$

Grâce au choix de $\overline{p}_h$ satisfaisant (2.5), les traces normales $\nu_T \cdot q_h|_T$ sont polynômiales de degré $\leqslant k$, d'où

$$\nu_T \cdot q_h|_T + \nu_{T'} \cdot q_h|_{T'} = 0 \quad , \quad \text{sur tout } (\partial T) \cap (\partial T').$$

Il en résulte que la distribution-sur-Ω $\operatorname{div} q_h$ définit un élément de l'espace $L_2(\Omega)$, ainsi q_h appartient à l'espace $V(\Omega)$. Réciproquement il est évident que toute fonction $(\overline{p}_h + \mathcal{H}_h^o) \cap V(\Omega)$ appartient à la variété $V_h^f(\Omega)$.

■

3. MAJORATION D'ERREUR.

Nous utilisons systématiquement la technique du passage à l'élément fini de référence , cf. CIARLET & RAVIART [2] par exemple.

Soit $\hat{O}\hat{x}_1\hat{x}_2$ le plan euclidien de référence et $\hat{T}$ le triangle de ce plan de sommets (1,0), (0,1) et (0,0). Pour tout triangle T de $\mathcal{C}_h$, il existe une application F_T affine inversible telle que

$$T = F_T(\hat{T}) \quad . \tag{3.1}$$

L'application linéaire tangente ∂F_T est représentée par une matrice 2×2 constante, inversible ; le jacobien J_T de l'application F_T est

$$J_T = |\text{dét}(\partial F_T)| = 2 \text{ Mes}(T).$$

A toute fonction scalaire $\hat{w}$ définie sur le triangle $\hat{T}$, on associe la fonction $w = \mathcal{F}_T(\hat{w})$ définie sur le triangle T par

$$w = \hat{w} \circ F_T^{-1} \quad .$$

A toute fonction scalaire $\hat{\mu}$ définie sur le bord $\partial\hat{T}$, on associe la fonction $\mu = \mathcal{F}_{\partial T}(\hat{\mu})$ définie sur le bord ∂T par

$$\mu = \hat{\mu}_o (F_T^{-1})|_{\partial T} \quad .$$

A toute fonction $\hat{q}$ définie sur le triangle $\hat{T}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on associe la fonction $q = \mathcal{G}_T(\hat{q})$ définie sur le triangle T par

$$q = \frac{1}{J_T} (\partial F_T \, \hat{q}) \circ F_T^{-1} \quad .$$

D'après ([9], lemme 5.1) , on a le

LEMME 1. *L'application* $\mathcal{G}_T$ *est un isomorphisme de l'espace* $(H^1(\hat{T}))^2$ *sur l'espace* $(H^1(T))^2$ *tel que*

$$\forall w \in L_2(T) \quad , \quad \int_T w \text{ div } q \, dx = \int_{\hat{T}} \hat{w} \text{ div}_{\hat{x}} \hat{q} \, d\hat{x} \tag{3.2}$$

et

$$\forall \mu \in L_2(\partial T) \quad , \quad \int_{\partial T} \mu \, \nu_T \cdot q \, d\gamma = \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mu} \, \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{x} \quad . \tag{3.3}$$

■

Ainsi on a

(3.2 bis) $$\widehat{\operatorname{div} q} = \frac{1}{J_T} \operatorname{div}_{\hat{x}} \hat{q}$$

propriété que l'on ne peut obtenir avec une transformation $\hat{q} \rightsquigarrow q$ effectuée composante par composante.

On note h_T le diamètre d'un triangle T de la triangulation et

(3.4) $$h = \operatorname*{Max}_{T \in \mathcal{T}_h} h_T .$$

Nous ne considérons que des suites de triangulations $\mathcal{T}_h$ régulières, c'est-à-dire telles que pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$ le plus petit angle de T est minoré par un angle $\theta > 0$ indépendant de h ; la notation C désigne diverses constantes indépendantes de h. Il s'avère agréable de munir l'espace $(H^1(T))^2$ de la norme

(3.5) $$|||q|||_{1,T} = \{ \|q\|^2_{o,T} + h_T^2 |q|^2_{1,T} \}^{1/2}$$

puis l'espace $\mathcal{H}$ de la norme

(3.6) $$|||q|||_{\mathcal{H}} = (\sum_{T \in \mathcal{T}_h} |||q|||^2_{1,T})^{1/2} .$$

Le lemme suivant permettra d'éluder la construction d'un opérateur d'interpolation dans l'espace $V_h^f(\Omega)$:

<u>LEMME 2.</u> *Il existe une constante* C *, indépendante de* h *, telle que*

(3.7) $$\forall q \in V^{f_h}(\Omega) \cap \mathcal{H} , \quad \operatorname*{Inf}_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \|q-r_h\|_{o,\Omega} \leq C \operatorname*{Inf}_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} |||q-q_h|||_{\mathcal{H}} . \quad \blacksquare$$

La démonstration de ce lemme technique est reportée en annexe ; c'est essentiellement une adaptation de la méthode proposée par F. BREZZI [1] dans un cadre abstrait. ■

<u>THEOREME 5.</u> *On suppose que la solution* p *du problème (1.7) appartient à l'espace* $\mathcal{H}$ *; soit* p_h *la solution du problème (2.13). On suppose*

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \qquad \int_T f_h \, dx = \int_T f \, dx .$$

Alors il existe une constante C *, indépendante de* h *, telle que*

(3.8) $$\|p-p_h\|_{o,\Omega} \leq C \operatorname*{Inf}_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} \|p-q_h\|_{\mathcal{H}} . \quad \blacksquare$$

Remarque: De plus, on a par construction

(3.9) $$\| \operatorname{div}(p-p_h) \|_{o,\Omega} = \| f-f_h \|_{o,\Omega} \cdot \qquad \blacksquare$$

DEMONSTRATION du THEOREME 5: Soit r_h un élément quelconque de $V_h^f(\Omega)$; comme la fonction (p_h-r_h) appartient à $V_h^o(\Omega)$ sous-espace de $V^o(\Omega)$, on a

$$a(p,p_h-r_h) = 0 = a(p_h\ ,\ p_h-r_h)$$

d'oü

$$a(p-r_h\ ,\ p_h-r_h) = a(p_h-r_h\ ,\ p_h-r_h)\ .$$

On en déduit la majoration classique pour les problèmes variationnels elliptiques :

(3.10) $$\| p-p_h \|_{o,\Omega} \leqslant C \inf_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \| p-r_h \|_{o,\Omega}\ .$$

Dans le cas particulier où $f = f_h$, le théorème 5 est alors une conséquence évidente de (3.7) et de (3.10). Pour l'étude du cas général, nous introduisons la "perturbation" δp de l'espace $(L_2(\Omega))^2$ définie dans chaque triangle T de $\mathcal{T}_h$ par

(3.11) $$(\delta p)_{|T} = J_T(\mathcal{G}_T \circ \hat{\mathcal{N}} \circ \mathcal{F}_T^{-1})(f_h-f)_{|T}$$

où $\hat{\mathcal{N}}$ est l'application qui a une fonction $\hat{g}$ de $L_2(\hat{T})$, telle que $\int_{\hat{T}} \hat{g}(\hat{x})\, d\hat{x} = 0$, associe la fonction $\widehat{p^\star} = \hat{\mathcal{N}}(\hat{g})$ solution du problème de minimisation

$$\begin{cases} \widehat{p^\star} \in V^{\hat{g}}(\hat{T}) \quad ; \quad \nu_{\hat{T}} \cdot \widehat{p^\star} = 0 \text{ sur } \partial\hat{T} \ ; \\[2ex] \| \widehat{p^\star} \|_{o,\hat{T}} = \displaystyle\inf_{\hat{q} \in V^{\hat{g}}(\hat{T})\ ;\ \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} = 0 \text{ sur } \partial\hat{T}} \| \hat{q} \|_{0,\hat{T}} \ . \end{cases}$$

La solution $\widehat{p^\star}$ de ce problème se caractérise comme étant le gradient de la solution $\hat{w}$ - $\hat{w}$ définie à une constante près- du problème de Neumann

$$\begin{cases} - \Delta_{\hat{x}}\, \hat{w} = \hat{g} \quad , \text{ dans } \hat{T} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{w}}{\partial \nu_{\hat{T}}} = 0 \quad , \text{ sur } \partial\hat{T} \ . \end{cases}$$

En vertu de la régularité du problème de Neumann dans $\hat{T}$ (polygône convexe !) on a

$$\|\hat{p}^{\star}\|_{1,\hat{T}} = \|\hat{\mathcal{P}}(\hat{g})\|_{1,\hat{T}} \leqslant C\,\|\hat{g}\|_{o,\hat{T}}$$

d'où en revenant au triangle T pour la fonction δp définie en (3.11)

$$|||\delta p|||_{1,T} \leqslant C\, h_T\, \|f-f_h\|_{o,T}$$

et a fortiori puisque $\operatorname{div} p + f = 0$ et $\operatorname{div} q_h + f_h = 0$ dans T pour $q_h \in \mathcal{H}_h^f$

$$|||\delta p|||_{1,T} \leqslant C \inf_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} |||p-q_h|||_{1,T}$$

donc

(3.12) $$|||\delta p|||_{\mathcal{H}} \leqslant C \inf_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} |||p-q_h|||_{\mathcal{H}} \ .$$

Par construction les traces normales de δp sont nulles sur le bord ∂T de tout triangle T de $\mathcal{C}_h$; on en déduit que la fonction $p + \delta p$ appartient à la variété $V^{f_h}(\Omega) \cap \mathcal{H}$. Reprenant (3.10) , on écrit

$$\|p-p_h\|_{o,\Omega} \leqslant C\,\{\,\|\delta p\|_{o,\Omega} + \inf_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \|p+\delta p-r_h\|_{o,\Omega}\,\}$$

et en appliquant le lemme 2 à la fonction $p+\delta p$

$$\|p-p_h\|_{o,\Omega} \leqslant C\,\{\|\delta p\|_{o,\Omega} + \inf_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} |||p+\delta p-q_h|||_{\mathcal{H}}\}$$

d'où

(3.13) $$\|p-p_h\|_{o,\Omega} \leqslant C\,\{\,|||\delta p|||_{\mathcal{H}} + \inf_{q_h \in \mathcal{H}_h^f} |||p-q_h|||_{\mathcal{H}}\,\} \ .$$

Des majorations (3.12) et (3.13) on déduit le résultat annoncé (3.8). ■

Soit $\bar{p}$ une fonction de la variété $\mathcal{H}^f$; introduisant la fonction $\tilde{p}$ de l'espace $\mathcal{H}^o$ définie par

(3.14) $$p = \bar{p} + \tilde{p}$$

la majoration (3.8) obtenue par le théorème 5 s'écrit

$$(3.15) \qquad \| p-p_h \|_{o,\Omega} \leqslant C \, (|||\bar{p}-\bar{p}_h|||_{\mathcal{H}} + \inf_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^o} |||\tilde{p}-\tilde{q}_h|||_{\mathcal{H}}) \; .$$

Nous obtiendrons une majoration de cette dernière quantité à l'aide du

LEMME 3. *Il existe une constante* C , *indépendante de* h , *telle que pour toute fonction* $\tilde{p}$ *appartenant à l'espace* $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^o(T)$ *on a*

$$(3.16) \qquad \inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^o(T)} |||\tilde{p}-q|||_{1,T} \leqslant C \, h_T^{k+1} \, |\tilde{p}|_{k+1,T} \; . \qquad \blacksquare$$

DEMONSTRATION du LEMME 3. Une fonction $\tilde{p}$ de $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^o(T)$ est le rotationnel d'une fonction $\tilde{w}$ de l'espace $H^{k+2}(T)$; une fonction q appartient à l'espace $(P_k(T))^2 \cap V^o(T)$ si et seulement si elle est le rotationnel d'un polynôme de degré $\leqslant$ k+1 . On a donc

$$\inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^o(T)} |||\tilde{p}-q|||_{1,T} = \inf_{w \in P_{k+1}(T)} \{ |\tilde{w}-w|_{1,T}^2 + h_T^2 \, |\tilde{w}-w|_{2,T}^2 \}^{1/2}$$

et par les majorations standard

$$\inf_{w \in P_{k+1}(T)} \{ |\tilde{w}-w|_{1,T}^2 + h_T^2 \, |\tilde{w}-w|_{2,T}^2 \}^{1/2} \leqslant C \, h_T^{k+1} |\tilde{w}|_{k+2,T}$$

soit en repassant à la fonction $\tilde{p}$ la majoration (3.16). $\blacksquare$

Pour pouvoir conclure, il nous faut préciser le choix du relèvement qui fournit $\bar{p}_h$ à partir de la fonction f_h .

Soit $\hat{R}$ le relèvement continu de $L_2(\hat{T})$ dans $V(\hat{T})$ défini par

$$(3.17) \qquad \hat{q} = \hat{R}(\hat{g}) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{q}_1(\hat{x}_1 \, , \, \hat{x}_2) = - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\hat{x}_1} \hat{g}(\xi, \hat{x}_2) \, d\xi \\[2ex] \hat{q}_2(\hat{x}_1 \, , \, \hat{x}_2) = - \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\hat{x}_2} \hat{g}(\hat{x}_1, \eta) \, d\eta \end{array} \right. .$$

Si $\hat{q} = \hat{R}(\hat{g})$, on a

$$\mathrm{div}_{\hat{x}}\, \hat{q} + \hat{g} = 0 \quad \text{dans } \hat{T}$$

$$\| \hat{q} \|_{o,\hat{T}} \leq C \| \hat{g} \|_{o,\hat{T}}$$

En outre si $\hat{g} \in H^{\ell}(\hat{T})$, ℓ entier ≥ 1 , on a $\hat{q} \in (H^{\ell}(\hat{T}))^2$ et

$$|\hat{q}|_{\ell,\hat{T}} \leq C \{ |\hat{g}|_{\ell-1,\hat{T}} + |\hat{g}|_{\ell,\hat{T}} \} .$$

A ce relèvement $\hat{R}$ défini sur $\hat{T}$, nous associons le relèvement R_T défini sur un triangle T de $\mathcal{T}_h$ par

(3.18) $$R_T = J_T \mathcal{G}_T \circ \hat{R} \circ \mathcal{F}_T^{-1} .$$

Utilisant (3.2 bis) et les propriétés précédentes de $\hat{R}$, on a si $q = R_T(g)$:

(3.19) $$\mathrm{div}\, q + f = 0 \quad \text{dans } T$$

et

(3.20) $$\begin{cases} \| q \|_{o,T} \leq C\, h_T \| g \|_{o,T} \\ |q|_{\ell,T} \leq C \{ |g|_{\ell-1,T} + h_T |g|_{\ell,T} \} \qquad (\ell \text{ entier} \geq 1) . \end{cases}$$

Lorsque g est un polynôme de degré $\leq k$, on a $q = R_T(g) \in (P_{k+1}(T))^2$ donc $\nu_T \cdot q \in S_{k+1}(\partial T)$ et en général (hormis le cas $k = 0$) $\nu_T \cdot q \notin S_k(\partial T)$. En vue de satisfaire la condition (2.5) nous définissons sur l'espace $P_k(\hat{T})$ un relèvement $\hat{R}_{(k)}$ tel que si $\hat{q} = \hat{R}_{(k)}(\hat{g})$, on a

(3.21) $$\begin{cases} \hat{q} \in (P_{k+1}(\hat{T}))^2 \quad ; \quad \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \in S_k(\partial\hat{T}) \\ \mathrm{div}_{\hat{x}}\, \hat{q} + \hat{g} = 0 \quad , \text{ dans } \hat{T} \\ \text{si } \hat{g} \in P_{k-1}(\hat{T}) \quad , \text{ on a } \hat{R}_{(k)}(\hat{g}) = \hat{R}(\hat{g}) \end{cases}$$

Il est possible pour tout entier k de trouver un tel relèvement (cf. RAVIART [7]). A titre d'exemple, $\hat{R}_{(o)}$ relève la fonction constante a_o en la fonction $\hat{q} = (\hat{q}_1 , \hat{q}_2)$ donnée par

$$\hat{q}_1(\hat{x}_1 , \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} a_o \hat{x}_1$$
$$\hat{q}_2(\hat{x}_1 , \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} a_o \hat{x}_2$$

et l'opérateur $\hat{R}_{(1)}$ relève la fonction affine $a_o + a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2$ en la fonction $\hat{q}$ donnée par

$$\hat{q}_1(\hat{x}_1\ ,\ \hat{x}_2) = -\frac{1}{2}\, a_o\hat{x}_1 + \frac{1}{3}(-\ 2a_1+a_2)\hat{x}_1(\hat{x}_1+\hat{x}_2)$$

$$\hat{q}_2(\hat{x}_1\ ,\ \hat{x}_2) = -\frac{1}{2}\, a_o\hat{x}_1 + \frac{1}{3}(a_1-2a_2)\hat{x}_2(\hat{x}_1+\hat{x}_2)$$

Pour $k \geqslant 2$, les relations (3.21) ne définissent plus $\hat{R}_{(k)}$ de façon unique. A ce relèvement $\hat{R}_{(k)}$ dans $\hat{T}$ nous associons le relèvement $R_{(k),T}$ dans T :

(3.22) $$R_{(k),T} = J_T\ \mathcal{G}_T \circ \hat{R}_{(k)} \circ \mathcal{F}_T^{-1}\quad .$$

Le relèvement $R_{(k),T}$ associe à un polynôme g de degré $\leqslant k$ une fonction q telle que

$$q \in (P_{k+1}(T))^2 \quad ; \quad \nu_T \cdot q \in S_k(\partial T)$$

$$\operatorname{div} q + g = 0 \quad , \quad \text{dans } T\ .$$

THEOREME 6. *On suppose que la solution* p *du problème (1.7) satisfait les hypothèses de régularité* $p \in (H^{k+1}(\Omega))^2$ *et* $\operatorname{div} p \in H^{k+1}(\Omega)$. *Soit* f_h *une fonction de* $L_2(\Omega)$ *dont la restriction à tout triangle* T *de* $\mathcal{T}_h$ *est un polynôme de degré* $\leqslant k$ *tel que*

(3.23 $$\begin{cases} \displaystyle\int_T f_h\, dx = \int_T f\, dx \\ \text{et} \\ \forall \ell = 0,1\ ,\ldots,\ k,\ \ |f-f_h|_{\ell,T} \leqslant Ch^{k+1-\ell}|f|_{k+1,T}\quad . \end{cases}$$

A cette fonction f_h, *on associe à l'aide de l'opérateur* $R_{(k),T}$ *défini par (3.21) et (3.22) la fonction* $\bar{p}_h$ *telle que*

(3.24) $$\forall T \in \mathcal{T}_h \qquad \bar{p}_h|_T = R_{(k),T}(f_h|_T)\ .$$

Soit p_h *la solution du problème (2.13) ainsi construit. On a*

(3.25) $$\| p-p_h \|_{o,\Omega} \leqslant Ch^{k+1}(|p|_{k+1,\Omega} + h\ |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega})$$

et

$$\| \operatorname{div}(p-p_h)\|_{o,\Omega} \leqslant C\ h^{k+1}|\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega}\quad . \qquad \blacksquare$$

Remarque L'hypothèse (3.23) est satisfaite lorsque $f_h|_T$ est la projection orthogonale dans $L_2(T)$ de la fonction $f|_T$ sur l'espace $P_k(T)$. $\blacksquare$

DEMONSTRATION du THEOREME 6. Nous précisons la majoration (3.15) déduite du théorème 5, en choisissant pour fonction $\bar{p}$ de $\mathcal{H}^f$

$$\bar{p}|_T = R_T(f|_T) \quad , \quad \text{dans tout } T \in \mathcal{T}_h .$$

La régularité de $f = -\operatorname{div} p$ implique que la restriction $\bar{p}|_T$ à un triangle T de $\mathcal{T}_h$ appartient à la variété $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^f(T)$ et avec la régularité de p, la fonction $\tilde{p}|_T = p|_T - \bar{p}|_T$ appartient à l'espace $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^o(T)$. En vertu du lemme 3, on a alors

$$\inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^o(T)} |||\tilde{p}-q|||_{1,T} \leqslant C\, h^{k+1}|\tilde{p}|_{k+1,T} \leqslant C\, h^{k+1}(|p|_{k+1,T} + |\bar{p}|_{k+1,T})$$

D'après (3.20) appliqué pour $\ell = k+1$ à la fonction $\bar{p}$, on a

$$|\bar{p}|_{k+1,T} \leqslant C\ (|f|_{k,T} + h\ |f|_{k+1,T})$$

d'où

$$\inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^o(T)} |||\tilde{p}-q|||_{1,T} \leqslant C\, h^{k+1}(|p|_{k+1,T} + h\ |\operatorname{div} p|_{k+1,T})$$

puis

$$\inf_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^o} |||\tilde{p}-\tilde{q}_h|||_{\mathcal{H}} \leqslant C\, h^{k+1}(|p|_{k+1,\Omega} + h\ |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega}) \ . \tag{3.26}$$

D'autre part, on a dans tout triangle T de $\mathcal{T}_h$

$$\bar{p} - \bar{p}_h = R_T(f) - R_{(k),T}(f_h) = R_T(f-f_h) + (R_T - R_{(k),T})(f_h)$$

d'où

$$|||\bar{p}-\bar{p}_h|||_{1,T} \leqslant |||R_T(f-f_h)|||_{1,T} + |||(R_T-R_{(k),T})(f_h)|||_{1,T} \ .$$

Par application de (3.20) pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$, on a

$$|||R_T(f-f_h)|||_{1,T} \leqslant C(h\ \|f-f_h\|_{0,T} + h^2\ |f-f_h|_{1,T})$$

d'où avec l'hypothèse (3.23)

$$|||R_T(f-f_h)|||_{1,T} \leqslant C\ h^{k+2}|f|_{k+1,T} = C\ h^{k+2}|\operatorname{div} p|_{k+1,T} \ . \tag{3.27}$$

Enfin puisque l'application $\hat{R} - \hat{R}_{(k)}$, définie sur l'espace de dimension $P_k(\hat{T})$, s'annule sur $P_{k-1}(\hat{T})$, on a

$$\forall \hat{g} \in P_k(\hat{T}) \quad , \quad \| (\hat{R}-\hat{R}_{(k)})(\hat{g})\|_{1,\hat{T}} \leqslant C|\hat{g}|_{k,\hat{T}}$$

soit en revenant au triangle T

$$\forall g \in P_k(T) \quad , \quad |\!|\!| (R_T-R_{(k),T})(g) |\!|\!|_{1,T} \leqslant C\, h^{k+1}|g|_{k,T}$$

En particulier on obtient ainsi

$$|\!|\!| (R_T-R_{(k),T})(f_h)|\!|\!|_{1,T} \leqslant C\, h^{k+1}|f_h|_{k,T}$$

d'où avec l'hypothèse (3.23)

$$(3.28) \qquad |\!|\!| (R_T-R_{(k),T})(f_h)|\!|\!|_{1,T} \leqslant Ch^{k+1}(|f|_{k,T} + h|f|_{k+1,T})$$

Des majorations (3.27) et (3.28), on déduit

$$|\!|\!| \bar{p}-\bar{p}_h |\!|\!|_{1,T} \leqslant C\, h^{k+1}(|\text{div } p|_{k,T} + h|\text{div } p|_{k+1,T})$$

puis

$$(3.29) \qquad |\!|\!| \bar{p}-\bar{p}_h|\!|\!|_{\mathcal{H}} \leqslant C\, h^{k+1}(|\text{div } p|_{k,\Omega} + h\, |\text{div } p|_{k+1,\Omega}) \ .$$

Il reste à reporter les majorations (3.26) et (3.29) dans (3.15) pour obtenir la majoration annoncée (3.25). La majoration de

$\| \text{div}(p-p_h)\|_{o,\Omega}$ est évidente. ∎

ANNEXE (Démonstration du lemme 2)

Soit q une fonction de $V^{f_h}(\Omega) \cap \mathcal{H}$; nous allons montrer que toute fonction q_h de $\mathcal{H}_h^f$, on a

$$(4.1) \qquad \operatorname*{Inf}_{r_h \in V_h^h(\Omega)} \| q-r_h \|_{o,\Omega} \leqslant C ||| q-q_h |||_{\mathcal{H}}$$

ce qui prouvera le lemme 2. On obtiendra (4.1) en choisissant pour fonction r_h la projection orthogonale -au sens du produit scalaire de l'espace $L_2(\Omega)$- de la fonction q_h . La démonstration utilise la définition (2.11) de la variété $V_h^f(\Omega)$ et non sa caractérisation (2.15).

L'espace $\mathcal{M}$, défini en (1.11) est muni de la norme hilbertienne

$$(4.2) \qquad ||| \mu |||_{\mathcal{M}} = \{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \| \dot{\mu} \|^2_{o,\partial T} \}^{1/2}$$

où

$$(4.3) \qquad \| \dot{\mu} \|_{o,\partial T} = \operatorname*{Inf}_{c \in \mathbb{R}} \| \mu + c \|_{o,\partial T} \quad .$$

LEMME A. *(uniforme continuité de la forme bilinéaire* $b(q,\mu)$*)*
Il existe une constante C , *indépendante de* h , *telle que*

$$(4.4) \qquad \forall \tilde{q} \in \mathcal{H}^o , \ \forall \mu \in \mathcal{M}, \qquad b(q,\mu) \leqslant C ||| q |||_{\mathcal{H}} ||| \mu |||_{\mathcal{M}} \ .$$ ∎

DEMONSTRATION. Soit q une fonction de l'espace $(H^1(T))^2 \cap V^o(T)$ et soit μ une fonction de l'espace $L_2(\partial T)$; où T est un triangle quelconque de $\mathcal{T}_h$. Par passage au triangle de référence $\hat{T}$, on a en vertu du lemme 1

$$\int_{\partial T} \mu \nu_T \cdot q \, d\gamma = \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mu} \, \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} d\hat{\gamma}$$

et la fonction $\hat{q}$ appartient à l'espace $V^o(\hat{T}) \cap (H^1(\hat{T}))^2$.
Puisque cette fonction est à divergence nulle, on a

$$\int_{\partial\hat{T}} \nu_{\hat{T}}\cdot\hat{q}\, d\hat{\gamma} = 0$$

d'où

$$\int_{\partial T} \mu\ \nu_T\cdot q\ d\gamma \leqslant \|\hat{\dot{\mu}}\|_{o,\partial\hat{T}} \|\nu_{\hat{T}}\cdot\hat{q}\|_{o,\partial\hat{T}} \leqslant C\,\|\hat{\dot{\mu}}\|_{o,\partial\hat{T}} \|\hat{q}\|_{1,\hat{T}}$$

La triangulation $\mathcal{T}_h$ étant régulière, on obtient en revenant au triangle T

$$\int_{\partial T} \mu\ \nu_T\cdot q\ d\gamma \ \leqslant\ C\ h_T^{-1/2}\ \|\dot{\mu}\|_{o,\partial T}\, |||q|||_{1,T}$$

On en déduit la majoration (4.4) à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ∎

<u>LEMME B.</u> *(uniforme compatibilité des espaces $\mathcal{H}_h^o$ et $\mathcal{M}_h$)*

Il existe une constante $\beta > 0$, *indépendante de* h, *telle que*

$$(4.5)\qquad \forall\mu_h \in \mathcal{M}_h\ ,\quad \operatorname*{Sup}_{q_h \in \mathcal{H}_h^o} \frac{b(q_h\ ,\ \mu_h)}{\|q_h\|_{o,\Omega}} \geqslant \beta\, |||\mu_h|||_{\mathcal{M}}\ .$$ ∎

<u>DEMONSTRATION.</u> Montrons que dans tout triangle T de $\mathcal{T}_h$, on a avec $\beta > 0$

$$(4.6)\qquad \forall\mu \in S_k(\partial T)\ ,\quad \operatorname*{Sup}_{q\, \in\, V^o(T)\, \cap\, (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \mu\ \nu_T\cdot q\ d\gamma}{\|q\|_{o,T}} \geqslant \beta h_T^{-1/2} \|\dot{\mu}\|_{o,\partial T}\ .$$

Soit donc μ une fonction de $S_k(\partial T)$. Puisque l'application $\mathcal{G}_T^{-1}$ est un isomorphisme de l'espace $V^o(T) \cap (P_k(T))^2$ sur l'espace $V^o(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2$ tel que

$$\|\hat{q}\|_{o,\hat{T}}\ \geqslant\ C_1\, \|q\|_{o,T}$$

on a

$$\operatorname*{Sup}_{q\, \in\, V^o(T)\, \cap\, (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \mu\ \nu_T\cdot q\ d\gamma}{\|q\|_{o,T}} \geqslant C_1 \operatorname*{Sup}_{\hat{q}\, \in\, V^o(\hat{T})\, \cap\, (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial\hat{T}} \hat{\mu}\ \nu_{\hat{T}}\cdot\hat{q}\ d\hat{\gamma}}{\|\hat{q}\|_{o,\hat{T}}}\ .$$

D'après la démonstration du théorème 3 , l'application

$$\hat{\mu} \rightsquigarrow \sup_{\hat{q} \in V^o(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial\hat{T}} \hat{\mu}\, \nu_{\hat{T}}\cdot\hat{q}\, d\hat{\gamma}}{\|\hat{q}\|_{o,\hat{T}}}$$

définit une norme sur l'espace quotient $S_k(\partial\hat{T})/\mathbb{R}$; cet espace étant de dimension finie, il existe une constante $\hat{\beta} > 0$ telle que

$$\sup_{\hat{q} \in V^o(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial\hat{T}} \hat{\mu}\, \nu_{\hat{T}}\cdot\hat{q}\, d\hat{\gamma}}{\|\hat{q}\|_{o,\hat{T}}} \geq \hat{\beta}\, \|\dot{\hat{\mu}}\|_{o,\partial\hat{T}} \quad .$$

Or revenant au triangle T , on a avec C_2 constante > 0

$$\|\dot{\hat{\mu}}\|_{o,\partial\hat{T}} \geq C_2\, h_T^{-1/2}\, \|\dot{\mu}\|_{o,\partial T}$$

soit en récapitulant les résultats

$$\sup_{q \in V^o(T) \cap (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \mu\, \nu_T\cdot q\, d\gamma}{\|q\|_{o,T}} \geq C_1\, \hat{\beta}\, C_2\, h_T^{-1/2}\, \|\dot{\mu}\|_{o,\partial T}$$

c'est-à-dire (4.6). Par une technique analogue à celle développée dans [8] [9] , on en déduit le lemme B . ■

Nous sommes à présent en mesure de démontrer (4.1) donc le lemme 2. Soit q une fonction de $V^{f_h} \cap \mathcal{H}$ et soit q_h un élément quelconque de $\mathcal{H}_h^f$. A l'aide d'une variante du théorème 3 , nous définissons le couple $(r_h\, ,\, \tau_h)$ solution du problème

$$(4.7) \quad \begin{cases} (r_h\, ,\, \tau_h) \in \mathcal{H}_h^f \times \mathcal{M}_h \\ \forall \tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^o \quad , \quad \int_\Omega r_h\cdot\tilde{q}_h\, dx + b(\tilde{q}_h\, ,\, \tau_h) = \int_\Omega q_h\cdot\tilde{q}_h\, dx \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h \quad , \quad b(r_h\, ,\, \mu_h) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 4, la fonction r_h est la projection orthogonale de q_h sur la variété V_h^f :

$$r_h \in V_h^f \quad ; \quad \forall \tilde{q}_h \in V_h^o \quad , \quad \int_\Omega r_h\cdot\tilde{q}_h\, dx = \int_\Omega q_h\cdot\tilde{q}_h\, dx \; .$$

La fonction $(q_h - r_h)$ appartient à $\mathcal{H}_h^o$, sous-espace de dimension finie de $(L_2(\Omega))^2$; on a par dualité

$$\| q_h - r_h \|_{o,\Omega} = \sup_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^o} \frac{\int_\Omega (q_h - r_h) \cdot \tilde{q}_h \, dx}{\| \tilde{q}_h \|_{o,\Omega}}$$

soit avec (4.7)

$$\| q_h - r_h \|_{o,\Omega} = \sup_{q_h \in \mathcal{H}_h^o} \frac{b(\tilde{q}_h , \tau_h)}{\| \tilde{q}_h \|_{o,\Omega}}$$

et à l'aide du lemme B

$$\| q_h - r_h \|_{o,\Omega} \geq \beta \, ||| \tau_h |||_{\mathcal{M}} \quad . \tag{4.8}$$

D'autre part, en choisissant dans (4.20) pour $\tilde{q}_h$ la fonction $\tilde{q}_h = q_h - r_h$, on obtient
$$\| q_h - r_h \|^2_{o,\Omega} = b(q_h - r_h , \tau_h) = b(q_h , \tau_h) \quad .$$

Puisque la fonction q appartient à $V(\Omega) \cap \mathcal{H}$, on a
$$b(q, \tau_h) = 0$$

d'où
$$\| q_h - r_h \|^2_{o,\Omega} = b(q_h - q , \tau_h)$$

Il reste à remarquer que la fonction $\tilde{q} = q_h - q$ appartient au sous-espace $\mathcal{H}^o$ pour déduire à l'aide du lemme A

$$\| q_h - r_h \|^2_{o,\Omega} \leq C \, ||| q - q_h |||_{\mathcal{H}} \, ||| \tau_h |||_{\mathcal{M}} \tag{4.9}$$

Des inégalités (4.8) et (4.9) nous déduisons

$$\| q_h - r_h \|_{o,\Omega} \leq \frac{C}{\beta} \, ||| q - q_h |||_{\mathcal{H}}$$

ce qui démontre (4.1) puisque r_h appartient à la variété $V_h^f(\Omega)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] BREZZI, F.

"On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems arising from Lagrangian Multipliers"

R.A.I.R.O. , R 2 , Août 1974 , pp. 129- 151

[2] CIARLET, P.G. & RAVIART, P.A.

"General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n *with Applications to Finite Element Methods"*

Arch. Rat. Mech. Anal., 46, (1972) pp. 177-189.

[3] DE VEUBEKE F.

"Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method".

Stress Analysis (O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister, Ed.) - Wiley (1965) ch. 9 , pp. 145-197.

[4] DE VEUBEKE F.

"Diffusive Equilibrium Models"

Lecture notes, University of Calgary (1973).

[5] DE VEUBEKE F. & HOGGE M.A.

"Dual Analysis for Heat Conduction Problems by Finite Elements"

Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol 5 (1972) pp. 65-82.

[6] HASLINGER J. & HLAVÁČEK

"Convergence of a finite element method based on the dual variational formulation"

(Preprint - Université de Prague (1975)).

[7] RAVIART P.A.

"Methodes d'éléments finis mixtes"

Exposé aux Journées Eléments Finis - Rennes 1975.

[8] RAVIART P.A. & THOMAS J.M.

"Méthode des éléments finis hybrides primaux pour les problèmes elliptiques du second ordre" (à paraître).

[9] THOMAS J.M.

"Méthodes des éléments finis hybrides duaux pour les problèmes elliptiques du second ordre" (à paraître dans R.A.I.R.O).