

J. M. THOMAS

Méthode des éléments finis équilibre

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule S3

« Journées « éléments finis » », , p. 1-23

http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975__S3_A11_0

© Département de mathématiques et informatique, université de Rennes, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications mathématiques et informatiques de Rennes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

N° Enregistrement 75016

Université P. & M. CURIE

Laboratoire LA 189

d'Analyse Numérique

Tour 55-65 - 5ème.

4 Place JUSSIEU

75230 PARIS CEDEX 05

METHODE DES ELEMENTS FINIS

EQUILIBRE

par J.M. THOMAS.

Exposé aux

JOURNEES ELEMENTS FINIS

des 12 , 13 , et 14 Mai 1975

Organisation :

Université de Rennes
UER de Mathématiques et
Informatique
B.P. 25 A - RENNES CEDEX

&

I.N.S.A.
Laboratoire d'Analyse Numérique
B.P. 14 A - 35031 RENNES CEDEX

Notations Générales

On désignera par u, v, w, \dots des fonctions définies sur un ouvert Ω du plan $0 x_1 x_2$ et à valeurs dans \mathbb{R} ; on posera

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

et pour m entier ≥ 0

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq m}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

$$|u|_{m,\Omega} = \left\{ \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = m}} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \right|^2 dx \right\}^{1/2}$$

On désignera par p, q, r, \dots des fonctions définies sur un ouvert Ω et à valeurs dans \mathbb{R}^2 ; si $p = (p_1, p_2)$ on posera

$$\|p\|_{m,\Omega} = \{ \|p_1\|_{m,\Omega}^2 + \|p_2\|_{m,\Omega}^2 \}^{1/2}$$

$$|p|_{m,\Omega} = \{ |p_1|_{m,\Omega}^2 + |p_2|_{m,\Omega}^2 \}^{1/2} .$$

1. FORMULATIONS DUALES.

Dans un ouvert Ω borné de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ lipschitzienne, soit \mathcal{A} l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre défini par

$$(1.1) \quad \mathcal{A}u = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) .$$

Les coefficients a_{ij} sont supposés donnés dans l'espace $L_\infty(\Omega)$ et satisfont l'hypothèse d'ellipticité usuelle : il existe une constante $e > 0$ telle que pour presque tout x dans Ω , on a

$$\forall \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq e |\xi|^2 .$$

A titre d'exemple, on traite le problème de Dirichlet homogène associé à cet opérateur \mathcal{A} : trouver u solution du problème

$$(1.2) \quad \begin{cases} \mathcal{A}u = f & , \text{ dans } \Omega \\ u = 0 & , \text{ sur } \Gamma \end{cases}$$

La donnée f sera supposée dans l'espace $L_2(\Omega)$.

En formulation primale (i.e. ... classique !), l'inconnue fondamentale est la fonction u elle-même ; en formulation duale, l'inconnue fondamentale est le cogradient p de u , c'est-à-dire la fonction (à valeurs dans \mathbb{R}^2) de composantes p_1 et p_2 données par

$$(1.3) \quad \begin{cases} p_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ p_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \end{cases}$$

Pour donner cette formulation duale simplement, nous introduisons les notations suivantes : Soit $((A_{ij}))$ la matrice inverse de la matrice des coefficients $((a_{ij}))$; à cette matrice $((A_{ij}))$ on associe la forme bilinéaire

$$(1.4) \quad a(p,q) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^2 A_{ij} p_j q_i \right\} dx .$$

Les hypothèses faites sur les coefficients a_{ij} impliquent que cette forme

bilinéaire est continue sur l'espace produit $(L_2(\Omega))^2 \times (L_2(\Omega))^2$ et elle est $(L_2(\Omega))^2$ -elliptique :

$$\forall p, q \in (L_2(\Omega))^2, \quad a(p, q) \leq \|a\| \|p\|_{0, \Omega} \|q\|_{0, \Omega}$$

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall q \in (L_2(\Omega))^2, \quad a(q, q) \geq \alpha \|q\|_{0, \Omega}^2$$

On note $V(\Omega)$ l'espace de Hilbert défini par

$$(1.5) \quad V(\Omega) = \{q \in (L_2(\Omega))^2; \operatorname{div} q \in L_2(\Omega)\}.$$

A une fonction f de l'espace $L_2(\Omega)$, nous associons la variété affine $V^f(\Omega)$ de l'espace $V(\Omega)$:

$$(1.6) \quad V^f(\Omega) = \{q \in V(\Omega), \operatorname{div} q + f = 0 \text{ dans } \Omega\}$$

En particulier pour $f = 0$, $V^0(\Omega)$ est le sous-espace des fonctions q de $V(\Omega)$ à divergence nulle dans Ω .

La formulation variationnelle duale du problème (1.2) consiste à trouver une fonction (vectorielle) p solution de

$$(1.7) \quad \begin{cases} p \in V^f(\Omega) \\ \forall q \in V^0(\Omega), \quad a(p, q) = 0 \end{cases}.$$

On démontre sans difficulté le

THEOREME 1. *Pour tout f donné dans l'espace $L_2(\Omega)$, le problème (1.7) admet une solution p et une seule. En outre si u désigne la solution du problème (1.2), la solution p est le cogradient (-relativement à l'opérateur \mathcal{A}) de la fonction u , i.e. les relations (1.3) sont satisfaites. ■*

Si l'on connaît a priori un élément $\bar{p} \in V^f(\Omega)$, le problème (1.7) se linéarise en la recherche de $\tilde{p} = p - \bar{p}$ solution de :

$$\begin{cases} \tilde{p} \in V^0(\Omega) \\ \forall q \in V^0(\Omega), \quad a(\tilde{p}, q) = -a(\bar{p}, q) \end{cases}.$$

Construisant un sous-espace V_h^0 de dimension finie de $V^0(\Omega)$, les méthodes générales d'approximation interne conduisent à chercher \tilde{p}_h solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_h \in V_h^0 \\ \forall q \in V_h^0, \quad a(\tilde{p}_h, q) = -a(\bar{p}, q). \end{array} \right.$$

La solution "approchée" du problème (1.7) est alors fournie par

$$p_h = \bar{p} + \tilde{p}_h.$$

L'analyse mathématique de cette méthode a été récemment donnée par HASLINGER & HLAVÁČEK [6] dans le cas où V_h^0 est constitué des fonctions affines par triangles et à divergence nulle dans Ω .

Malheureusement il s'avère fort délicat en pratique de construire un élément \bar{p} dans $V^f(\Omega)$: penser au cas le plus simple où la fonction f est constante par morceaux et aux problèmes de raccord que soulève le relèvement global $f \rightsquigarrow \bar{p}$. En vue d'éviter cette difficulté pratique, nous donnons une variante de la formulation hybride duale (cf. THOMAS [9] par exemple). La méthode numérique basée sur cette formulation ne supposera connue que des relèvements locaux $f \rightsquigarrow \bar{p}$, autrement dit les problèmes de raccord auront été éludés.

On suppose désormais pour simplifier que le domaine Ω est polygonal ; soit \mathcal{T}_h une triangulation de $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T.$$

On introduit l'espace \mathcal{K} défini par

$$(1.8) \quad \mathcal{K} = \{q \in (L_2(\Omega))^2 ; \forall T \in \mathcal{T}_h, q \in (H^1(T))^2\}.$$

A une fonction f de l'espace $L_2(\Omega)$, on associe la variété affine \mathcal{K}^f :

$$(1.9) \quad \mathcal{K}^f = \{q \in \mathcal{K} ; \forall T \in \mathcal{T}_h, \operatorname{div} q + f = 0 \text{ dans } T\}.$$

En particulier \mathcal{K}^0 est le sous-espace des fonctions q de \mathcal{K} qui sont à divergence nulle dans chaque triangle T de \mathcal{T}_h .

Pour toute fonction $q \in \mathcal{K}$ et toute fonction $\mu \in \prod_{T \in \mathcal{T}_h} L_2(\partial T)$, on note

$$(1.10) \quad b(q, \mu) = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} \mu v_T \cdot q \, d\gamma$$

où v_T est le vecteur unitaire de la normale extérieure au triangle T .

Soit \mathcal{M} l'espace vectoriel défini par

$$(1.11) \quad \mathcal{M}_b = \left\{ \mu \in \prod_{T \in \mathcal{C}_h} L_2(\partial T) ; \forall q \in \mathcal{K} \cap V(\Omega), b(q, \mu) = 0 \right\} .$$

On remarquera qu'une fonction μ de l'espace $\prod_{T \in \mathcal{C}_h} L_2(\partial T)$

appartient à l'espace \mathcal{M}_b si et seulement si elle vérifie

$$\begin{cases} \forall T, T' \in \mathcal{C}_h & \mu|_{\partial T} = \mu|_{\partial T'} & \text{sur } \partial T \cap \partial T' \\ \forall T \in \mathcal{C}_h & \mu|_{\partial T} = 0 & \text{sur } \partial T \cap \Gamma . \end{cases}$$

On considère alors le problème : trouver un couple (p, λ) tel que

$$(1.12) \quad \begin{cases} \forall q \in \mathcal{K}^0, & (p, \lambda) \in \mathcal{K}^f \times \mathcal{M}_b \\ & a(p, q) + b(q, \lambda) = 0 \\ \forall \mu \in \mathcal{M}_b, & b(p, \mu) = 0 . \end{cases}$$

THEOREME 2. *On suppose que le cogradient de la fonction u , solution du problème (1.2), appartient à l'espace \mathcal{K} . Alors le problème (1.12) admet une solution (p, λ) et une seule. En outre p est la solution du problème (1.7), donc le cogradient de u ; de plus λ est la trace de u sur les côtés des triangles T de la triangulation. ■*

Ce résultat est une application de [9], théorème 2.2, par exemple ■

2. METHODE DES ELEMENTS FINIS EQUILIBRE.

Soit k un entier ≥ 0 , désormais fixé.

On choisit d'une part pour sous-espace \mathcal{M}_h de \mathcal{M}_b :

$$(2.1) \quad \mathcal{M}_h = \{ \mu_h \in \mathcal{M}_b ; \forall T \in \mathcal{C}_h, \mu_h|_{\partial T} \in S_k(\partial T) \}$$

où $S_k(\partial T)$ est l'espace des fonctions définies sur le bord ∂T du triangle T , polynômiales de degré $\leq k$ sur chaque côté de T . Il n'y a pas de condition de continuité aux sommets du triangle T dans l'appartenance à l'espace $S_k(\partial T)$, par suite cet espace $S_k(\partial T)$ n'est pas un sous-espace de $H^{1/2}(\partial T)$, espace des traces des fonctions de $H^1(T)$.

On choisit d'autre part pour sous-espace \mathcal{K}_h^0 de \mathcal{K}^0

$$(2.2) \quad \mathcal{K}_h^0 = \{q_h \in \mathcal{K}^0 ; \forall T \in \mathcal{T}_h, q_h|_T \in (P_k(T))^2\}$$

où $P_k(T)$ est l'espace des restrictions au triangle T des fonctions polynômiales de degré $\leq k$.

Etant donné une fonction f_h de l'espace $L_2(\Omega)$ dont la restriction à tout triangle T de \mathcal{T}_h est polynômiale de degré $\leq k$:

$$(2.3) \quad f_h|_T \in P_k(T)$$

on sait construire une fonction \bar{p}_h de l'espace $(L_2(\Omega))^2$ telle que pour tout triangle de \mathcal{T}_h , on a

$$(2.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{p}_h|_T \in (P_{k+1}(T))^2 \\ \operatorname{div} \bar{p}_h + f_h = 0, \quad \text{dans } T \end{array} \right.$$

avec en outre

$$(2.5) \quad \nu_T \cdot \bar{p}_h \in S_k(\partial T).$$

Nous préciserons (au théorème 6) le choix de f_h et donnerons une construction systématique de \bar{p}_h .

Ayant déterminé une telle fonction \bar{p}_h , on pose

$$(2.6) \quad \mathcal{K}_h^f = \bar{p}_h + \mathcal{K}_h^0.$$

Il est clair que \mathcal{K}_h^f est une sous-variété affine de \mathcal{K}_h^f .

On considère alors le "problème approché de (1.12)". Trouver un couple (p_h, λ_h) tel que

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (p_h, \lambda_h) \in \mathcal{K}_h^f \times \mathcal{M}_h \\ \forall q_h \in \mathcal{K}_h^0, a(p_h, q_h) + b(q_h, \lambda_h) = 0 \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, b(p_h, \mu_h) = 0. \end{array} \right.$$

THEOREME 3. Le problème (2.7) admet une solution (p_h, λ_h) et une seule. ■

DEMONSTRATION du THEOREME 3.

Par linéarité, il suffit de vérifier que le problème homogène associé

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_h, \lambda_h) \in \mathcal{H}_h^0 \times \mathcal{M}_h \\ \forall q_h \in \mathcal{H}_h^0, \quad a(p_h, q_h) + b(q_h, \mu_h) = 0 \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, \quad b(p_h, \mu_h) = 0. \end{array} \right.$$

admet pour unique solution $p_h = 0, \lambda_h = 0$. A l'aide de la $(L_2(\Omega))^2$ -ellipticité de la forme bilinéaire $a(p, q)$, l'unicité de p_h est immédiate. Il reste à montrer que l'espace

$$Z_h = \{ \lambda_h \in \mathcal{M}_h; \forall q_h \in \mathcal{H}_h^0, \quad b(q_h, \lambda_h) = 0 \}$$

est réduit à $\{0\}$. Soit donc λ_h un élément quelconque de Z_h . On a en particulier dans tout triangle T de \mathcal{T}_h :

$$(2.8) \quad \lambda_h|_{\partial T} \in S_k(\partial T)$$

et

$$(2.9) \quad \forall q \in (P_k(T))^2 \cap V^0(T), \quad \int_{\partial T} \lambda_h v_T \cdot q \, d\gamma = 0.$$

Ayant remarqué qu'une fonction q appartient à l'espace $(P_k(T))^2 \cap V^0(T)$ si et seulement si elle est le rotationnel d'une fonction w de l'espace $P_{k+1}(T)$, la propriété (2.9) équivaut à

$$\forall w \in P_{k+1}(T), \quad \int_{\partial T} \lambda_h \frac{\partial w}{\partial \tau_T} \, d\gamma = 0$$

où $\frac{\partial}{\partial \tau_T}$ désigne la dérivée tangentielle le long de ∂T . Comme l'application

$$w \rightsquigarrow \frac{\partial w}{\partial \tau_T}$$

est surjective de l'espace $P_{k+1}(T)$ sur le sous-espace $S_k^0(\partial T)$ de $S_k(\partial T)$, où

$$(2.10) \quad S_k^0(\partial T) = \{ \varphi \in S_k(\partial T); \int_{\partial T} \varphi \, d\gamma = 0 \}$$

la propriété (2.9) se traduit par

$$\forall \varphi \in S_k^0(\partial T) \quad , \quad \int_{\partial T} \lambda_h \varphi \, d\gamma = 0$$

autrement dit la fonction $\lambda_h|_{\partial T}$ est orthogonale dans $L_2(\partial T)$ au sous-espace $S_k^0(\partial T)$.

Or d'après (2.8), la projection orthogonale de $\lambda_h|_{\partial T}$ sur $S_k^0(\partial T)$ n'est autre que la fonction :

$$\lambda_h|_{\partial T} - \frac{1}{\text{Mes}(\partial T)} \int_{\partial T} \lambda_h \, d\gamma \quad .$$

Par conséquent les conditions (2.8) et (2.9) impliquent que la fonction $\lambda_h|_{\partial T}$ est constante, pour tout triangle T de \mathcal{C}_h . Expriment les conditions de raccord contenues dans l'appartenance de la fonction λ_h à l'espace \mathcal{M} , on en conclut $\lambda_h = 0$, ce qui démontre le théorème. ■

Il résulte de ce théorème 3, que la variété affine $V_h^f(\Omega)$ définie par

$$(2.11) \quad V_h^f(\Omega) = \{q_h \in \mathcal{K}_h^f ; \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, b(q_h, \mu_h) = 0\}$$

est non vide, en général $V_h^f(\Omega)$ n'est pas le translaté par la fonction \bar{p}_h du sous-espace $V_h^0(\Omega)$ défini par

$$(2.12) \quad V_h^0(\Omega) = \{q_h \in \mathcal{K}_h^0, \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, b(q_h, \mu_h) = 0\} \quad .$$

On considère comme "problème approché de (1.7)" le problème : trouver une fonction p_h telle que

$$(2.13) \quad \begin{cases} p_h \in V_h^f(\Omega) \\ \forall q_h \in V_h^0(\Omega) \quad , \quad a(p_h, q_h) = 0 \quad . \end{cases}$$

THEOREME 4. *Le problème (2.13) admet une solution p_h et une seule. De plus on a les caractérisations suivantes :*

$$(2.14) \quad V_h^0(\Omega) = \mathcal{K}_h^0 \cap V(\Omega)$$

$$(2.15) \quad V_h^f(\Omega) = (\bar{p}_h + \mathcal{K}_h^0) \cap V(\Omega) \quad ; \quad \blacksquare$$

Remarque. La propriété (2.15) justifie la terminologie de méthode des éléments finis équilibre donnée par F. DE VEUBEKE et son équipe [3] [4] [5] : la solution p satisfait "l'équation d'équilibre"

$$\operatorname{div} p + f = 0 \quad \text{dans } \Omega ,$$

la solution approchée p_h satisfait

$$\operatorname{div} p_h + f_h = 0 \quad \text{dans } \Omega . \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION du THEOREME 4. Pour l'unicité, il suffit de remarquer que la variété $V_h^f(\Omega)$ est un translaté de l'espace $V_h^0(\Omega)$; pour

l'existence, il est évident que si (p_h, λ_h) est la solution du problème (2.7), alors p_h est solution de (2.13). Passons à la démonstration de (2.15) : soit γ un côté commun à deux triangles T et T' de \mathcal{T}_h . Pour toute fonction w polynômiale de degré $\leq k$ définie sur le côté γ , la fonction u_h définie par

$$\left| \begin{array}{l} u_h = w \quad \text{sur le côté } \gamma \\ u_h = 0 \quad \text{sur tout autre côté de } \mathcal{T}_h \end{array} \right.$$

appartient à l'espace \mathcal{M}_h . Si q_h est une fonction de $V_h^f(\Omega)$ elle vérifie donc :

$$\forall w \in P_k(\gamma) , \quad \int_{\gamma} w (v_T \cdot q_h|_T + v_{T'} \cdot q_h|_{T'}) d\gamma = 0 .$$

Grâce au choix de \bar{p}_h satisfaisant (2.5), les traces normales $v_T \cdot q_h|_T$ sont polynômiales de degré $\leq k$, d'où

$$v_T \cdot q_h|_T + v_{T'} \cdot q_h|_{T'} = 0 , \quad \text{sur tout } (\partial T) \cap (\partial T').$$

Il en résulte que la distribution-sur- Ω $\operatorname{div} q_h$ définit un élément de l'espace $L_2(\Omega)$, ainsi q_h appartient à l'espace $V(\Omega)$. Réciproquement il est évident que toute fonction $(\bar{p}_h + \mathcal{J}_h^0) \cap V(\Omega)$ appartient à la variété $V_h^f(\Omega)$. ■

3. MAJORATION D'ERREUR.

Nous utilisons systématiquement la technique du passage à l'élément fini de référence, cf. CIARLET & RAVIART [2] par exemple.

Soit $\hat{O}\hat{x}_1\hat{x}_2$ le plan euclidien de référence et \hat{T} le triangle de ce plan de sommets (1,0), (0,1) et (0,0). Pour tout triangle T de \mathcal{C}_h , il existe une application F_T affine inversible telle que

$$(3.1) \quad T = F_T(\hat{T}) \quad .$$

L'application linéaire tangente ∂F_T est représentée par une matrice 2×2 constante, inversible ; le jacobien J_T de l'application F_T est

$$J_T = |\det(\partial F_T)| = 2 \text{ Mes}(T).$$

A toute fonction scalaire \hat{w} définie sur le triangle \hat{T} , on associe la fonction $w = \mathcal{F}_T(\hat{w})$ définie sur le triangle T par

$$w = \hat{w} \circ F_T^{-1} \quad .$$

A toute fonction scalaire $\hat{\mu}$ définie sur le bord $\partial\hat{T}$, on associe la fonction $\mu = \mathcal{F}_{\partial T}(\hat{\mu})$ définie sur le bord ∂T par

$$\mu = \hat{\mu} \circ (F_T^{-1})|_{\partial T} \quad .$$

A toute fonction \hat{q} définie sur le triangle \hat{T} et à valeurs dans \mathbb{R}^2 , on associe la fonction $q = \mathcal{G}_T(\hat{q})$ définie sur le triangle T par

$$q = \frac{1}{J_T} (\partial F_T \hat{q}) \circ F_T^{-1} \quad .$$

D'après ([9], lemme 5.1), on a le

LEMME 1. L'application \mathcal{G}_T est un isomorphisme de l'espace $(H^1(\hat{T}))^2$ sur l'espace $(H^1(T))^2$ tel que

$$(3.2) \quad \forall w \in L_2(T) \quad , \quad \int_T w \operatorname{div} q \, dx = \int_{\hat{T}} \hat{w} \operatorname{div}_{\hat{x}} \hat{q} \, d\hat{x}$$

et

$$(3.3) \quad \forall \mu \in L_2(\partial T) \quad , \quad \int_{\partial T} \mu \nu_T \cdot q \, dy = \int_{\partial\hat{T}} \hat{\mu} \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{x} \quad . \quad \blacksquare$$

Ainsi on a

$$(3.2 \text{ bis}) \quad \widehat{\text{div } q} = \frac{1}{J_T} \text{div}_{\hat{x}} \hat{q}$$

propriété que l'on ne peut obtenir avec une transformation $\hat{q} \rightsquigarrow q$ effectuée composante par composante.

On note h_T le diamètre d'un triangle T de la triangulation et

$$(3.4) \quad h = \text{Max}_{T \in \mathcal{T}_h} h_T .$$

Nous ne considérons que des suites de triangulations \mathcal{T}_h régulières, c'est-à-dire telles que pour tout triangle $T \in \mathcal{T}_h$ le plus petit angle de T est minoré par un angle $\theta > 0$ indépendant de h ; la notation C désigne diverses constantes indépendantes de h . Il s'avère agréable de munir l'espace $(H^1(T))^2$ de la norme

$$(3.5) \quad \|q\|_{1,T} = \{ \|q\|_{0,T}^2 + h_T^2 |q|_{1,T}^2 \}^{1/2}$$

puis l'espace \mathcal{K} de la norme

$$(3.6) \quad \|q\|_{\mathcal{K}} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|q\|_{1,T}^2 \right)^{1/2} .$$

Le lemme suivant permettra d'éviter la construction d'un opérateur d'interpolation dans l'espace $V_h^f(\Omega)$:

LEMME 2. Il existe une constante C , indépendante de h , telle que

$$(3.7) \quad \forall q \in V_h^f(\Omega) \cap \mathcal{K}, \quad \inf_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \|q - r_h\|_{0,\Omega} \leq C \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|q - q_h\|_{\mathcal{K}} . \quad \blacksquare$$

La démonstration de ce lemme technique est reportée en annexe; c'est essentiellement une adaptation de la méthode proposée par F. BREZZI [1] dans un cadre abstrait. ■

THEOREME 5. On suppose que la solution p du problème (1.7) appartient à l'espace \mathcal{K} ; soit p_h la solution du problème (2.13). On suppose

$$\forall T \in \mathcal{T}_h \quad \int_T f_h \, dx = \int_T f \, dx .$$

Alors il existe une constante C , indépendante de h , telle que

$$(3.8) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|p - q_h\|_{\mathcal{K}} . \quad \blacksquare$$

Remarque: De plus, on a par construction

$$(3.9) \quad \|\operatorname{div}(p-p_h)\|_{0,\Omega} = \|f-f_h\|_{0,\Omega} \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION du THEOREME 5: Soit r_h un élément quelconque de $V_h^f(\Omega)$; comme la fonction $(p_h - r_h)$ appartient à $V_h^0(\Omega)$ sous-espace de $V^0(\Omega)$, on a

$$a(p, p_h - r_h) = 0 = a(p_h, p_h - r_h)$$

d'où

$$a(p - r_h, p_h - r_h) = a(p_h - r_h, p_h - r_h) .$$

On en déduit la majoration classique pour les problèmes variationnels elliptiques :

$$(3.10) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \operatorname{Inf}_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \|p - r_h\|_{0,\Omega} .$$

Dans le cas particulier où $f = f_h$, le théorème 5 est alors une conséquence évidente de (3.7) et de (3.10). Pour l'étude du cas général, nous introduisons la "perturbation" δp de l'espace $(L_2(\Omega))^2$ définie dans chaque triangle T de \mathcal{C}_h par

$$(3.11) \quad (\delta p)|_T = J_T(\hat{G}_T \circ \hat{\mathcal{N}} \circ \mathcal{F}_T^{-1})(f_h - f)|_T$$

où $\hat{\mathcal{N}}$ est l'application qui a une fonction \hat{g} de $L_2(\hat{T})$, telle que

$$\int_{\hat{T}} \hat{g}(\hat{x}) \, d\hat{x} = 0, \text{ associe la fonction } \hat{p}^* = \hat{\mathcal{N}}(\hat{g}) \text{ solution du problème}$$

de minimisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}^* \in V^{\hat{g}}(\hat{T}) \quad ; \quad v_{\hat{T}} \cdot \hat{p}^* = 0 \text{ sur } \partial\hat{T} \quad ; \\ \|\hat{p}^*\|_{0,\hat{T}} = \operatorname{Inf}_{\hat{q} \in V^{\hat{g}}(\hat{T})} \|\hat{q}\|_{0,\hat{T}} \quad ; \quad v_{\hat{T}} \cdot \hat{q} = 0 \text{ sur } \partial\hat{T} \end{array} \right. .$$

La solution \hat{p}^* de ce problème se caractérise comme étant le gradient de la solution $\hat{w} - \hat{w}$ définie à une constante près du problème de Neumann

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_{\hat{x}} \hat{w} = \hat{g} \quad , \text{ dans } \hat{T} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial v_{\hat{T}}} = 0 \quad , \text{ sur } \partial\hat{T} \end{array} \right. .$$

En vertu de la régularité du problème de Neumann dans \hat{T} (polygône convexe !) on a

$$\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}} = \|\hat{\mathcal{D}}^{\circ}(\hat{g})\|_{1,\hat{T}} \leq C \|\hat{g}\|_{0,\hat{T}}$$

d'où en revenant au triangle T pour la fonction δp définie en (3.11)

$$\|\delta p\|_{1,T} \leq C h_T \|f - f_h\|_{0,T}$$

et a fortiori puisque $\operatorname{div} p + f = 0$ et $\operatorname{div} q_h + f_h = 0$ dans T pour $q_h \in \mathcal{K}_h^f$

$$\|\delta p\|_{1,T} \leq C \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|p - q_h\|_{1,T}$$

donc

$$(3.12) \quad \|\delta p\|_{\mathcal{K}} \leq C \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|p - q_h\|_{\mathcal{K}} .$$

Par construction les traces normales de δp sont nulles sur le bord ∂T de tout triangle T de \mathcal{C}_h ; on en déduit que la fonction $p + \delta p$ appartient à la variété $V_h^f(\Omega) \cap \mathcal{K}$. Reprenant (3.10), on écrit

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \|\delta p\|_{0,\Omega} + \inf_{r_h \in V_h^f(\Omega)} \|p + \delta p - r_h\|_{0,\Omega} \right\}$$

et en appliquant le lemme 2 à la fonction $p + \delta p$

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \|\delta p\|_{0,\Omega} + \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|p + \delta p - q_h\|_{\mathcal{K}} \right\}$$

d'où

$$(3.13) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \|\delta p\|_{\mathcal{K}} + \inf_{q_h \in \mathcal{K}_h^f} \|p - q_h\|_{\mathcal{K}} \right\} .$$

Des majorations (3.12) et (3.13) on déduit le résultat annoncé (3.8). ■

Soit \bar{p} une fonction de la variété \mathcal{K}^f ; introduisant la fonction \tilde{p} de l'espace \mathcal{K}^0 définie par

$$(3.14) \quad p = \bar{p} + \tilde{p}$$

la majoration (3.8) obtenue par le théorème 5 s'écrit

$$(3.15) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C (\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{\mathcal{H}} + \underset{q_h \in \mathcal{H}_h}{\sim} \text{Inf}_h \|\tilde{p} - \tilde{q}_h\|_{\mathcal{H}})$$

Nous obtiendrons une majoration de cette dernière quantité à l'aide du

LEMME 3. *Il existe une constante C , indépendante de h , telle que pour toute fonction \tilde{p} appartenant à l'espace $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^0(T)$ on a*

$$(3.16) \quad \underset{q \in (P_k(T))^2 \cap V^0(T)}{\text{Inf}} \|\tilde{p} - q\|_{1,T} \leq C h_T^{k+1} |\tilde{p}|_{k+1,T} \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION du LEMME 3. Une fonction \tilde{p} de $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^0(T)$ est le rotationnel d'une fonction \tilde{w} de l'espace $H^{k+2}(T)$; une fonction q appartient à l'espace $(P_k(T))^2 \cap V^0(T)$ si et seulement si elle est le rotationnel d'un polynôme de degré $\leq k+1$. On a donc

$$\underset{q \in (P_k(T))^2 \cap V^0(T)}{\text{Inf}} \|\tilde{p} - q\|_{1,T} = \underset{w \in P_{k+1}(T)}{\text{Inf}} \{ |\tilde{w} - w|_{1,T}^2 + h_T^2 |\tilde{w} - w|_{2,T}^2 \}^{1/2}$$

et par les majorations standard

$$\underset{w \in P_{k+1}(T)}{\text{Inf}} \{ |\tilde{w} - w|_{1,T}^2 + h_T^2 |\tilde{w} - w|_{2,T}^2 \}^{1/2} \leq C h_T^{k+1} |\tilde{w}|_{k+2,T}$$

soit en repassant à la fonction \tilde{p} la majoration (3.16). \blacksquare

Pour pouvoir conclure, il nous faut préciser le choix du relèvement qui fournit \bar{p}_h à partir de la fonction f_h .

Soit \hat{R} le relèvement continu de $L_2(\hat{T})$ dans $V(\hat{T})$ défini par

$$(3.17) \quad \hat{q} = \hat{R}(\hat{g}) \iff \begin{cases} \hat{q}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} \int_0^{\hat{x}_1} \hat{g}(\xi, \hat{x}_2) d\xi \\ \hat{q}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} \int_0^{\hat{x}_2} \hat{g}(\hat{x}_1, \eta) d\eta \end{cases}$$

si $\hat{q} = \hat{R}(\hat{g})$, on a

$$\operatorname{div}_{\hat{x}} \hat{q} + \hat{g} = 0 \quad \text{dans } \hat{T}$$

$$\|\hat{q}\|_{0,\hat{T}} \leq C \|\hat{g}\|_{0,\hat{T}}$$

En outre si $\hat{g} \in H^{\ell}(\hat{T})$, ℓ entier ≥ 1 , on a $\hat{q} \in (H^{\ell}(\hat{T}))^2$ et

$$|\hat{q}|_{\ell,\hat{T}} \leq C \{ |\hat{g}|_{\ell-1,\hat{T}} + |\hat{g}|_{\ell,\hat{T}} \}.$$

A ce relèvement \hat{R} défini sur \hat{T} , nous associons le relèvement R_T défini sur un triangle T de \mathcal{C}_h par

$$(3.18) \quad R_T = J_T \mathcal{G}_T \circ \hat{R} \circ \mathcal{F}_T^{-1}.$$

Utilisant (3.2 bis) et les propriétés précédentes de \hat{R} , on a si $q = R_T(g)$:

$$(3.19) \quad \operatorname{div} q + f = 0 \quad \text{dans } T$$

et

$$(3.20) \quad \begin{cases} \|q\|_{0,T} \leq C h_T \|g\|_{0,T} \\ |q|_{\ell,T} \leq C \{ |g|_{\ell-1,T} + h_T |g|_{\ell,T} \} \quad (\ell \text{ entier } \geq 1). \end{cases}$$

Lorsque g est un polynôme de degré $\leq k$, on a $q = R_T(g) \in (P_{k+1}(T))^2$ donc $v_T \cdot q \in S_{k+1}(\partial T)$ et en général (hormis le cas $k = 0$) $v_T \cdot q \notin S_k(\partial T)$.

En vue de satisfaire la condition (2.5) nous définissons sur l'espace

$P_k(\hat{T})$ un relèvement $\hat{R}_{(k)}$ tel que si $\hat{q} = \hat{R}_{(k)}(\hat{g})$, on a

$$(3.21) \quad \begin{cases} \hat{q} \in (P_{k+1}(\hat{T}))^2 ; \quad v_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \in S_k(\partial \hat{T}) \\ \operatorname{div}_{\hat{x}} \hat{q} + \hat{g} = 0, \quad \text{dans } \hat{T} \\ \text{si } \hat{g} \in P_{k-1}(\hat{T}), \text{ on a } \hat{R}_{(k)}(\hat{g}) = \hat{R}(\hat{g}) \end{cases}$$

Il est possible pour tout entier k de trouver un tel relèvement

(cf. RAVIART [7]). A titre d'exemple, $\hat{R}_{(0)}$ relève la fonction constante a_0 en la fonction $\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2)$ donnée par

$$\hat{q}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} a_0 \hat{x}_1$$

$$\hat{q}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = -\frac{1}{2} a_0 \hat{x}_2$$

et l'opérateur $\widehat{R}_{(1)}$ relève la fonction affine $a_0 + a_1 \widehat{x}_1 + a_2 \widehat{x}_2$ en la fonction \widehat{q} donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{q}_1(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) &= -\frac{1}{2} a_0 \widehat{x}_1 + \frac{1}{3}(-2a_1 + a_2) \widehat{x}_1(\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2) \\ \widehat{q}_2(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2) &= -\frac{1}{2} a_0 \widehat{x}_1 + \frac{1}{3}(a_1 - 2a_2) \widehat{x}_2(\widehat{x}_1 + \widehat{x}_2)\end{aligned}$$

Pour $k \geq 2$, les relations (3.21) ne définissent plus $\widehat{R}_{(k)}$ de façon unique. A ce relèvement $\widehat{R}_{(k)}$ dans \widehat{T} nous associons le relèvement

$R_{(k),T}$ dans T :

$$(3.22) \quad R_{(k),T} = J_T \mathcal{G}_T \circ \widehat{R}_{(k)} \circ \mathcal{F}_T^{-1} .$$

Le relèvement $R_{(k),T}$ associe à un polynôme g de degré $\leq k$ une fonction q telle que

$$\begin{aligned}q &\in (P_{k+1}(T))^2 ; \quad \nu_T \cdot q \in S_k(\partial T) \\ \operatorname{div} q + g &= 0, \quad \text{dans } T .\end{aligned}$$

THEOREME 6. On suppose que la solution p du problème (1.7) satisfait les hypothèses de régularité $p \in (H^{k+1}(\Omega))^2$ et $\operatorname{div} p \in H^{k+1}(\Omega)$. Soit f_h une fonction de $L_2(\Omega)$ dont la restriction à tout triangle T de \mathcal{C}_h est un polynôme de degré $\leq k$ tel que

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_T f_h \, dx = \int_T f \, dx \\ \text{et} \\ \forall \ell = 0, 1, \dots, k, \quad |f - f_h|_{\ell, T} \leq Ch^{k+1-\ell} |f|_{k+1, T} . \end{array} \right.$$

A cette fonction f_h , on associe à l'aide de l'opérateur $R_{(k),T}$ défini par (3.21) et (3.22) la fonction \overline{p}_h telle que

$$(3.24) \quad \forall T \in \mathcal{C}_h \quad \overline{p}_h|_T = R_{(k),T}(f_h|_T) .$$

Soit p_h la solution du problème (2.13) ainsi construit. On a

$$(3.25) \quad \|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^{k+1} (|p|_{k+1,\Omega} + h |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega})$$

et

$$\|\operatorname{div}(p - p_h)\|_{0,\Omega} \leq C h^{k+1} |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega} . \quad \blacksquare$$

Remarque L'hypothèse (3.23) est satisfaite lorsque $f_h|_T$ est la projection orthogonale dans $L_2(T)$ de la fonction $f|_T$ sur l'espace $P_k(T)$. ■

DEMONSTRATION du THEOREME 6. Nous précisons la majoration (3.15) déduite du théorème 5, en choisissant pour fonction \bar{p} de \mathcal{H}^f

$$\bar{p}|_T = R_T(f|_T) \quad , \quad \text{dans tout } T \in \mathcal{T}_h .$$

La régularité de $f = -\operatorname{div} p$ implique que la restriction $\bar{p}|_T$ à un triangle T de \mathcal{T}_h appartient à la variété $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^f(T)$ et avec la régularité de p , la fonction $\tilde{p}|_T = p|_T - \bar{p}|_T$ appartient à l'espace $(H^{k+1}(T))^2 \cap V^0(T)$. En vertu du lemme 3, on a alors

$$\inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^0(T)} \|\tilde{p} - q\|_{1,T} \leq C h^{k+1} |\tilde{p}|_{k+1,T} \leq C h^{k+1} (|p|_{k+1,T} + |\bar{p}|_{k+1,T})$$

D'après (3.20) appliqué pour $\ell = k+1$ à la fonction \bar{p} , on a

$$|\bar{p}|_{k+1,T} \leq C (|f|_{k,T} + h |f|_{k+1,T})$$

d'où

$$\inf_{q \in (P_k(T))^2 \cap V^0(T)} \|\tilde{p} - q\|_{1,T} \leq C h^{k+1} (|p|_{k+1,T} + h |\operatorname{div} p|_{k+1,T})$$

puis

$$(3.26) \quad \inf_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^0} \|\tilde{p} - \tilde{q}_h\|_{\mathcal{H}} \leq C h^{k+1} (|p|_{k+1,\Omega} + h |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega}) .$$

D'autre part, on a dans tout triangle T de \mathcal{T}_h

$$\bar{p} - \bar{p}_h = R_T(f) - R_{(k),T}(f_h) = R_T(f - f_h) + (R_T - R_{(k),T})(f_h)$$

d'où

$$\|\bar{p} - \bar{p}_h\|_{1,T} \leq \|R_T(f - f_h)\|_{1,T} + \|(R_T - R_{(k),T})(f_h)\|_{1,T} .$$

Par application de (3.20) pour $\ell = 0$ et $\ell = 1$, on a

$$\|R_T(f - f_h)\|_{1,T} \leq C(h \|f - f_h\|_{0,T} + h^2 |f - f_h|_{1,T})$$

d'où avec l'hypothèse (3.23)

$$(3.27) \quad \|R_T(f - f_h)\|_{1,T} \leq C h^{k+2} |f|_{k+1,T} = C h^{k+2} |\operatorname{div} p|_{k+1,T} .$$

Enfin puisque l'application $\hat{R} - \hat{R}_{(k)}$, définie sur l'espace de dimension $P_k(\hat{T})$, s'annule sur $P_{k-1}(\hat{T})$, on a

$$\forall \hat{g} \in P_k(\hat{T}), \quad \|(\hat{R}-\hat{R}_{(k)})(\hat{g})\|_{1,\hat{T}} \leq C |\hat{g}|_{k,\hat{T}}$$

soit en revenant au triangle T

$$\forall g \in P_k(T), \quad \| (R_T - R_{(k),T})(g) \|_{1,T} \leq C h^{k+1} |g|_{k,T}$$

En particulier on obtient ainsi

$$\| (R_T - R_{(k),T})(f_h) \|_{1,T} \leq C h^{k+1} |f_h|_{k,T}$$

d'où avec l'hypothèse (3.23)

$$(3.28) \quad \| (R_T - R_{(k),T})(f_h) \|_{1,T} \leq C h^{k+1} (|f|_{k,T} + h |f|_{k+1,T})$$

Des majorations (3.27) et (3.28), on déduit

$$\| \bar{p} - \bar{p}_h \|_{1,T} \leq C h^{k+1} (|\operatorname{div} p|_{k,T} + h |\operatorname{div} p|_{k+1,T})$$

puis

$$(3.29) \quad \| \bar{p} - \bar{p}_h \|_{\mathcal{H}} \leq C h^{k+1} (|\operatorname{div} p|_{k,\Omega} + h |\operatorname{div} p|_{k+1,\Omega}) .$$

Il reste à reporter les majorations (3.26) et (3.29) dans (3.15) pour obtenir la majoration annoncée (3.25). La majoration de

$$\| \operatorname{div}(p - p_h) \|_{0,\Omega} \quad \text{est évidente.} \quad \blacksquare$$

A N N E X E (Démonstration du lemme 2)

Soit q une fonction de $V_h^f(\Omega) \cap \mathcal{H}$; nous allons montrer que toute fonction q_h de \mathcal{H}_h^f , on a

$$(4.1) \quad \inf_{r_h \in V_h^h(\Omega)} \|q - r_h\|_{0,\Omega} \leq C \|q - q_h\|_{\mathcal{H}}$$

ce qui prouvera le lemme 2. On obtiendra (4.1) en choisissant pour fonction r_h la projection orthogonale -au sens du produit scalaire de l'espace $L_2(\Omega)$ - de la fonction q_h . La démonstration utilise la définition (2.11) de la variété $V_h^f(\Omega)$ et non sa caractérisation (2.15).

L'espace \mathcal{M}_b , défini en (1.11) est muni de la norme hilbertienne

$$(4.2) \quad \| \mu \|_{\mathcal{M}_b} = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \| \dot{\mu} \|_{0,\partial T}^2 \right\}^{1/2}$$

où

$$(4.3) \quad \| \mu \|_{0,\partial T} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \| \mu + c \|_{0,\partial T} \quad .$$

LEMME A. (uniforme continuité de la forme bilinéaire $b(q,\mu)$)

Il existe une constante C , indépendante de h , telle que

$$(4.4) \quad \forall \tilde{q} \in \mathcal{H}^0, \forall \mu \in \mathcal{M}_b, \quad b(q,\mu) \leq C \|q\|_{\mathcal{H}} \| \mu \|_{\mathcal{M}_b} \quad . \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION. Soit q une fonction de l'espace $(H^1(T))^2 \cap V^0(T)$ et soit μ une fonction de l'espace $L_2(\partial T)$; où T est un triangle quelconque de \mathcal{T}_h . Par passage au triangle de référence \hat{T} , on a en vertu du lemme 1

$$\int_{\partial T} \mu v_T \cdot q \, d\gamma = \int_{\partial \hat{T}} \hat{\mu} v_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{\gamma}$$

et la fonction \hat{q} appartient à l'espace $V^0(\hat{T}) \cap (H^1(\hat{T}))^2$.

Puisque cette fonction est à divergence nulle, on a

$$\int_{\partial \hat{T}} \hat{v}_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{\gamma} = 0$$

d'où

$$\int_{\partial T} \mu \, v_T \cdot q \, d\gamma \leq \| \hat{\mu} \|_{0, \partial \hat{T}} \| v_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \|_{0, \partial \hat{T}} \leq C \| \hat{\mu} \|_{0, \partial \hat{T}} \| \hat{q} \|_{1, \hat{T}}$$

La triangulation \mathcal{C}_h étant régulière, on obtient en revenant au triangle T

$$\int_{\partial T} \mu \, v_T \cdot q \, d\gamma \leq C h_T^{-1/2} \| \dot{\mu} \|_{0, \partial T} \| q \|_{1, T}$$

On en déduit la majoration (4.4) à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

LEMME B. (uniforme compatibilité des espaces \mathcal{K}_h^0 et \mathcal{M}_h)

Il existe une constante $\beta > 0$, indépendante de h , telle que

$$(4.5) \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, \quad \sup_{q_h \in \mathcal{K}_h^0} \frac{b(q_h, \mu_h)}{\| q_h \|_{0, \Omega}} \geq \beta \| \mu_h \|_{\mathcal{M}_h} . \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION. Montrons que dans tout triangle T de \mathcal{C}_h , on a avec

$\beta > 0$

$$(4.6) \quad \forall \mu \in S_k(\partial T), \quad \sup_{q \in V^0(T) \cap (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \mu \, v_T \cdot q \, d\gamma}{\| q \|_{0, T}} \geq \beta h_T^{-1/2} \| \dot{\mu} \|_{0, \partial T} .$$

Soit donc μ une fonction de $S_k(\partial T)$. Puisque l'application \mathcal{G}_T^{-1} est un isomorphisme de l'espace $V^0(T) \cap (P_k(T))^2$ sur l'espace $V^0(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2$ tel que

$$\| \hat{q} \|_{0, \hat{T}} \geq C_1 \| q \|_{0, T}$$

on a

$$\sup_{q \in V^0(T) \cap (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \mu \, v_T \cdot q \, d\gamma}{\| q \|_{0, T}} \geq C_1 \sup_{\hat{q} \in V^0(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial \hat{T}} \hat{\mu} \, v_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{\gamma}}{\| \hat{q} \|_{0, \hat{T}}} .$$

D'après la démonstration du théorème 3, l'application

$$\hat{u} \rightsquigarrow \sup_{\hat{q} \in V^0(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial\hat{T}} \hat{u} \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{\gamma}}{\|\hat{q}\|_{0,\hat{T}}}$$

défini une norme sur l'espace quotient $S_k(\partial\hat{T})/\mathbb{R}$; cet espace étant de dimension finie, il existe une constante $\hat{\beta} > 0$ telle que

$$\sup_{\hat{q} \in V^0(\hat{T}) \cap (P_k(\hat{T}))^2} \frac{\int_{\partial\hat{T}} \hat{u} \nu_{\hat{T}} \cdot \hat{q} \, d\hat{\gamma}}{\|\hat{q}\|_{0,\hat{T}}} \geq \hat{\beta} \|\hat{u}\|_{0,\partial\hat{T}} .$$

Or revenant au triangle T , on a avec C_2 constante > 0

$$\|\hat{u}\|_{0,\partial\hat{T}} \geq C_2 h_T^{-1/2} \|\dot{u}\|_{0,\partial T}$$

soit en récapitulant les résultats

$$\sup_{q \in V^0(T) \cap (P_k(T))^2} \frac{\int_{\partial T} \dot{u} \nu_T \cdot q \, d\gamma}{\|q\|_{0,T}} \geq C_1 \hat{\beta} C_2 h_T^{-1/2} \|\dot{u}\|_{0,\partial T}$$

c'est-à-dire (4.5). Par une technique analogue à celle développée dans [8] [9], on en déduit le lemme B. ■

Nous sommes à présent en mesure de démontrer (4.1) donc le lemme 2.

Soit q une fonction de $V_h^f \cap \mathcal{K}$ et soit q_h un élément quelconque de \mathcal{K}_h^f . A l'aide d'une variante du théorème 3, nous définissons le couple

(r_h, τ_h) solution du problème

$$(4.7) \quad \begin{cases} (r_h, \tau_h) \in \mathcal{K}_h^f \times \mathcal{M}_h \\ \forall \tilde{q}_h \in \mathcal{K}_h^0, \int_{\Omega} r_h \cdot \tilde{q}_h \, dx + b(\tilde{q}_h, \tau_h) = \int_{\Omega} q_h \cdot \tilde{q}_h \, dx \\ \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, b(r_h, \mu_h) = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème 4, la fonction r_h est la projection orthogonale de q_h sur la variété V_h^f :

$$r_h \in V_h^f ; \forall \tilde{q}_h \in V_h^0, \int_{\Omega} r_h \cdot \tilde{q}_h \, dx = \int_{\Omega} q_h \cdot \tilde{q}_h \, dx .$$

La fonction $(q_h - r_h)$ appartient à \mathcal{H}_h^0 , sous-espace de dimension finie de $(L_2(\Omega))^2$; on a par dualité

$$\|q_h - r_h\|_{0,\Omega} = \sup_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^0} \frac{\int_{\Omega} (q_h - r_h) \cdot \tilde{q}_h \, dx}{\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}}$$

soit avec (4.7)

$$\|q_h - r_h\|_{0,\Omega} = \sup_{\tilde{q}_h \in \mathcal{H}_h^0} \frac{b(\tilde{q}_h, \tau_h)}{\|\tilde{q}_h\|_{0,\Omega}}$$

et à l'aide du lemme B

$$(4.8) \quad \|q_h - r_h\|_{0,\Omega} \geq \beta \|\tau_h\|_{\mathcal{M}} \quad .$$

D'autre part, en choisissant dans (4.20) pour \tilde{q}_h la fonction $\tilde{q}_h = q_h - r_h$, on obtient

$$\|q_h - r_h\|_{0,\Omega}^2 = b(q_h - r_h, \tau_h) = b(q_h, \tau_h) \quad .$$

Puisque la fonction q appartient à $V(\Omega) \cap \mathcal{H}$, on a

$$b(q, \tau_h) = 0$$

d'où

$$\|q_h - r_h\|_{0,\Omega}^2 = b(q_h - q, \tau_h)$$

Il reste à remarquer que la fonction $\tilde{q} = q_h - q$ appartient au sous-espace \mathcal{H}^0 pour déduire à l'aide du lemme A

$$(4.9) \quad \|q_h - r_h\|_{0,\Omega}^2 \leq C \|\tilde{q} = q_h - q\|_{\mathcal{H}} \|\tau_h\|_{\mathcal{M}}$$

Des inégalités (4.8) et (4.9) nous déduisons

$$\|q_h - r_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{C}{\beta} \|\tilde{q} = q_h - q\|_{\mathcal{H}}$$

ce qui démontre (4.1) puisque r_h appartient à la variété $V_h^f(\Omega)$. ■

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BREZZI, F.
"On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems arising from Lagrangian Multipliers"
 R.A.I.R.O. , R 2 , Août 1974 , pp. 129- 151
- [2] CIARLET, P.G. & RAVIART, P.A.
"General Lagrange and Hermite Interpolation in R^n with Applications to Finite Element Methods"
 Arch. Rat. Mech. Anal., 46, (1972) pp. 177-189.
- [3] DE VEUBEKE F.
"Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method".
 Stress Analysis (O.C. Zienkiewicz & G.S. Holister, Ed.) - Wiley (1965)
 ch. 9 , pp. 145-197.
- [4] DE VEUBEKE F.
"Diffusive Equilibrium Models"
 Lecture notes, University of Calgary (1973).
- [5] DE VEUBEKE F. & HOGGE M.A.
"Dual Analysis for Heat Conduction Problems by Finite Elements"
 Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol 5 (1972) pp. 65-82.
- [6] HASLINGER J. & HLAVÁČEK
"Convergence of a finite element method based on the dual variational formulation"
 (Preprint - Université de Prague (1975)).
- [7] RAVIART P.A.
"Methodes d'éléments finis mixtes"
 Exposé aux Journées Eléments Finis - Rennes 1975.
- [8] RAVIART P.A. & THOMAS J.M.
"Méthode des éléments finis hybrides primaux pour les problèmes elliptiques du second ordre" (à paraître).
- [9] THOMAS J.M.
"Méthodes des éléments finis hybrides duaux pour les problèmes elliptiques du second ordre" (à paraître dans R.A.I.R.O).