François Berrondo

Caractérisation topologique des corps valués henséliens

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. nº 3, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___2_A3_0>

CARACTERISATION TOPOLOGIQUE

DES CORPS VALUES HENSELIENS

par

François BERRONDO

Nous caractériserons les topologies d'un corps qui peuvent être définies par une valuation hensélienne.

INTRODUCTION

Définition 0 :

Topologie valuative d'un corps : c'est une topologie qui peut être définie par une valuation.

Ce sont les topologies compatibles avec la structure de corps, séparées, localement rétrobornées ([2], ch. III, § 6, ex. 22) et telles que le corps contienne un sous - groupe non nul borné.

Définition 1 :

Corps valuatif : c'est un corps muni d'une topologie valuative.

Définition 2 :

Corps $\mathbb{R}$ - valuatif : c'est un corps valuatif $(K,\mathcal{G})$ possédant les propriétés équivalentes suivantes :

1) $\mathcal{G}$ peut être définie par une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ (i. e. de hauteur 1)
2) Il existe des éléments de K non nuls topologiquement nilpotents.

Si $(K,\mathcal{G})$ désigne un corps valuatif, C la clôture algébrique de K et G le groupe de Galois de C sur K, on montre que $\mathcal{G}$ est la topologie d'une valuation hensélienne si et seulement si les conditions équivalentes suivantes sont vérifiées :

I - Il existe une seule topologie valuative de C prolongeant $\mathcal{G}$ (th. 1)

II - Il existe une topologie valuative de C prolongeant $\mathcal{G}$ telle que tous les éléments de G soient continus. (th. 2).

III - (Quand $(K,\mathcal{G})$ n'est pas $\mathbb{R}$ - valuatif)
Quel que soit le voisinage V de 0 dans K, il existe un voisinage V' tel que, si $f = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n$ est un polynôme irréductible de $K[X]$, $c_n \in V' \Longrightarrow c_i \in V$ $\forall\, i \in [1, \dots, n]$ (th. 3)

EXTENSIONS MONOTOPOLOGISABLES DES CORPS VALUATIFS

Définition 3

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif et L une extension algébrique de K. Nous dirons que L est une extension monotopologisable s'il existe une seule topologie valuative de L qui prolonge $\mathcal{C}$.

Exemple :

Si K est complet, toute extension finie est monotopologisable ([1], § 5 , n° 2, prop. 4).

Théorème 0

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif, L une extension algébrique de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de L prolongeant $\mathcal{C}$. Si v est une valuation de K définissant $\mathcal{C}$, il existe une valuation v' de L prolongeant v qui définit $\mathcal{C}'$.

Soit v_1 une valuation de L définissant $\mathcal{C}'$ et soit $\bar{v}_1$ sa restriction à K. $\bar{v}_1$ et v sont dépendantes ([1], § 7 , n° 2, proposition 3). Si A_1 et A désignent leurs anneaux, A_1 et A ont un idéal premier commun P et $(A_1)_p = A_p$ ([1], § 4, n° 1, prop. 1). Si v_p est la valuation de K dont l'anneau est A_p, les prolongements de v_p à L sont de la forme $v'_{p'}$, où v' est un prolongement de v et p' un idéal premier de v' au dessus de P ([4] , F, prop. 4). Il existe donc un v' et un p' tels que $v'_{p'} = (v_1)_{p'}$. Les valuations v_1 et v' sont dépendantes donc v' définit $\mathcal{C}'$.

Théorème 1

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif , L une extension algébrique de K. Pour que cette extension soit monotopologisable, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ puisse être définie par une valuation ayant un seul prolongement à L.

La condition est suffisante d'après le théorème 0. Montrons qu'elle est nécessaire. On suppose d'abord que L est une extension de dimension finie sur K. Soit v une valuation de K définissant sa topologie et A son anneau. Soient $B_1, B_2, \dots B_s$ les anneaux de valuation de L au dessus de A. Si $L : K$ est monotopologisable, les anneaux $B_1, B_2, \dots, B_s$ sont dépendants, donc ils ont un idéal premier commun π tel que $(B_1)_\pi = (B_2)_\pi = \dots = (B_s)_\pi$.

Posons $P = \pi \cap A$. Les seuls anneaux de valuation de L au dessus de A_p sont les $(B_i)_\pi$ ([4], F - prop. 4). Il n'y en a qu'un seul. La valuation dont l'anneau est A_p définit la topologie de K et n'a qu'un seul prolongement à L.

- Cas général

Soit v une valuation de K définissant $\mathcal{G}$, A son anneau et X son spectre. On munit X de l'ordre opposé de l'inclusion $(x \leq x' \Longleftrightarrow x' \subset x)$; $\forall x \in X$ on note v_x la valuation dont l'anneau est A_x.

Supposons que $\forall x \in X$, v_x admet plusieurs prolongements à L et montrons qu'alors l'extension $L : K$ n'est pas monotopologisable.

<u>Lemme 1</u>

Il existe une partie X' cofinale dans X et une application croissante Λ de X' dans l'ensemble des corps compris entre K et L $(x \longrightarrow \Lambda x)$ telles que :

a) $\forall x \in X'$ v_x a plusieurs prolongements à Λ_x et

b) $\forall x, y \in X'$, $x < y \Longrightarrow v_y$ a un seul prolongement à Λ_x.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples (X', Λ) où X' est une partie de X et Λ une application croissante de X' dans l'ensemble des corps compris entre K et L vérifiant les conditions a) et b) du lemme 1 et la condition c) suivante

c) si X' a un plus grand élément x_0, $\exists z \in X$ tel que v_z a un seul prolongement à Λ_{x_0}.

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$. En effet, v a plusieurs prolongements à L donc il existe un corps $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ de dimension finie sur K tel que v a plusieurs prolongements à $\Lambda_{\mathfrak{m}}$. Si $\Lambda_{\mathfrak{m}} : K$ est polytopologisable, à fortiori, $L : K$ aussi et le théorème est établi. On peut donc supposer $\Lambda_{\mathfrak{m}} : K$ monotopologisable et comme $[\Lambda_{\mathfrak{m}} : K]$ est fini, $\exists z \in X$ tel que v_z a un prolongement à $\Lambda_{\mathfrak{m}}$. Si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de v, le couple $(\mathfrak{m}, \Lambda_{\mathfrak{m}})$ vérifie bien les conditions de $\mathcal{F}$.

- Ordre sur $\mathcal{F}$: soient (X',Λ') et (X'',Λ'') des éléments de $\mathcal{F}$. On pose $(X',\Lambda') \leq (X'',\Lambda'')$ si $X' \subset X''$ et si la restriction de Λ'' à X' coïncide avec Λ'. $\mathcal{F}$ est inductif pour cet ordre : soient $(X'_i,\Lambda_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{F}$. Posons $X' = \bigcup_{i\in I} X'_i$ et définissons Λ sur X' par $\Lambda/_{X'_i} = \Lambda_i$. $\forall\ x, y \in X'$ $\exists\ i : x,y \in X'_i$ donc v_x a plusieurs prolongements à Λ_x et v_y a un seul prolongement à Λ_x si $x < y$. Enfin, si X' a un plus grand élément x_o, c'est aussi le plus grand élément d'un X'_i donc $\exists\ z \in X$: v_z a un seul prolongement à Λx_o. Par suite $\mathcal{F}$ contient un élément maximal (X',Λ).

- Montrons que X' n'a pas de plus grand élément. En effet, si x_o est le plus grand élément, $\exists\ z \in X$: v_z a un seul prolongement à Λx_o. On a nécessairement $z > x_o$. v_z a plusieurs prolongements à L donc il existe un corps L' fini sur K tel que v_z a plusieurs prolongements à L'. Soit Λ_z le corps engendré par Λ_{x_o} et L'. v_z a plusieurs prolongements à Λ_z. Λ_z est de dimension finie sur Λ_{x_o} et on peut supposer l'extension $\Lambda_z : \Lambda_{x_o}$ monotopologisable (sans quoi $L : K^o$ serait polytopologisable et le théorème démontré). Donc $\exists\ z' \in X$: $v_{z'}$ a un seul prolongement à Λ_z. Posons $\bar{X}' = X' \cup \{z\}$ et prolongeons Λ à $\bar{X}'$ en posant $\Lambda(z) = \Lambda_z$. $(\bar{X}',\Lambda) \in \mathcal{F}$ ce qui contredit la maximalité de (X',Λ).

- Montrons que X' est cofinal dans X. S'il n'en était pas ainsi, soit m un majorant de X'. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x\in X'} \Lambda_x$. $\forall\ x \in X'$, $\exists\ y \in X'$ $x < y < m$; v_y a un seul prolongement à Λ_x, donc v_m aussi et par suite v_m a un seul prolongement à $\tilde{\Lambda}$. Comme ci dessus on construit un extension finie Λ_m de $\tilde{\Lambda}$ telle que v_m a plusieurs prolongements à Λ_m et on montre que $\exists\ z \in X$: v_z a un seul prolongement à Λ_m. Posons $\bar{X}' = X' \cup \{m\}$ et prolongeons $\Lambda\ (m) = \Lambda_m$, $(\bar{X}',\Lambda) \in \mathcal{F}$, impossible. Ce qui établit le lemme 1.

- Pour tout corps Λ $(K \subset \Lambda \subset L)$ et tout prolongement w de v à Λ, on note w_x la valuation de Λ moins fine que w qui prolonge v_x.

- Soit A l'ensemble des couples (Λ,w) où Λ est un corps $(K \subset \Lambda \subset L)$ et w un prolongement de v à Λ ; on ordonne A en posant $(\Lambda_1,w_1) \leq (\Lambda_2,w_2)$ si $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ et $w_2/\Lambda_1 = w_1$.

Lemme 2

Soit $\bar{v}$ un prolongement quelconque de v à L. Il existe une partie $\bar{X}$ cofinale dans X et une application croissante de $\bar{X}$ dans A, $(x \to (\Lambda_x, w^{(x)}))$, notée (Λ, w), telle que $\forall x \in \bar{X}$, $w_x^{(x)} \neq \bar{v}_x / \Lambda_x$.

Considérons un couple (X', Λ) vérifiant les conditions du lemme 1. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des couples $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ où $\bar{X}$ est une partie de X' et (Λ, w) une application croissante de $\bar{X}$ dans A dont la première composante coïncide avec Λ et qui vérifie les conditions du lemme 2.

A. $\mathcal{F}$ n'est pas vide : si m désigne l'idéal maximal de v, v a plusieurs prolongements à Λ_m donc on peut choisir un w_m distinct de $\bar{v}_{x/\Lambda}$. On a $(m, (\Lambda_m, w_m)) \in \mathcal{F}$. On ordonne $\mathcal{F}$ en posant $(\bar{X}_1, (\Lambda, w)_1) \leq (\bar{X}_2, (\Lambda, w)_2)$ si $\bar{X}_1 \subset \bar{X}_2$ et si $(\Lambda, w)_2$ prolonge $(\Lambda, w)_1$. $\mathcal{F}$ est évidemment inductive. Soit donc $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ un élément maximal de $\mathcal{F}$. Si $\bar{X}$ n'était pas cofinale dans X', il existerait un majorant strict m de $\bar{X}$. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x \in \bar{X}} \Lambda_x$ et soit $\tilde{w}$ la valuation de $\tilde{\Lambda}$ qui prolonge les $w^{(x)}$. v_m a un seul prolongement à Λ_x, $\forall x \in \bar{X}$, donc v_m a un seul prolongement à $\tilde{\Lambda}$ et ce prolongement est $\tilde{w}_m$. v_m a plusieurs prolongements à Λ_m, donc $\tilde{w}_m$ aussi, et l'un d'entre eux est distinct de $\bar{v}_m / \Lambda_m$. Or tout prolongement de $\tilde{w}_m$ est de la forme $w_m^{(m)}$ où $w^{(m)}$ est un prolongement de $\tilde{w}$ à Λ_m ([4] : E - prop. 4). Il existe donc un prolongement $w^{(m)}$ de $\tilde{w}$ à Λ_m tel que $w_m^{(m)} \neq \bar{v}_m / \Lambda_m$. Posons $\bar{\bar{X}} = \bar{X} \cup \{m\}$ et prolongeons (Λ, w) à $\bar{\bar{X}}$ en posant $(\Lambda, w)(m) = (\Lambda_m, w^{(m)})$. $(\bar{\bar{X}}, (\Lambda, w)) \in \mathcal{F}$ ce qui contredit la maximalité de $(\bar{X}, (\Lambda, w))$. Donc $\bar{X}$ est cofinale dans X' et par suite dans X, ce qui établit le lemme 2.

Démonstration du théorème :

Considérons un prolongement quelconque $\bar{v}$ de v à L et un couple $(\bar{X}, (\Lambda, w))$ vérifiant les conditions du lemme 2. Posons $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{x \in \bar{X}} \Lambda_x$ et soit $\tilde{w}$ la valuation de $\tilde{\Lambda}$ qui prolonge les $w^{(x)}$. Si l'extension $L : K$ était monotopologisable, à fortiori $\tilde{\Lambda} : K$ aussi, donc $\bar{v}/\tilde{\Lambda}$ et $\tilde{w}$ seraient dépendantes. On aurait $\bar{v}_{x/\tilde{\Lambda}} = \tilde{w}_x$ pour un x de X. Comme $\bar{X}$ est cofinale, $\exists y \in \bar{X}$, $y \geq x$. On a $w_y^{(y)} \neq \bar{v}_{y/\Lambda_y}$. Comme $x \leq y$, $w_x^{(y)} \neq \bar{v}_{x/\Lambda_y}$ et comme $\Lambda_y \subset \tilde{\Lambda}$, $\tilde{w}_x \neq \bar{v}_{x/\tilde{\Lambda}}$, d'où la contradiction.

Remarque : la démonstration précédente peut être considérablement simplifiée dans le cas où la topologie est métrisable. (cf. appendice)

CAS DES EXTENSIONS NORMALES

Théorème 2

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif, N une extension normale de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de N prolongeant $\mathcal{C}$. Soit G le groupe de Galois de l'extension $N : K$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{C}'$ est la seule topologie valuative de N prolongeant $\mathcal{C}$.

2) $\forall\, \sigma \in G$, σ est continu .

3) G est une famille équi-continue d'automorphismes de N.

1) $\Longrightarrow$ 3) D'après le théorème 1, la topologie de K est définie par une valuation v ayant un seul prolongement $\bar{v}$ à N. Donc, $\forall\, \sigma \in G$, $\bar{v} \circ \sigma = \bar{v}$ G est une famille équi-continue pour la topologie de $\bar{v}$.

3) $\Longrightarrow$ 2) évident

2) $\Longrightarrow$ 1) soit $\bar{v}$ une valuation définissant la topologie de N et v sa restriction à K. $\forall\, \sigma \in G$, σ est un homéomorphisme car σ et σ^{-1} sont continues. Par suite, $\bar{v}$ et $\bar{v} \circ \sigma$ définissent la même topologie. Tous les prolongements de v à L sont du type $\bar{v} \circ \sigma$ ([1], § 8, n° 6, prop. 7) et les topologies valuatives de L sont définies par ces prolongements (th. 0) ; il n'y en a donc qu'une seule.

Théorème 3

Soit $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif non $\mathbb{R}$ - valuatif et N une extension algébrique normale de K. Quel que soit y dans N, on note $X^{n(y)} + C_1(y)\, X^{n(y)-1} + \dots + C_{n(y)}(y)$ son polynôme minimal unitaire.

L'extension $N : K$ est monotopologisable si et seulement si $\forall\ V$ $\exists V' : c_{n(y)}(y) \in V' \Longrightarrow c_i(y) \in V \quad \forall\, i \in [1, n(y)]$. ($V$ et V' désignant des voisinages de 0 dans K).

Si $N : K$ est monotopologisable, $\exists\ v$ définissant $\mathcal{C}$ et ayant un seul prolongement à N. Comme $\mathcal{C}$ n'est pas $\mathbb{R}$ - valuative, V contient un idéal premier P de v. P est l'idéal maximal de la valuation v_p et, d'aprè ([3], ch. III, § 16, 3), $c_{n(y)}(y) \in P \longrightarrow c_i(y) \in P$. Le voisinage $V' = P$ convient.

Réciproquement, soit v une valuation définissant $\mathcal{C}$ et supposons que $\exists\ V : \forall\ V'\ \exists\ y \in N : c_{n(y)}(y) \in V'$, $c_{i_o}(y) \notin V$. Soit P un idéal premier de v inclus dans V, en prenant $V' = P$, on déduit que v_p a plusieurs prolongements à N. $\forall\ P \in \mathrm{Spec}\,(v)$, v_p a plusieurs prolongements donc $\mathcal{C}$ ne peut être définie par une valuation à prolongement unique.

CAS DE LA CLOTURE ALGEBRIQUE

Définition 4

Soit $(K, \mathcal{C})$ un corps valuatif et C sa clôture algébrique. $(K, \mathcal{C})$ sera dit hensélienmement valuatif si C est une extension monotopologisable de $(K, \mathcal{C})$.

Exemple

Tout corps $\mathbb{R}$ - valuatif complet est hensélienmement valuatif.

Montrons qu'il existe un corps valuatif complet non hensélienmement valuatif.

Lemme 0

Soit (K,v) un corps valué et v_p la valuation de K associée à l'idéal premier p de l'anneau de v ([4], C, th. 1). La topologie de K peut être définie par une valuation hensélienne si et seulement s'il existe p tel que v_p soit une valuation hensélienne.

S'il existe p tel que v_p soit hensélienne, c'est évident puisque v et v_p définissent la même topologie.

S'il existe v' hensélienne définissant la même topologie que v, alors il existe v'' moins fine que v et que v' ([1], § 7, n° 2, prop. 3). Comme v'' est moins fine que v', v'' est hensélienne ([4], F, prop. 9) et comme v'' est moins fine que v, il existe p tel que $v'' = v_p$ ([4], C, th. 1).

Construction du contre - exemple

Choix du groupe ordonné

$\mathbb{Z}_-$ désigne l'ensemble des entiers ≤ 0. Soit G le groupe des applications à support fini de $\mathbb{Z}_-$ dans $\mathbb{Z}$ ordonné lexicographiquement. Les sous - groupes isolés de G forment une suite croissante. Précisément, ce sont les sous - groupes $G_n = \{g \in G : g(x) = 0 \quad \forall x \leq -n\}$. Notons g_n l'élément de G défini par $g_n(-n) = 1$, $g_n(-n') = 0$ si $n \neq n'$. G_n est engendré par $g_0, g_1, \dots, g_{n-1}$ et g_n est la borne supérieure de G_n.

Lemme 1

Il existe un isomorphisme de groupes ordonnés φ_n de G dans G/G_n.

Soit $H_n = \{g \in G : g(x) = 0 \ \forall x > -n\}$. Il est clair que H_n est un sous - groupe et que $G = G_n \oplus H_n$. Soit φ'_n l'application de G dans H_n définie par $\varphi'_n(g) = g'$ avec $g'(x) = \begin{cases} g(x+n) & \text{si } x \leq -n \\ 0 & \text{si } -n \leq x \leq 0 \end{cases}$
φ'_n est un isomorphisme et comme H_n est isomorphe à $G/_{G_n}$, on en déduit un isomorphisme φ_n de G dans $G/_{G_n}$ tel que $\varphi_n(g_k) = \overline{g_{k+n}}$ (classe de g_{k+n} dans $G/_{G_n}$).

<u>Choix du corps valué</u>

Soit k un corps, $K = k(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et v la valuation de K à valeurs dans G qui induit sur k la valuation triviale et telle que $v(X_n) = g_n$. Soit v_n la valuation subordonnée dont le groupe des valeurs est $G/_{G_n}$ ([4], C, th. 1). On a $v = v_0$. Pour tout corps k et tout entier n, nous noterons $(K, v_n)_k$ le corps valué ainsi défini.

<u>Lemme 2</u>

Les corps valués $(K,v)_{k(T_0,\dots,T_{n-1})}$ et $(K,v_n)_k$ sont isomorphes.

Soit ψ_n l'isomorphisme de $k(T_0,\dots,T_{n-1})(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ dans $k(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ défini par $\psi_n(T_i) = X_i$, $0 \leq i \leq n-1$ et $\psi_n(X_k) = X_{k+n}$.
Il suffit de vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} k(T_0,\dots,T_{n-1})(X_i) & \xrightarrow{v} & G \\ \downarrow \psi_n & & \downarrow \varphi_n \\ k(X_i) & \xrightarrow{v_n} & G/_{G_n} \end{array}$$

$v_n \circ \psi_n(T_i) = v_n(X_i) = 0 = \varphi_n \circ v(T_i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$

et $v_n \circ \psi_n(X_i) = v_n(X_{i+n}) = \overline{g_{i+n}} = \varphi_n(g_i) = \varphi_n \circ v(X_i)$.

On suppose désormais la caractéristique de k différente de 2.

<u>Lemme 3</u>

Quel que soit $z \in (K,v)_k$, on a $v(z^2 + X_0 - 1) < g_1$

Montrons d'abord que le polynôme $f = T^2 + X_0 - 1$ n'a pas de racine dans K. En effet, toute racine est entière sur $k[X_0]$ et $k[X_0]$ est intégralement fermé dans K, donc, s'il existe une racine dans K, c'est un polynôme P de $k[X_0]$. Or, si le degré de P est supérieur à 1, $d°(P^2 + X_0 - 1) = 2\,d°(P) > 0$, et, si $d°(P) = 0$, $d°(P^2 + X_0 - 1) = 1 > 0$.
f n'a pas de racine dans K.

Soit t une racine de f dans une extension quadratique L de K. v admet deux prolongements à L. En effet $L = K[t-1]$ et le polynôme minimal de $t-1$ est $T^2 + 2T + X_0$. La trace de $t-1$ a pour valuation 0 et la norme a pour valuation $g_0 > 0$. On conclut par ([3], ch. III, § 16, th. 16-2). Soit v' un des prolongements de v à L, son groupe des valeurs est encore G. Notons que $k(X_0,t)$ étant algébrique sur $k(X_0)$, la restriction de v' à $k(X_0,t)$ est à valeurs dans G_1.

Soit z un élément de K, posons $z = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des éléments de $k[X_0,\dots,X_s]$. Si $v(P) \neq v(Q)$, alors $v(z^2 + X_0 - 1) \leq 0$. On suppose que $v(P) = v(Q) = n_0 g_0 + \dots + n_s g_s$ $(n_i \in \mathbb{N})$.

En regroupant tous les monômes de P de la forme $X_0^m . X_1^{n_s} \dots X_s^{n_s}$ (avec $m \in \mathbb{N}$), on obtient

$P = X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s} P'(X_0) + U$ où $P' \in k[X_0]$ et U un polynôme tel que $v(U) \geq (n_1+1) g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_s g_s$.

De même, $Q = X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s} Q'(X_0) + V$ avec $Q' \in k[X_0]$ et $v(V) \geq (n_1 + 1) g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_s g_s$. Par suite,

$P - tQ = X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s} (P' - tQ') + U - tV$; $P' - tQ' \in k(X_0,t)$, donc

$v'(P' - tQ') < g_1$;

$v'\left[X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s} (P' - tQ')\right] < v'(U - tV)$ et

$v'(P - tQ) = v'\left[X_1^{n_1} \dots X_s^{n_s} (P' - tQ')\right] < (n_1+1) g_1 + n_2 g_2 + \dots + n_s g_s$.

$v'\left(\frac{P}{Q} - t\right) = v'(P - tQ) - v(Q) < g_1$.

Si σ désigne le K - automorphisme de L, on a de même $v' \circ \sigma (z-t) < g_1$ et $v(z^2 + X_0 - 1) = v'(z - t) + v' \circ \sigma (z - t) < g_1$ car g_1 est borne supérieur de G_1.

<u>Corollaire 1</u>

Le complété $(\hat{K}, v)_k$ de $(K, v)_k$ n'est pas hensélien.

Si $(\hat{K},v)$ était hensélien, le polynôme $T^2 + 2T + X_0$ aurait une racine dans $\hat{K}$ puisqu'il a des racines simples dans le corps résiduel. Il en serait de même de $f = T^2 + X_0 - 1$. On aurait $0 \in f(\hat{K}) \subset \overline{f(K)}$ fermeture de $f(K)$ dans $\hat{K}$. Ceci est impossible puisque, d'après le lemme 3, $v\,[f(K)] < g_1$.

Corollaire 2

Quel que soit l'entier n, le complété $(\hat{K},v_n)_k$ de $(K,v_n)_k$ n'est pas hensélien.

D'après le lemme 2, $(\hat{K},v_n)_k = (\hat{K},v)_{k(T_0,\ldots,T_{n-1})}$ qui n'est pas hensélien d'après le corollaire 1.

Conclusion

La topologie de $(\hat{K},v)_K$ ne peut être définie par une valuation hensélienne d'après le lemme 0 et le corollaire 2 du lemme 3.

HENSELISE TOPOLOGIQUE D'UN CORPS VALUATIF

Définition 5

Soit K un corps valuatif. Un hensélisé topologique de K est un corps valuatif K^* topologiquement hensélien tel que :

1) K^* contient un sous - corps homéomorphe à K
2) Si L est un corps valuatif topologiquement hensélien contenant un sous - corps homéomorphe à K , L contient un sous - corps homéomorphe à K^*.

Remarque

Dans (2), on peut supposer que L est algébrique sur K , car si L est topologiquement hensélien, il en est de même de la fermeture algébrique de K dans L.

- Un corps valué admet toujours un hensélisé relativement à sa valuation mais un corps valuatif n'a pas toujours de hensélisé topologique comme le montre le

Théorème 4

Soient $(K,\mathcal{C})$ un corps valuatif et $\hat{K}$ son complété. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) K admet un hensélisé topologique
2) $\hat{K}$ est topologiquement hensélien
3) il existe une valuation v de K définissant $\mathcal{C}$, dont les prolongements à la clôture algébrique de K sont deux à deux

indépendants. Le hensélisé topologique de K est alors la fermeture algébrique séparable de K dans $\hat{K}$.

Les propriétés ci dessus sont évidemment vérifiées si K est $\mathbb{R}$ - valuatif ; on supposera donc qu'il ne l'est pas.

Soit $\tilde{K}$ la fermeture algébrique séparable de K dans $\hat{K}$. La condition (2) est équivalente à (2') : $\tilde{K}$ est topologiquement hensélien d'après ([1], § 8, ex. 14). Montrons que <u>(2') $\Longrightarrow$ (3)</u> :

Soit $\tilde{v}$ une valuation hensélienne de $\tilde{K}$ et v sa restriction à K. Soit C la clôture algébrique séparable de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de C qui induit $\mathcal{C}$ sur K. La fermeture topologique de K dans $(C,\mathcal{C}')$ est homéomorphe à $\tilde{K}$, car dans un complété $\hat{C}$ de $(C,\mathcal{C}')$, $\tilde{K} = \hat{K} \cap C$. Soit w l'unique prolongement de $\tilde{v}$ à C. w est le seul prolongement de v définissant $\mathcal{C}'$. En effet, si w' est un autre tel prolongement, il existe un K - automorphisme σ de C tel que $w' = w \circ \sigma$ et σ est un homéomorphisme de $(C,\mathcal{C}')$ donc sa restriction à $\tilde{K}$ est l'identité.

w et w' ont même restriction $\tilde{v}$ à $\tilde{K}$ et comme $(\tilde{K},\tilde{v})$ est hensélien, $w = w'$.

Par suite, deux prolongements distincts de v à C définissent deux topologies différentes et il en est de même des prolongements à la clôture algébrique de K.

<u>3) $\longrightarrow$ 1)</u>

Soit v une valuation de K dont les prolongements à C sont deux à deux indépendants et soit K^* le hensélisé de K relativement à v. Soit L une extension algébrique de K et $\mathcal{C}'$ une topologie valuative de L qui induit $\mathcal{C}$ sur K et telle que $(L,\mathcal{C}')$ soit topologiquement hensélien.

Il existe un prolongement $\tilde{v}$ de v à L qui définit $\mathcal{C}'$ (théorème 0) et les prolongements de $\tilde{v}$ à C sont dépendants. Comme ce sont aussi des prolongements de v, il n'y en a qu'un donc $(L,\tilde{v})$ est hensélien ; il contient donc K^* qui est un hensélisé topologique de K.

<u>1) $\Longrightarrow$ 2')</u>

Soit $(K^*, \mathcal{C}')$ un hensélisé topologique de K. Tous les K^*-automorphismes de C sont continus pour la topologie $\ddot{\mathcal{C}}$ de C qui induit $\mathcal{C}'$ (théorème 2). Par suite, leur restriction à la fermeture $\tilde{K}$ de K dans $(C, \mathcal{C}'')$ est l'identité, donc $\tilde{K} \subset K^*$.

Soit v une valuation de K définissant $\mathcal{C}$ et w un prolongement de v à C. Pour tout idéal premier P de v, on note v_p et w_p les valuations déduites de v et w par les localisations correspondantes. Soit G le groupe de Galois de C sur K et $G_p^z = \{ \sigma \in G : w_p \circ \sigma = w_p \}$.

L'application $P \longrightarrow G_p^z$ est une application décroissante du spectre de v dans l'ensemble des sous-groupes de G. Soit K_p le corps des invariants de G_p^z. C'est un hensélisé de v_p ([4], F, théorème 2). Comme K_p est topologiquement hensélien, $K_p \supset K^*$. Donc $K^* \subset \bigcap_p K_p$. Un hensélisé est une extension immédiate ([4], F, théorème 3), donc, si A désigne l'anneau de v, A^* celui de la restriction de w à K^*, et p^* l'idéal premier de A^* au dessus de p, on a :

$$B_{p^*} = A_p + p^* B_{p^*} = A_p + p^* \quad ([4], \text{C, proposition 1})$$

Donc $B \subset \bigcap_{p^*} (K + P^*)$. Comme $(K,\mathcal{C})$ est supposé non $\mathbb{R}$-valuatif, les p^* forment un système fondamental de voisinages de 0 dans K^* et $\bigcap_{p^*} (K + P^*)$ est la fermeture de K dans K^*. Par suite, K est dense dans K^* donc $K^* \subset \tilde{K}$ et finalement $K^* = \tilde{K}$.

APPENDICE :

THEOREME 1 DANS LE CAS OÙ LA TOPOLOGIE EST METRISABLE

Théorème :

Soit $(K,\mathcal{T})$ un corps valuatif métrisable et C sa clôture algébrique. Si C est une extension monotopologisable de $(K,\mathcal{T})$, il existe une valuation hensélienne de K définissant $\mathcal{T}$.

Démonstration :

Soit G le groupe de Galois topologique de l'extension $C : K$ ([1 bis] appendice n° 2). Soit v une valuation de K définissant $\mathcal{T}$ et $\tilde{v}$ un prolongement à C. Comme $\mathcal{T}$ est métrisable, le spectre non nul de v possède, pour la relation d'inclusion, une partie coïnitiale dénombrable ([4] , D , ex. 1). Soit P_n une telle suite décroissante d'idéaux premiers de v. On note v_n (resp. $\tilde{v}_n$) la valuation dont l'anneau est le localisé de l'anneau de v par P_n (resp. le localisé de l'anneau de $\tilde{v}$ par son idéal premier au dessus de P_n ([4] , F , proposition 1, cor. 4)).

Soit G_n le groupe de décomposition de $\tilde{v}_n$.

$G_n = \{ \sigma \in G : \tilde{v}_n \circ \sigma = \tilde{v}_n \}$. Les G_n^z constituent une suite croissante de sous - groupes fermés de G . ([3] , ch. III , 15-5).

Montrons que $G = \bigcup_n G_n^z$. Soit $\sigma \in G$. Comme $C : (K,\mathcal{T})$ est une extension monotopologisable, $\tilde{v}$ et $\tilde{v} \circ \sigma$ sont dépendantes et donc elles possèdent un idéal premier commun P ([1] , § 7, prop. 3 et § 4, prop. 1) Comme la suite P_n est coïnitiale, $\exists\, n : P_n \subset P$ et P_n est aussi un idéal commun. Par suite, $\tilde{v}_n \circ \sigma = \tilde{v}_n$ et $\sigma \in G_n^z$.

Montrons que si $G_n \neq G$, G_n^z est d'intérieur vide. Soit L une extension de K de dimension finie et H le sous - groupe ouvert de G correspondant : $H = \{ \sigma \in G : \sigma/_L = Id_L \}$. Si l'on avait $H \subset G_n^z$, la restriction de $\tilde{v}_n$ à L serait hensélienne ; il en serait de même de v_n d'après ([1] , § 8 , ex. 17). Donc on aurait $G_n = G$. Par suite, si $G_n \neq G$, tout ouvert non vide rencontre le complémentaire de G_n^z , $\overset{\circ}{G}{}_n^z = \emptyset$.

Montrons qu'il existe n tel que $G = G_n^z$. Sinon, on aurait , $\forall n$, $\overset{\circ}{G}{}_n^z = \emptyset$. Comme G est compact ([1 bis] appendice n° 2 - proposition 3), il est de Baire ([2] , ch. 9 , § 5, n° 3, th. 1) donc $\overbrace{\bigcup_n G_n^z}^{\circ} = \emptyset$ et, par suite, $G \neq \bigcup_n G_n^z$, d'où la contradiction. Enfin, si $G = G_n^z$, la valuation v_n est hensélienne et répond à la question.

[1] BOURBAKI

Algèbre commutative - Ch. 6 (valuations)

[1 bis] BOURBAKI

Algèbre - Ch. 4

[2] BOURBAKI

Topologie (livre III)

[3] ENDLER

Valuation theory (Springer Verlag - 1972)

[4] RIBENBOIM

Théorie des valuations (Université de Montréal - 1964)

F. BERRONDO
Mathématiques
U.E.R. Scientifiques
6, avenue Le Gorgeu

29283 - BREST-CEDEX