AHMED JEBLI

Corps des fractions

Publications des séminaires de mathématiques et informatique de Rennes, 1975, fascicule 2
« Séminaires d'algèbre et de logique », , exp. n° 2, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1975___2_A2_0>

CORPS DES FRACTIONS [1]

par

Ahmed JEBLI

[1] Le présent article, est la seconde partie d'un travail dont la publication a été commencée dans un fascicule précédent, et qui comporte la bibliographie.

CHAPITRE III

TOPOLOGIES ARTINIENNES

Une topologie linéaire sur un A-module M est dite artinienne, si elle possède un système fondamental de voisinages de 0, (M_α) tel que M/M_α soit un A-module artinien. Les modules topologiquement artiniens ont été étudiés par Ballet dans sa thèse [5]. Nous étudions dans ce chapitre, les topologies A-artiniennes sur K = Fr(A), l'anneau A étant supposé intègre. La proposition suivante caractérise les anneaux intègres A pour lesquels la topologie $\mathcal{T}_A$ sur K est A-artinienne :

Proposition 3.1 : *Soient* A *intègre et* K = Fr(A). *La topologie* $\mathcal{T}_A$ *sur* K *est* A-*artinienne, si et seulement si* A *est semi-local noethérien de dimension 1, et dans ce cas, toutes les topologies* A-*linéaires non discrètes sur* K *sont artiniennes.*

Preuve :

1) Si $\mathcal{T}_A$ est artinienne, alors $A/\mathfrak{a}$ est artinien pour tout idéal non nul $\mathfrak{a}$ de A et donc A est noethérien de dimension 1. D'autre part, K/A est un A-module artinien, d'où (d'après [19], théorème A.7) K/A est somme directe des $(K/A)_{m_i}$ quand m_i parcourt le spectre maximal de A , et puisque K/A est A-artinien, cette somme est finie, donc A est semi-local.

2) Réciproquement, si A est noethérien semi-local de dimension 1, Matlis a démontré dans [19, th. 1] que K/A est un A-module artinien, et si M est un sous A-module non nul de K et $m \in M-(0)$ K/Am est isomorphe à K/A, la suite exacte $K/Am \longrightarrow K/M \longrightarrow 0$ montre que K/M est aussi A-artinien, d'où la conclusion.

Corollaire 3.2. : *Un anneau intègre est ouvert pour une topologie artinienne de son corps des fractions, si et seulement si il est noethérien semi-local de dimension 1.*

Dans le cas où A n'est pas semi-local, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.3. : *Pour* A *intègre de corps des fractions* K, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Toute topologie A*-linéaire de corps non discrète sur* K *est artinienne*

2) A *est noethérien de dimension 1.*

Comme $\mathcal{C}^A$ est la plus fine des topologies A-linéaires de corps sur K, il suffit de montrer que $\mathcal{C}^A$ est artinienne, si et seulement si A est noethérien de dimension 1 :

- Si $\mathcal{C}^A$ est artinienne, K/IA_I est A-artinien pour tout idéal non nul I de A, donc A/I aussi, et par suite, A est noethérien de dimension 1.

- La réciproque résultera des deux lemmes suivants :

Lemme 3.4. (Ballet, [5]) : *Soient* A *un anneau,* m *un idéal maximal de* A, i *l'application canonique* $A \longrightarrow A_m$, M *un* A_m*-module. Pour que* M *soit artinien, il faut et il suffit que le* A*-module* $i_*(M)$ *soit artinien.*

En effet : la condition est évidemment suffisante. Inversement, soit $(M_n)_{n\geq o}$ une suite décroissante de sous A-modules de $i_*(M)$, alors il existe un entier n tel que $(M_n)_m = (M_{n+1})_m$. Soit $s \in M_n/M_{n+1}$, il existe $t \notin m$ tel que tx=0. D'autre part, $m \subset \sqrt{\mathrm{Ann}\ x}$ d'après ([5], prop. 1.3), et l'inclusion est stricte puisque $t \notin m$ d'où Annx = A puisque m est maximal, par suite x=0 et $M_n = M_{n+1}$.

Lemme 3.5. : *Soit* A *un anneau intègre de corps des fractions* K, *les deux pro-*

priétés suivantes sont équivalentes :

1) K/IA_I *est* A*-artinien pour tout idéal non nul* I *de* A

2) A *est noethérien de dimension 1.*

<u>Preuve</u> :

- Nous avons déjà vu que 1) $\Longrightarrow$ 2).

- Réciproquement, supposons A noethérien de dimension 1, et soit I un idéal non nul de A. Comme I est contenu seulement dans un nombre fini d'idéaux premiers et que $IA_I = \bigcap_{I \subset m} (IA_I)_m$, il suffit de montrer que $K/(IA_I)_m$ est A-artinien pour chaque $m \supset I$, et $K/(IA_I)_m$ est un A_m-module, donc d'après la proposition 3.1, il est A_m-artinien et puisque m est maximal, le lemme précédent 3.4 nous montre qu'il est A-artinien. c.q.f.d.

Nous voyons donc que $\mathcal{T}^A$ est artinienne, si et seulement si A est noethérien de dimension 1. D'où le théorème 3.3.

Comme corollaire de ce résultat, nous pouvons retrouver le théorème suivant de Cohen :

<u>Théorème 3.6.</u> [Cohen, 6 bis] : *Si* A *est noethérien intègre de dimension 1, tout anneau intermédiaire* B *entre* A *et* $K = Fr(A)$ *est noethérien de dimension 1 et si* A *est semi-local, il en est de même de* B.

En effet : toute topologie B-linéaire de corps sur K est A-linéaire, donc A-artinienne et par suite B-artinienne. D'autre part, il est évident que $\mathcal{T}_B$ est B-artinienne si $\mathcal{T}_A$ l'est.

<u>Corollaire 3.7.</u> : *Si* A *est un anneau de valuation,* $K = Fr(A)$ *alors la topologie définie sur* K *par la valuation de* A *est* A*-artinienne, si et seulement si* A *est de valuation discrète.*

Cela résulte du fait que l'anneau d'une valuation est noethérien, si et seulement si elle est discrète.

Corollaire 3.8. : *Si* A *est un anneau "presque de Dedekind",* $K = Fr(A)$ *une topologie* A*-linéaire de corps non discrète sur* K *est artinienne, si et seulement si elle est borne supérieure d'une famille de topologies* p*-adiques* ($p \in \mathrm{Spec}\, A$).

En effet : pour tout $p \in \mathrm{Spec}\, A$, A_p est un anneau de valuation discrète donc $\mathcal{T}_p$ est A_p-artinienne, et comme p est maximal elle est A-artinienne d'après 3.4., il en est donc de même d'une borne supérieure de $\mathcal{T}_p$.
Réciproquement, soit $\mathcal{T}$ topologie de corps A-artinienne sur K. Si M est un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$, Supp(K/M) est fini d'où $M = \bigcap_{\text{fini}} M_p$. On en déduit de la même manière que dans A.2.7 chapitre II, que $\mathcal{T}$ est borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques.

Cette démonstration montre que le corollaire précédent est en fait un cas particulier du résultat plus général suivant :

Proposition 3.9. : *Soient* A *intègre de dimension 1,* $K = Fr(A)$ *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Les seules topologies de corps non discrètes A*-artiniennes sur* K *sont les bornes supérieures de familles de topologies* p*-adiques*

2) Pour tout $p \in \mathrm{Spec}\, A$, A_p *est noethérien analytiquement irréductible.*

En effet 1) entraîne que A_p est noethérien d'après 3.1 et pour toute valuation essentielle v de A_p, $\mathcal{T}_v$ est A_p-artinienne donc A-artinienne, $\mathcal{T}_v$ est donc une borne supérieure d'une famille de topologies p-adiques, on en déduit comme dans B.2.1 que A_p est analytiquement irréductible.
L'implication 2) $\Longrightarrow$ 1) se démontre comme dans A.2.7.

Dimension > 1 : Dans ce cas, nous allons chercher parmi les topologies A-artiniennes de K, celles qui sont bornes supérieures de topologies p-adiques.
Les résultats obtenus généralisent ceux du chapitre I (où dim A=1 et toutes les topologies considérées sont artiniennes).

Proposition 3.10. : *Soient* A *un anneau noethérien intègre,* $K = Fr(A)$ *et* P *un idéal premier non nul de* A. *La topologie* $\mathcal{T}_p$ *est* A*-artinienne sur* K*, si et seulement si* P *est maximal de hauteur 1.*

Preuve :

1) Si $\mathcal{T}_p$ est A-artinienne, K/A_p est un A-module artinien donc A_p-module artinien d'où $\dim(A_p) = 1$ d'après 3.1 et par suite p est de hauteur 1. D'autre part, K/pA_p est aussi A-artinien, on en déduit que A/p est artinien, donc P est maximal.

2) Réciproquement, si P est maximal de hauteur 1, K/p^nA_p est A_p-artinien d'après 3.1 et comme P est maximal, c'est aussi un A-module artinien en vertu de 3.4, donc $\mathcal{T}_p$ est A-artinienne.

Soit maintenant $\mathcal{T}$ une topologie A-artinienne de corps sur K, elle induit sur A une topologie artinienne. Si $\Omega_{\mathcal{T}}$ est la famille des idéaux maximaux de A ouverts pour cette topologie, nous allons comparer $\mathcal{T}$ et $\operatorname{Sup}_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$: remarquons d'abord que si $\mathcal{T} = \operatorname{Sup}_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$, les $\mathcal{T}_m$ sont artiniennes donc les m sont de hauteur 1 d'après la proposition précédente. La réciproque n'est pas vraie, il suffit de prendre A local de dimension 1 qui n'est pas de Mori, la topologie $\mathcal{T}_{A'}$, où A' est la clôture intégrale de A, est A-artinienne mais n'est pas égale à $\mathcal{T}_m$.

Nous avons cependant la proposition suivante :

Proposition 3.11. : *Si les éléments de* $\Omega_{\mathcal{T}}$ *sont de hauteur 1 et si* $\hat{A}_m$ *est intègre pour tout* $m \in \Omega_{\mathcal{T}}$ *alors* $\mathcal{T} = \operatorname{Sup}_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$.

Démonstration : Soient M un voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$ et $a_M = M \cap A$.

Si $a_M \subset m$, alors $M_m \neq K$ donc M_m est un A_m-module de type fini puisque A_m est analytiquement irréductible. Par conséquent A_m est ouvert pour $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_m$.

Soit alors M' un autre voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$ tel que $\mathfrak{a}_{M'}A_{\mathfrak{a}_{M'}} \subset M$ où $\mathfrak{a}_{M'} = M \cap A$. Or K/M étant artinien, Supp(K/M) est fini et constitué d'éléments maximaux d'où $M \supset \cap (\mathfrak{a}_{M'}A_{\mathfrak{a}_{M'}m})$ intersection finie dans laquelle ne figurent que les termes correspondants aux $m \supset \mathfrak{a}_{M'}$, car si $\mathfrak{a}_{M'} \not\subset m$, il lui est étranger et $(\mathfrak{a}_{M'}A_{\mathfrak{a}_{M'}m}) = K$ puisque A_m est de dimension 1 (les éléments de $\Omega_{\mathcal{T}}$ sont supposés de hauteur 1). $\mathcal{T}$ est donc moins fine que $\operatorname{Sup}_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$, d'où l'égalité.

Les conditions de la proposition précédente sont vérifiées par exemple lorsque A est un anneau de Mori et le morphisme Spec A' $\longrightarrow$ Spec A est injectif, en particulier, on a le :

<u>Théorème 3.12.</u> : *Si* A *est noethérien intégralement clos,* $\mathcal{T}$ *une topologie* A-*artinienne de corps non discrète sur* K, *les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) $\mathcal{T} = \operatorname{Sup}_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$

2) Pour tout M, sous-module de K, *voisinage de* 0 *pour* $\mathcal{T}$, $\mathfrak{a}_M$ *est un idéal divisoriel de* A.

<u>Preuve</u> : Il est évident que 1) $\longrightarrow$ 2) puisque les m sont alors de hauteur 1 et les $\mathcal{T}_m$ possèdent un système fondamental de voisinages <u>divisoriels</u> de 0. Réciproquement, si 2) est vérifiée, $\operatorname{Ass}(A/\mathfrak{a}_M)$ est formé d'idéaux premiers de hauteur 1, et comme $A/\mathfrak{a}_M$ est artinien $\operatorname{supp}(A/\mathfrak{a}_M) = \operatorname{Ass}(A/\mathfrak{a}_M)$, donc les éléments de $\Omega_{\mathcal{T}}$ sont de hauteur 1, et puisque les localisés de A en $m \in \Omega_{\mathcal{T}}$ sont de valuation discrète, on est dans les conditions d'application de 3.11.

<u>Corollaire 3.13.</u> : *Soit* A *noethérien intégralement clos, si* $\mathcal{T}$ *est artinienne et possède un système fondamental de voisinages divisoriels de* 0*, alors elle est borne supérieure d'une famille de topologies* m-*adiques.*

C'est une généralisation du théorème A.1.9 du chapitre I.

Remarque et application aux anneaux de polynômes :

Les topologies artiniennes sur $K = Fr(A)$ sont liées aux idéaux maximaux de hauteur 1 de A, de tels idéaux n'existent pas toujours, par exemple $A[T]$ n'en contient que si A est un G-anneau (i.e. : l'intersection de ses idéaux premiers non nuls et non nulle) [cf. Gilmer : Pacific J. Maths Vol. 19, n° 2, 1966 th. 3]. Un anneau noethérien intègre est un G-anneau, si et seulement si il est-semi local de dimension 1. On a alors le :

Théorème 3.14. : *Soit* A *un anneau de Dedekind semi-local,* $B = A[T]$. *Alors toute topologie de corps* $A[T]$*-artinienne sur* $K(T)$ *possèdant un système fondamental de voisinages divisoriels de* 0 *induit sur* K *la topologie discrète.*

En effet : $A[T]$ contient des idéaux maximaux de hauteur 1, d'après le corollaire précédent une topologie vérifiant les hypothèses du théorème est borne supérieure de topologies $\mathcal{T}_m$ (avec m maximal de hauteur 1), lesquelles induisent la topologie discrète sur K car $m \cap A = (0)$ puisque m ne peut être de la forme $pA[X]$ ($p \in \mathrm{Spec}A$), ce dernier n'étant jamais maximal.

Remarque 3.15. : De tout ce qui précède, il résulte que si A est noethérien intégralement clos de dimension > 1, il n'y a pas toujours de topologies A-artiniennes de corps sur K. C'est le cas par exemple lorsque des chaînes maximales d'idéaux premiers de A ont même longueur : anneaux de polynomes à plusieurs variables sur un corps, et plus généralement les anneaux réguliers.

Une généralisation :

Proposition 3.16. : *Soit* A *noethérien intègre,* $K = Fr(A)$. *Si* $\mathcal{T} = \sup_{m \in \Omega_{\mathcal{T}}} \mathcal{T}_m$ *pour toute topologie* A*-artinienne de corps sur* K, *alors* $\hat{A}_m$ *est intègre pour tout idéal maximal de hauteur 1 de* A.

En effet : Soient m un idéal maximal de hauteur 1 de A et v une valuation essentielle de $(A_m)'$ (clôture intégrale de A_m), $\mathcal{T}_v$ sa topologie :

comme A_m est de dimension 1, $\mathcal{T}_v$ est A_m-artinienne donc aussi A-artinienne puisque m est maximal, l'hypothèse implique alors que $\mathcal{T}_v = \mathcal{T}_m$ $(\Omega_{\mathcal{T}_v} = \{m\})$ d'où on déduit deux choses :

- Toutes les valuations essentielles de $(A_m)'$ définissent la même topologie, elles sont identiques et A_m est <u>unibranche</u>.

- La topologie définie par les idéaux non nuls de $(A_m)'$ est égale à $\mathcal{T}_m$, c'est-à-dire A_m est <u>de Mori</u>, donc $\hat{A}_m$ est intègre.

<u>Remarque 3.17.</u> : Si A est tel que $\hat{A}_m$ soit intègre pour tout m maximal de hauteur 1 (par exemple $D[T]$ où D est noethérien semi-local de dimension 1), on peut montrer comme dans B.2.1 que toute topologie A-artinienne de corps possèdant un système fondamental de voisinages "divisoriels" (dans le sens de B.2.1) de D est borne supérieure d'une famille de topologies m-adiques.

CHAPITRE IV

COMPACTITE LINEAIRE

Dans ce chapitre, on cherche à déterminer les anneaux intègres A pour lesquels Fr(A) est A-linéairement compact pour une topologie de corps. A ce sujet, on connaît essentiellement les deux résultats suivants :

1) Si A est un anneau de valuation, alors K = Fr(A) est linéairement compact pour la topologie de la valuation de A, si et seulement si il est maximal pour la relation d'extension immédiate [Kaplansky, (17)].

2) Si A est noethérien local complet, Ballet a démontré dans [6] que K est linéairement compact pour la topologie discrète, si et seulement si dim A $\leq$ 1.

Dans ces deux cas, K est linéairement compact pour $\mathcal{T}_A$ (topologie définie sur K par les idéaux non nuls de A), et dans le cas des anneaux de valuations, ceci est équivalent à la propriété : "K est linéairement compact pour la topologie discrète". La proposition suivante montre que c'est aussi vrai pour les anneaux noethériens.

Proposition 4.1. : *Soient* A *noethérien intègre et* K *son corps des fractions, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) K *est linéairement compact pour* $\mathcal{T}_A$.

(2) K *est linéairement compact pour la topologie discrète.*

(3) A *est local complet de dimension 1.*

Preuve :

1) (2) et (3) sont équivalentes d'après le résultat de Ballet cité plus haut.

2) (3) implique que la clôture intégrale de A est un anneau de valuation discrète et K est linéairement compact pour la topologie de cette valuation qui est identique à $\mathcal{T}_A$.

3) Reste à démontrer que 1) $\Longrightarrow$ 3) : la propriété 1) implique que K est complet pour toute topologie A-linéaire non discrète (qui est moins fine que $\mathcal{T}_A$). En particulier, K est complet pour toutes les valuations essentielles de l'anneau de Krull A' (clôture intégrale de A) car d'après Schmidt [Math. Annden 108 (1933) p. 1-25]. Si un corps est complet pour une valuation discrète, celle-ci est sa seule valuation discrète. On en déduit donc que (1) implique que l'anneau de Krull A' possède une seule valuation essentielle, c'est donc un anneau de valuation discrète, et par conséquent, A est local de dimension 1 complet.

Remarque : Contrairement à ce qu'affirme Bourbaki (Algèbre commutative, chap. VI Ex. 1, § 5), un anneau local intègre A peut donc être linéairement compact pour $\mathcal{T}_A$ sans que K = Fr(A) le soit pour la même topologie, il suffit, d'après la proposition précédente, de prendre un anneau local noethérien intègre complet de dimension > 1 par exemple $k[[X_1,X_2]]$ où K est un corps.

Théorème 4.2. : *Soit* A *noethérien de Mori et de dimension 1, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) K *est* A*-linéairement compact pour une topologie de corps.*

(2) A *est local complet.*

Preuve : Si A est local complet, K est strictement linéairement compact pour toute topologie A-linéaire de corps. Inversement : soient $\mathcal{T}$ une topologie A-linéaire de corps non discrète sur K supposée linéairement compacte et $M \neq K$ un sous A-module de K, voisinage de 0 pour $\mathcal{T}$. Il existe au moins un $p \in \operatorname{Spec} A$ tel que $M_p \neq K$, on distingue alors deux cas :

1) Si p ne contient pas le conducteur de A (dans A'), A_p est un anneau de valuation discrète et M_p est un A_p-module de type fini. Par suite A_p est ouvert pour $\mathcal{T}$ et donc $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_p$ qui sera alors complète, et d'après Schmidt, A' sera de valuation discrète complet.

2) Si p ne contient pas le conducteur, A_p n'est pas intégralement clos, mais il est de Mori. Soit $(A_p)' = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ sa clôture intégrale qui est un anneau de Dedekind semi-local (V_i valuations discrètes). Il existe $\alpha \in A_p$ tel que $\alpha(A_p)' \subset A_p$ et comme $M_p \neq K$, on aura aussi $M(A_p)' \neq K$. $M(A_p)'$ est alors un $(A_p)'$-module, il existe par conséquent un indice i, $1 \leq i \leq n$ tel que $MV_i \neq K$. On conclut alors comme précédemment, en disant que K est complet pour V_i, donc c'est son seul anneau de valuation discrète, d'où A local complet.

Remarque :

1) L'hypothèse que A' est un A-module de type fini est essentielle comme le montre l'exemple d'un anneau noethérien local de dimension 1 non de Mori, dont la clôture intégrale est un anneau de valuation discrète complet, K est linéairement compact pour cette valuation, mais A n'est pas complet.

2) Il est possible que la compacité linéaire de K implique que A est de dimension 1, nous n'avons pas réussi à la démontrer ni à donner un contre exemple. Le résultat de Ballet cité plus haut montre qu'on ne peut espérer trouver un exemple avec une topologie définie par une valuation. On peut, suivant une idée de Ballet, se ramener au cas où A est local complet :
Soient en effet, A un anneau noethérien intègre, K = Fr(A) qu'on suppose muni d'une topologie de corps, A-linéairement compacte $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{T}^*$ la topologie ayant un système fondamental de voisinages de 0 les sous modules ouverts pour $\mathcal{T}$ et abrités (Bourbaki, Chapitre III, § 2, Ex. 18). $\mathcal{T}^*$ est linéairement compacte, en particulier K est complet pour $\mathcal{T}^*$. Soit $\mathcal{T}_0$ la topologie induite par $\mathcal{T}^*$ sur A, cette topologie est artinienne et séparée. Soit $\hat{A}$ le séparé complété de A pour $\mathcal{T}_0$. Comme l'application $(x,y) \longrightarrow xy$ de $A \times A \longrightarrow K$ est continue ($A \times A$ muni de $\mathcal{T}_0$ et K de $\mathcal{T}^*$), l'injection $A \longrightarrow K$ se prolonge en un monomorphisme d'anneau de $\hat{A}$ dans K, ainsi $\hat{A}$ est intègre de corps des fractions k. Mais d'après Ballet [5, Chapitre II, prop. 1.2], $\hat{A}$ est isomorphe à

$\prod_{m_i \in \Omega_{\mathcal{T}_0}} \hat{A}_{m_i}$ ($\Omega_{\mathcal{T}_0}$: ensemble des idéaux maximaux de A ouverts pour $\mathcal{T}_0$), $\hat{A}_{m_i}$ étant le séparé complété de A_{m_i} muni de sa topologie de A-module déduite de $\mathcal{T}_0$, $\hat{A}_{m_i}$ est strictement linéairement compact local, et $\hat{A}$ est intègre et produit d'anneaux locaux donc local et $\Omega_{\mathcal{T}_0}$ est réduit à un élément m, $\hat{A} = \hat{A}_m$, on a donc les inclusions $A \subset A_m \subset \hat{A}_m \subset K$.

Pour pouvoir remplacer A par $\hat{A}_m$, il reste à démontrer que les sous A-modules de K ouverts pour $\mathcal{T}$ sont des $\hat{A}_m$-modules. Comme un tel module est intersection d'ouverts de $\mathcal{T}^*$, il suffit de la faire pour les ouverts de $\mathcal{T}^*$: soient M ouvert pour $\mathcal{T}^*$ et $\xi \in M$: il est facile de voir que l'homothétie $x \longrightarrow \xi x$ est continue pour $\mathcal{T}^*$, il existe donc N ouvert pour $\mathcal{T}^*$ tel que $\xi N \subset M$, $N \cap A$ est ouvert dans A, $A/N \cap A = \hat{A}/\widehat{N \cap A}$ et $N \supset N \cap A$.
Si maintenant $a' \in A$, il existe $a \in A$ tel que $a'-a \in \widehat{N \cap A} \subset N$, donc $(a'-a)\,\xi \subset \xi N \subset M$ et comme $a\,\xi \in M$, on en déduit $a'\xi \in M$, d'où M est un $\hat{A}_m$-module puisque $\hat{A} = \hat{A}_m$. On est ainsi ramené au cas où A est local complet et fermé dans K. On peut même supposer A régulier en vertu du théorème de Cohen.

<u>Question</u> : Soit A local complet et régulier, si K = Fr(A) est A-linéairement compact pour une topologie de corps, A est-il de dimension 1 ?

<u>Une généralisation</u> : Le théorème 4.2 est encore vrai pour certains anneaux cohérents : on utilise le résultat suivant de Quentel.

<u>Théorème 4.3.</u> : *Un anneau local intégralement clos cohérent de dimension 1 est un anneau de valuation.*

D'où : un anneau intégralement clos cohérent de dimension 1 est un anneau de Prüfer. On en déduit que si A est intègre cohérent dont la clôture intégrale est un A-module de présentation finie, alors son corps des fractions est A-linéairement compact pour une topologie de corps non discrète, si et seulement si il est linéairement compact discret.

La démonstration est la même que celle de 4.2 en utilisant cette fois le fait qu'un corps ne peut être complet pour deux valuations de rang 1 non équivalentes (Ribenboim : théorie des valuations).